分配小于人数和任务数的指派问题的反点算法

王立柱 [1] 刘 阳 [1†]

摘要 对从 m 个人中派出 $k(0 < k \leqslant min\{m,n\})$ 个人去完成 n 项任务中的 k 项任务，使总效率最高这类指派问题给出了新算法，通过对这类指派问题引入了反点的概念，讨论了反点所具有的一些性质并证明了相关结论，利用这些结论找到了通过增加反点来解决此类指派问题的反点算法.

关键词 指派问题，反点，最优解
中图分类号 O224
数学分类号 90-08

Reverse Point Algorithm of Assignment Problem on Assignment Less Than Jobs and Persons

WANG Lizhu[1] LIU Yang[1†]

Abstract In this paper, we propose a new algorithm on a special assignment problem in which the real assigned jobs are less than or equal to both the total persons and the total jobs. To this special assingment problem we pose the concept of reserve point, discussed the character of reserve point and accessed to relevant conclusion. A new method to solve this special assignment problem is given through increasing reserve points finally.

Keywords Assignment problem, reverse point, optimal solution
Chinese Library Classification O224
2010 Mathematics Subject Classification 90-08

0 引 言

有 n 个人且有 n 项任务需要完成，每人只能承担一项任务，每项任务只能由一个人来完成. 由于个人的专长不同，因而完成不同任务的效率 (时间或费用) 不同. 求指派哪个人完成哪项任务才能使总的效率最高 (或所需的时间最少), 这类问题称为标准指派问题.

除了标准指派问题外，文献 [1] 提出了 n 阶方阵极大极小指派问题，即如何指派哪个人去完成哪项工作，可使完成任务代价最大者的代价最小； [2] 提出了 n 阶方阵极大极小指派问题在多目标追逐问题中的重要作用； [3] 提出了 $m \times n$ 阶矩阵极大极小指派问题； [4] 提出了一人可以承担多项任务的分配问题； [5] 提出了具有资源耗费，而资源量有限的条件下，效率最高的指派问题； [6] 提出的多目标指派问题等等.

收稿日期： 2011 年 4 月 13 日.

1. 沈阳师范大学数学与系统科学学院, 沈阳 110034 ; College of Mathamatics, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China
† 通讯作者 Corresponding author

1 分配小于人数和任务数的指派问题的描述和数学模型

假设有 n 个人且有 n 项任务需要完成，每人完成不同任务的效率（时间或费用）不同．现要从 n 个人中派出 $k(0<k\leqslant n)$ 个人去完成 n 项任务中的 k 项任务，求指派哪 k 个人完成哪 k 项任务才能使总效率最高 (或所需的时间最少). 为方便，此类指派问题记为 (n,n,k) 指派问题.

更一般的情形，从 m 个人中派出 $k(0<k\leqslant \min\{m,n\})$ 个人去完成 n 项任务中的 k 项任务使总效率最高的指派问题．记为 (m,n,k) 指派问题． (n,n,k) 指派与 (m,n,k) 指派统称为分配数小于总人数和总任务数的指派问题.

(m,n,k) 指派问题的数学模型为:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant 1 \quad j=1,2,\cdots,n\\
& \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant 1 \quad i=1,2,\cdots,m\\
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=k\\
& x_{ij}=0\text{或}1 \quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

当取 $m=n$ 时，便可得 (n,n,k) 指派问题的数学模型．该问题实质是求解指派问题的 $m\times n$ 系数矩阵中位于不同行、不同列的 k $(0<k\leqslant\min\{m,n\})$ 个元素 (点) 其和最小的问题，较小如 $k=1$ 时问题很简单，一般讨论较大的情况．下面给出此类问题的反点算法.

2 引人反点的定义和相关定理

定义 1 在 n 阶方阵中本身是非零点，但其所在行与列的其它所有元素都是 0 ，这样的点称做反点．如 (a) ,r_{11} 就是反点，其中 $*$ 表示非零元素； $\bullet$ 表示 n 阶方阵中的任意元素.

$$
\begin{pmatrix}
* & 0 & 0 & 0\\
0 & \bullet & \bullet & \bullet\\
0 & \bullet & \bullet & \bullet\\
0 & \bullet & \bullet & \bullet
\end{pmatrix}_{r_{ij}}
$$

(a)

引理 1 标准指派问题的最优解一定不包含反点.

证明 利用反证法，以 $n=7$ 为例， (b) 表示标准指派问题的系数矩阵．假设 $\omega_1=\{r_{14},r_{23},r_{32},r_{41},r_{55},r_{66},r_{77}\}$ 是标准指派问题的最优解, 且包含反点 r_{14}, 记相加之和 $v_1=r_{14}+r_{23}+r_{32}+r_{41}+r_{55}+r_{66}+r_{77}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & (\bullet) & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & (\bullet) & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ (\bullet) & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & (\bullet) & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & (\bullet) & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & (\bullet) \end{pmatrix}_{r_{ij}} \quad (\bullet)\text{ 表示最优解中的点}$$

(b)

从除了反点之外且属于最优解的点中任意找出一点如 r_{55}，现选取 r_{15} 和 r_{54} 分别替换 r_{14} 与 r_{55} 得到新的可行解 $\omega_2=\{r_{15},r_{23},r_{32},r_{41},r_{54},r_{66},r_{77}\}$, 如 (c) 所示，记相加之和 $\upsilon_2=r_{15}+r_{23}+r_{32}+r_{41}+r_{54}+r_{66}+r_{77}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & (0) & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & (\bullet) & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & (\bullet) & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ (\bullet) & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & (0) & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & (\bullet) & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & (\bullet) \end{pmatrix}_{r_{ij}} \quad (\bullet)\text{ 表示最优解中的点}$$

(c)

由于 $r_{15}=0$,$r_{54}=0$, 显然 $\upsilon_1>\upsilon_2$, 这与 ω_1 是最优解矛盾. 对于 n 阶系数矩阵不失一般性，所以引理 1 成立.

引理 2 n 阶标准指派问题的系数矩阵中，若存在 k 个反点. 则最优解中必有 $2k$ 个最优点落在这 k 个反点所在的行与列上，且其余 $n-2k$ 个最优点必是去掉反点所在行与列的所有元素得到的 $n-k$ 阶矩阵中的 $n-2k$ 个位于不同行不同列且相加之和最小的点.

证明 由引理 1 知，反点一定不是 n 阶标准指派问题最优解 ω_1 中的点. 最优解满足约束保证每行、每列必须有且只有一个最优点，因此反点所在的行与列上也必须各有一个最优解中的点. 即最优解 ω_1 中必有 $2k$ 个点落在反点所在的行与列上.

用直线划去 k 个反点所在的行与列的所有元素，得到 $n-k$ 阶矩阵. 由于 n 阶标准指派问题的最优解 ω_1 中含有 n 个位于不同行、列的点，其中 $2k$ 个落在反点所在的行列上，因而剩下的 $n-2k$ 个最优点一定分布在未被直线划去的 $n-k$ 阶矩阵中，且一定是 $n-k$ 阶矩阵中位于不同行、列且相加之和最小的 $n-2k$ 个点. 事实上，如若剩下的 $n-2k$ 个最优点不是 $n-k$ 阶矩阵中位于不同行、列和最小的 $n-2k$ 个点，则与 ω_1 是最优解矛盾. 因而结论成立.

由引理 2 可知：在求解 n 阶标准指派问题时，若系数矩阵含有 k 个反点时，则在求出位于不同行、不同列且相加之和为最小的 n 个元素的位置时，也同时求出了位于不同行、不同列且相加之和为最小的 $n-2k$ 个元素的位置.

定理 1 (n,n,k) 指派问题的最优解，可通过增加 $n-k$ 个反点的 $2n-k$ 阶标准指派问题的最优解而得到.

证明 当 $k=n$ 时，即为 n 阶标准指派问题，当 $k<n$ 时，即求 n 阶系数矩阵中位于不同行、列且和最小的 k 个点的位置，不妨在该 n 阶矩阵的外面增加 $n-k$ 个反点，此

时变成一个 $2n-k$ 阶矩阵，由引理 1 、 2 求解此 $2n-k$ 阶标准指派问题，便可得到 n 阶标准指派问题系数矩阵中位于不同行、不同列的 $k(k\leqslant n)$ 个点的位置使其和最小.

定理 2　(m,n,k) 指派问题的最优解，可通过先将其系数矩阵补成 $\max\{m,n\}$ 阶方阵，增加 $\max\{m,n\}-k$ 个反点求解 $2\max\{m,n\}-k$ 阶标准指派问题的最优解而获得.

证明 将此 (m,n,k) 指派问题的 $m\times n$ 阶系数矩阵 $(r_{ij})_{m\times n}$ 增加 $|m-n|$ 行或列的 M 元素，其中 $M>\max\{r_{ij}\}$ 得到 $\max\{m,n\}$ 阶方阵，由定理 1 知，增加 $\max\{m,n\}-k$ 个反点后， $\max\{m,n\}$ 阶方阵变成 $2\max\{m,n\}-k$ 阶方阵，以此方阵为系数的最优解中除落在反点上的 $2(\max\{m,n\}-k)$ 个最优点外，其余的最优点组成 (m,n,k) 指派问题的最优解. 不失一般性，取 $m=3$, $n=4$, $k=3$, 如 (d) 所示，先将 3×4 阶系数矩阵增加 1 行 M, 再增加一个反点，由定理 1 知，求解 5 阶方阵所对应的标准指派问题的最优解便可获得 $(3,4,3)$ 问题的最优解.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (0) & 1 \\ \bullet & (\bullet) & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & (\bullet) & \bullet & 0 \\ (\bullet) & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ M & M & M & M & (0) \end{pmatrix}$$

(d)

3　算　法

求解 (n,n,k) 指派问题及 (m,n,k) 指派问题的算法如下：

第一步：处理初始指派问题的系数矩阵

(1) 若是 (n,n,k) 指派问题，则系数矩阵无需变化.

(2) 若是 (m,n,k) 指派问题，则将系数矩阵通过增加 $|m-n|$ 行或列的的 M 元素，其中 $M>\max\{r_{ij}\}$ 得到 $\max\{m,n\}$ 阶方阵.

第二步：根据要求计算增加反点数量。

经第一步处理后， (n,n,k) 指派问题系数矩阵仍为 n 阶方阵，在此方阵的外面增加 $n-k$ 个反点变成 $2n-k$ 阶方阵； (m,n,k) 指派问题系数矩阵变为 $\max\{m,n\}$ 阶方阵，在此方阵的外面增加 $\max\{m,n\}-k$ 个反点变成 $2\max\{m,n\}-k$ 阶方阵.

第三步：求解经第二步处理得到的方阵为系数矩阵的标准指派问题. 可使用匈牙利法或用已有的其他求解标准指派问题的算法求解.

第四步：获取最优解

从第三步得到的最优解中去掉落在反点所在行和列的最优点，剩下的最优点便组成 (n,n,k) 指派问题或 (m,n,k) 指派问题的最优解.

4　实　例

例 1 设有 7 个工作小组，现在要求分配 5 个小组进行生产、组装、调度、运输和装卸任务各一项，每个小组单独完成各项任务的时间由矩阵 L 给出，问如何分配任务使各组所用时间总和最少.

解 此问题是 $(m=7,n=5,k=5)$ 指派问题，其的系数矩阵 $L=(r_{ij})_{7\times 5}$ 是 7×5 阶矩阵，且 $\max\{r_{ij}\}=18$, 不妨取 $M=19$, 解决此问题可以补两列 M 元素且增加 2 个

反点，将系数矩阵处理为 $M_1 = (r_{ij})_{9\times 9}$. 以 M_1 为系数矩阵解标准指派问题，可得对应 $(m = 7, n = 5, k = 5)$ 指派问题的最优解矩阵 M^*.

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 4 & 18 & 9 & 16 & 8 \\ 14 & 6 & 12 & 11 & 9 \\ 9 & 15 & 7 & 9 & 5 \\ 11 & 8 & 9 & 12 & 17 \\ 7 & 13 & 10 & 9 & 12 \\ 14 & 11 & 12 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 12 & 8 & 7 & 13 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 4 & 18 & 9 & 16 & 8 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 14 & 6 & 12 & 11 & 9 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 9 & 15 & 7 & 9 & 5 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 9 & 12 & 17 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & 10 & 9 & 12 & 19 & 19 & 0 & 0 \\ 14 & 11 & 12 & 10 & 8 & 19 & 19 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

参 考 文 献

[1] Joseph B, Brosilow C B. Steady state analysis and design [J]. *AIChE Journal*, 1978, **24**: 485-492.

[2] Brosilow C B, Tong M. The structure and dynamics of inferential control systems [J]. *AIChE Journal*, 1978, **24**: 492-500.

[3] 杨丽英，韩建达，聂义勇．非方阵指派问题求解 [J]. 信息与控制, 2009, **38**: 641-652.

[4] 石忠民．广义指派问题 [J]. 运筹与管理，1999, **8**: 21-26.

[5] Nauss R M. Solving the generalized assignment problem:an optimizting and heuristic approach [J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2003, **15**: 249-266.

[6] 宋业新，陈绵云，张暑红．目标指派问题及其在军械物资供应中的应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, **21**: 141-144.