

文章编号: 1000-4750(2012)07-0012-05

裂纹扩展问题的改进 XFEM 算法

茹忠亮, 朱传锐, 赵洪波

(河南理工大学土木工程学院, 河南, 焦作 454010)

摘 要: 利用扩展有限元法计算裂尖附近应力、位移场, 进而得到裂尖应力强度因子和开裂角; 水平集法描述、追踪裂纹, 并由单元结点水平集值判别单元类型; 将二者结合起来分析处理裂纹扩展问题。针对水平集判别倾斜裂纹单元类型的不足, 分析问题的原因, 并给出解决方案。最后, 通过典型算例分析, 表明将扩展有限元法与水平集法结合分析裂纹扩展问题时具有不需网格重构, 裂纹与网格相互独立的特点; 同时验证了笔者提出解决方案的准确性和可行性。

关键词: 扩展有限元; 裂纹扩展; 水平集法; 加强单元; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.09.0686

AN IMPROVED ALGORITHM OF XFEM FOR THE CRACK PROPAGATION PROBLEMS

RU Zhong-liang, ZHU Chuan-rui, ZHAO Hong-bo

(College of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454010, China)

Abstract: Based on the extended finite element method and level set method, the crack propagation problem is modeled. The extended finite element method is also used to compute the stress and displacement field near the crack tip in order to determine the angle of the crack propagation. The level set method is used to represent the crack interface and the location of the crack tips, and to track the crack propagation paths. In the practice, there are some limitations judging the element types. The reason is the limitation of the level set method in judge the element types. Thusly, the advantage project which called the virtual crack method is come up. At last, two typical numerical examples are simulated for the crack propagation problems. This combined method requires no remeshing as a crack propagating, making the algorithm very efficient, and the results are present to demonstrate the accuracy of the advantage project.

Key words: extend finite element method; level set method; crack propagation; enrich element; stress intensity factor

大量的岩土工程实践表明: 岩土工程的失稳性与其内部裂缝的扩展、贯通密切相关。因此, 研究裂纹及其稳定性、预测裂纹的发展对评估工程结构安全性和可靠性具有重要的参考价值。目前对裂纹

分析主要依赖数值方法, 已有学者采用不同的数值方法对裂纹问题进行了研究^[1-4], 但这些方法在处理不连续问题时存在一定的局限性, 从而限制它们的应用。

收稿日期: 2010-09-26; 修改日期: 2010-11-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(50804014, 41072224, 41172244); 教育部新世纪优秀人才计划项目(NCET-08-0662); 河南省高等学校青年骨干教师计划项目(2009GGJS-037); 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2008A44005)

通讯作者: 茹忠亮(1977-), 男, 山西晋城人, 副教授, 博士, 从事结构工程计算研究(E-mail: ruzhongliang@hotmail.com)。

作者简介: 朱传锐(1986-), 男, 河南信阳人, 硕士生, 从事结构工程计算研究(E-mail: zcr241@163.com);

赵洪波(1972-), 男, 河北邯郸人, 教授, 博士, 从事结构工程计算研究(E-mail: hbzhao@hpu.edu.cn)。

扩展有限元法^[5]是基于单位分解思想,以有限元法为基本框架,在其位移模式中加入能够反映裂纹不连续性的附加函数,即跳跃函数和渐进位移场函数。其求解过程与有限元法相似,但网格与裂纹相互独立,裂纹扩展也无需更新重构网格,因此特别适合断裂分析。陈胜宏^[6]采用扩展有限元分析了小湾拱坝坝踵开裂问题,但对裂纹的开裂作了简化,没有考虑裂尖单元;Mose^[7]以扩展有限元为手段,模拟了混凝土材料任意粘结型裂纹的扩展路径;Sukumar^[8-9]把 XFEM 应用于二维平面准静态裂纹的扩展;随后又进一步研究,把它推广到三维裂纹起裂、扩展机理的数值模拟中,但是还不够成熟。

本文以扩展有限元法理论为基础,引入水平集法描述、追踪裂纹,模拟裂纹的扩展路径。针对水平集判别倾斜裂纹单元类型的不足,提出了虚设裂纹法的解决方案,为方便、准确模拟裂纹的扩展奠定了基础。最后,通过典型算例模拟了裂纹的扩展路径。

1 扩展有限元

扩展有限元位移模式是在常规有限元的基础上,加入反映位移不连续性的附加函数:

$$u(x) = \sum_{i \in N} N_i(x)u_i + \sum_{j \in N^{dis}} N_j H(x)a_j + \sum_{k \in N^{asy}} N_k \sum_{\alpha=1}^4 \phi_{\alpha}(x)b_k^{\alpha} \quad (1)$$

式中: i 是所有结点的集合; j 是被裂纹完全贯穿单元的结点集合(图 1 中 ‘□’ 表示); k 为含有裂尖单元的结点集合(图 1 中 ‘○’ 表示); N_i 、 N_j 、 N_k 分别是相应结点的形函数; u_i 、 a_j 、 b_k^{α} 分别为相应结点的位移。被裂纹贯穿的单元及含有裂尖的单元由于其结点被附加以新的自由度,统称为加强单元。

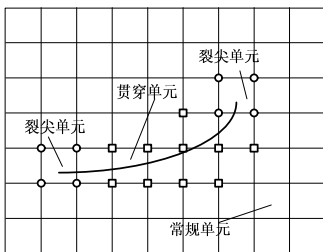


图 1 附加函数的加强结点

Fig.1 Enrich nodes of addition function

$H(x)$ 为跳跃函数,反映裂纹面位移的不连续性:

$$H(x) = \begin{cases} +1, & \text{裂纹上方} \\ -1, & \text{裂纹下方} \end{cases} \quad (2)$$

$\phi_{\alpha}(x)$ 是裂尖渐近位移场函数,反映裂尖应力的奇异性:

$$\phi_{\alpha}(x) = \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (3)$$

其中, r 、 θ 为以裂纹尖端为坐标原点的极坐标系。

2 水平集法

2.1 裂纹水平集法

水平集^[10-11]对裂纹的描述,一般通过裂纹面水平集函数 ψ 和波前水平集函数 ϕ 确定裂纹位置,二者相互正交。

考虑二维空间中的单一裂纹(如图 2 所示), Γ_c 表示裂纹表面, $(x_i)_{1 \leq i \leq 2}$ 表示裂尖。裂纹面水平集定义为 $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \min_{x_c \in \Gamma_c} \|x - x_c\| = d(x, x^*), & (x - x^*) \cdot \hat{e} \geq 0 \\ \min_{x_c \in \Gamma_c} \|x - x_c\| = -d(x, x^*), & (x - x^*) \cdot \hat{e} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $d(\cdot, \cdot)$ 为 Euclidian 距离; x^* 为距裂纹表面 Γ_c 上一点 x 的最短距离; x_c 为 Γ_c 上的任意一点。

波前水平集函数定义为 $\phi_i(x, 0) = (x - x_i) \cdot \mathbf{t}'$, 式中 \mathbf{t}' 表示裂尖单位切向矢量, x_i 表示第 i 个裂尖。

综上所述,水平集对裂纹的描述包含裂纹面水平集和波前水平集。如图 2 所示,裂纹的水平集表示为: $\psi = 0$, $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$ 。

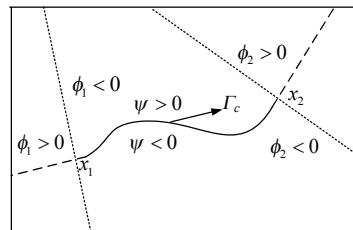


图 2 裂纹水平集

Fig.2 Crack described by level set method

2.2 加强单元判别准则

根据扩展有限元的基本思想,将单元划分为 3 种类型: 常规单元和加强单元(贯穿单元和裂尖单元)。本文将水平集法与扩展有限元法相结合,根据单元各结点的水平集值判别单元的类型,具体判别准则如下:

1) 裂纹完全贯穿单元: $\phi_{\max} < 0$, $\phi_{\min} < 0$ 且 $\psi_{\max} \psi_{\min} \leq 0$, 则该单元被裂纹完全贯穿,单元结点采用跳跃函数进行加强。

2) 裂尖单元: $\phi_{\max}\phi_{\min} < 0$, 且 $\psi_{\max}\psi_{\min} \leq 0$, 则裂尖位于该单元, 单元结点采用裂尖渐进位移函数进行加强。

3) 常规单元: $\psi_{\max}\psi_{\min} \geq 0$, 而不论 ϕ 值为多少, 单元都属于常规单元。

ψ_{\max} 、 ψ_{\min} 、 ϕ_{\max} 、 ϕ_{\min} 分别对应单元结点水平集(裂纹面水平集和波前水平集)的最大值和最小值。

如图 3 所示, 平板宽为 L , 高为 D , 在板的中间有长为 $2a$ 的裂纹, 板受均布拉应力 σ , 裂尖应力强度因子的解析解为^[12]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{L}} \quad (5)$$

该模型的几何及物理参数为 $\sigma = 1\text{MPa}$, $L = 0.2\text{m}$, $D = 0.6\text{m}$, $2a = 0.05\text{m}$, $\nu = 0.30$, $E = 210\text{GPa}$ 。由于该模型具有对称性, 左右两裂尖的应力强度因子相同, 本文取右裂尖进行分析。

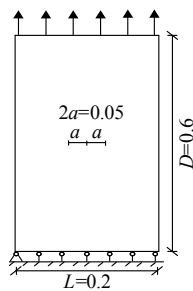


图 3 中间裂纹 /m
Fig.3 Central crack

图 4 为不同裂纹长度下的 K_I , 从中可以得到, 本文采用 XFEM 计算出的应力强度因子与精确解十分接近, 精度较高, 验证式(1)的有效性。

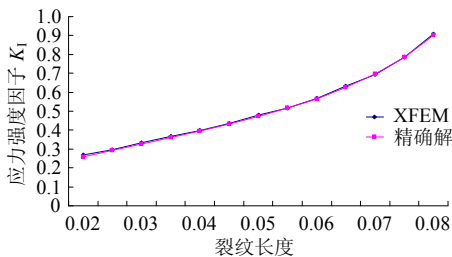


图 4 不同裂纹长度的 K_I
Fig.4 The K_I of various crack lengths

3 改进方案

前文 2.2 节加强单元判别准则, 对于水平裂纹的情况完全适用。但是, 通过大量实例发现, 对于倾斜裂纹, 有时出现加强单元判别错乱。

如图 5(a)所示为倾斜向上裂纹, 由图可看到:

裂尖处于由结点 3、结点 4、结点 5、结点 6 构成的单元, 这些结点由裂尖位移场函数加强。结点 1、结点 2、结点 3、结点 4 构成的单元为贯穿单元, 单元对应的结点应由跳跃函数加强, 结点 3、结点 4 同属于裂尖单元和贯穿单元, 由裂尖单元优先原则, 结点 3、结点 4 用裂尖位移场函数加强, 结点 1、结点 2 用跳跃函数加强。而图 5(a)中反映的结点 1、结点 2 用渐进位移场函数加强, 这里出现了单元识别错乱。

图 5(b)为倾斜向下裂纹, 从图 5(b)中看到, 构成裂尖单元的结点 3、结点 4、结点 5、结点 6 正确的运用渐进位移场函数加强; 结点 1、结点 2、结点 3、结点 4 构成的贯穿单元用跳跃函数加强, 同样根据裂尖单元优先的原则, 结点 3、结点 4 优先用裂尖位移场函数加强, 则结点 1、结点 2 用跳跃函数加强, 而从图 5(b)中可看到结点 2 采用渐进位移场函数加强, 出现了单元结点识别混乱。

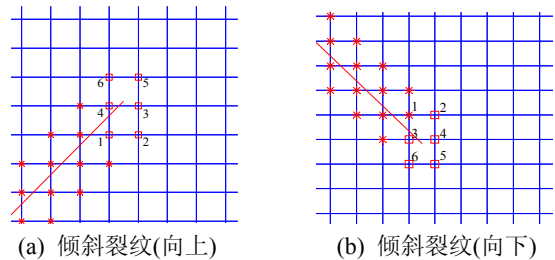


图 5 单元类型(改进前)
Fig.5 Element types (original)

由于裂纹每步扩展, 新扩展的裂纹与原裂纹存在开裂角, 使扩展后的裂纹不保持水平而变为倾斜裂纹, 倾斜裂纹的加强单元识别问题不能解决, 将直接影响应力强度因子的计算精度, 进而影响裂纹扩展的研究。通过对问题分析找到了原因: 裂纹倾斜的存在, 同时裂纹面水平集函数和波前水平集函数具有相互正交的特性, 波前水平集函数不仅贯穿裂尖单元, 而且可能经过贯穿单元; 相比较水平裂纹, 波前水平集函数仅通过裂尖单元, 不会经过贯穿单元。而 2.2 节的判别准则对波前水平集函数存在默认的规则, 即波前水平集仅通过裂尖单元, 与贯穿单元无关。

若采用 2.2 节的判别准则, 需要对波前水平集函数进行限制, 为此本文提出了解决方案: 通过虚置裂纹, 该裂纹通过裂尖并且保持水平, 图 6 为具体的改进方案。由于添加了虚置裂纹, 需要 4 个水平集来描述裂纹, ψ' 和 ϕ' 分别表示虚置裂纹的裂

纹面和波前水平集, ψ 和 ϕ 代表真实裂纹的裂纹面和波前水平集; 此时利用真实裂纹水平集值判断贯穿单元, 利用虚置裂纹水平集值判别裂尖单元, 虚置裂纹的水平集函数值不参与后续的计算。

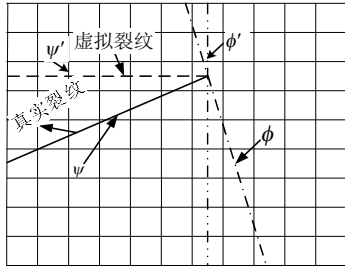
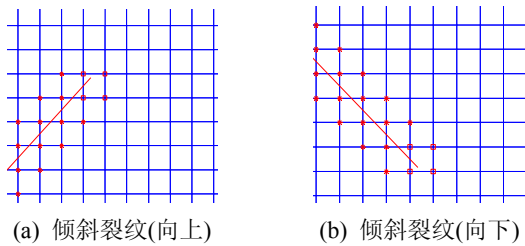


图 6 改进后的计算模型

Fig.6 The model of improvement

图 7 是根据提出的解决方案, 对图 5 问题重新计算的结果。从图 7 中可以看出, 改进方案对加强单元的判别完全准确, 很好的解决了倾斜裂纹加强单元判别错乱的问题。说明了改进方案的准确性和可行性, 同时也为后续模拟裂纹扩展工作奠定了基础。



(a) 倾斜裂纹(向上) (b) 倾斜裂纹(向下)

图 7 单元类型(改进后)

Fig.7 Element types (improved)

4 算例分析

4.1 偏三点弯曲

图 8 为偏三点弯曲模型, 梁长 $L=2m$, 高 $D=0.5m$, 梁下边界左右两结点受约束, 其中左结点 x 方向、 y 方向约束, 右结点仅 y 方向约束; 在距左边界 $b=0.8875m$ 处有一长度为 $0.23m$ 的裂纹, 梁上边界中心处作用集中力 $P=100kPa$, 弹性模量为 $210GPa$, 泊松比等于 0.305 。

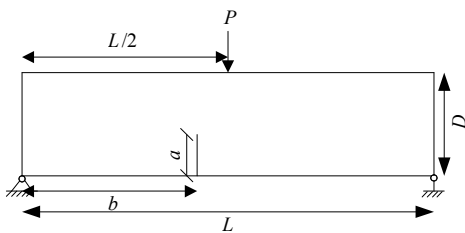


图 8 偏三点弯曲梁

Fig.8 Three point bending beam

模型采用 81×20 的网格划分, 开裂步长等于 $0.02m$, 开裂步数取 7。表 1 是裂纹扩展过程中裂尖的位置坐标。图 9 为对应裂纹的扩展路径图, 从图 9 中可看到裂纹逐渐向加载点靠近, 这与偏心荷载作用下裂纹扩展规律相符合。图 10 为裂纹开裂后单元类型判别结果示意图, 由该图可以看到, 裂纹开裂后, 单元类型识别完全正确, 也表明了改进方案的准确性和可行性。

表 1 裂尖位置坐标

Table 1 The coordinate of crack tip

步数	裂尖(x 轴)	裂尖(y 轴)
初始	2.0900	5.1000
1	2.2897	5.1103
2	2.4886	5.1312
3	2.6796	5.1906
4	2.8796	5.1885
5	3.0767	5.2227
6	3.2764	5.2719
7	3.4726	5.2719

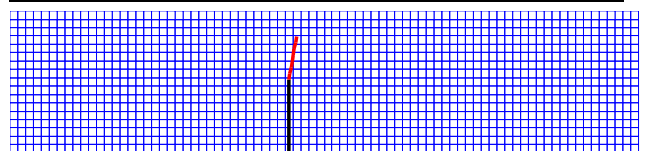


图 9 三点弯曲梁扩展路径

Fig.9 The crack propagation of three point bending beam

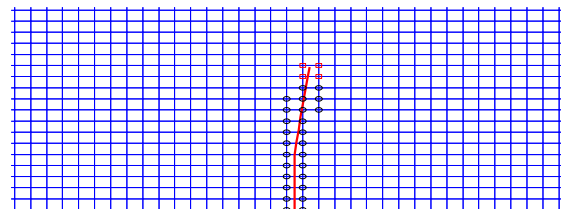


图 10 单元判别示意图

Fig.10 The results of element types

4.2 悬臂梁

该算例选取文献[13]中悬臂梁模型, 如图 11 所示, $h=1.2m$, $D=6m$, 弹性模量为 $210GPa$, 泊松比等于 0.305 , 梁左边界中心位置有一裂纹长度 $a=3m$; 左边界上、下两结点受集中力 $P=10MPa$, 为满足复合型裂纹, 给定初始开裂角 θ (逆时针)。

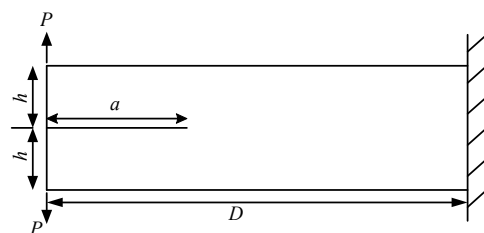


图 11 悬臂梁模型

Fig.11 Cantilever beam

模型采用 74×32 的有限元网格, 初始开裂角 θ 分别取 0° 、 1.43° 、 2.68° 、 4.35° 、 5.71° 。图 12 为开裂步长等于 0.2, 裂纹扩展 7 步对应不同初始角的扩展路径。从图 12 中可得到: 初始角等于 0° , 扩展路径符合纯 I 型裂纹沿原方向扩展的特性; 随着初始角的增大, 裂纹扩展曲线逐渐向上翘曲, 本文的计算结果与文献[13]的成果十分吻合。

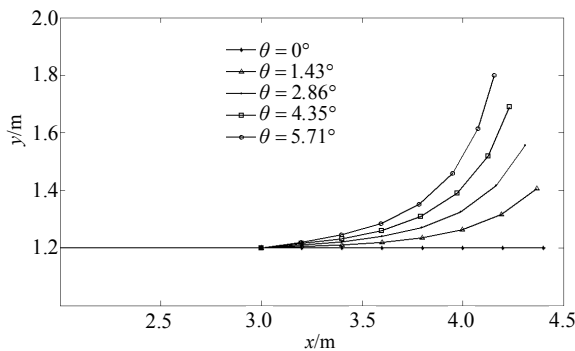


图 12 不同初始角裂纹扩展路径

Fig.12 The propagation path of different initial angles

图 13 为裂纹开裂后单元类型判别结果示意图, 由该图可看出扩展 7 步后, 加强单元的识别仍然正确, 验证了本文提出方案的准确性。

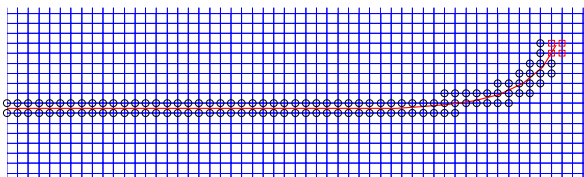


图 13 单元判别示意图

Fig.13 The results of element types

5 结论

扩展有限元作为处理不连续问题最有效的数值方法, 本文将扩展有限元法与水平集法相结合, 模拟裂纹的扩展问题。针对水平集法在判别单元类型的不足, 分析了问题的原因, 并给出了解决方案。最后模拟了三点弯曲梁和悬臂梁的裂纹扩展, 得到以下结论:

(1) 本文提出虚置裂纹的方案能够较好的解决应用判别准则对倾斜裂纹进行单元类型识别的不足, 通过算例也表明提出方案的可行性和准确性。

(2) 模拟三点弯曲梁和悬臂梁裂纹的扩展路径与已有成果十分接近, 表明本文采用扩展有限元和水平集结合方法的可行性和精确性。

(3) 将扩展有限元与水平集法结合模拟裂纹扩展时不需网格重构, 裂纹与网格相互独立的特点,

非常适合分析裂纹扩展问题。

参考文献:

- [1] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405—410.
Wang Shuilin, Ge Xiurun. Application of manifold method in simulating crack propagation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997, 16(5): 405—410. (in Chinese)
- [2] 李卧东, 王元汉, 陈晓波. 无网格法在断裂力学中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(4): 462—466.
Li Wodong, Wang Yuanhan, Chen Xiaobo. Application of meshless method in fracture mechanics [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(4): 462—466. (in Chinese)
- [3] 彭自强, 李小凯, 葛修润. 广义有限元法对动态裂纹扩展的数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(18): 3132—3137.
Peng Ziqiang, Li Xiaokai, Ge Xiurun. Numerical simulation of dynamic crack propagation with generalized finite element method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(18): 3132—3137. (in Chinese)
- [4] 肖洪天, 岳中琦. 用边界元方法分析复合材料中的裂纹问题[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 721—724.
Xiao Hongtian, Yue Zhongqi. Boundary element analysis of 3D crack problems in layered materials [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(6): 721—724. (in Chinese)
- [5] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1999, 45(5): 601—620.
- [6] 陈胜宏, 汪卫明, 徐明毅, 程丽. 小湾高拱坝坝踵开裂的有限单元法分析[J]. 水利学报, 2003(1): 66—67.
Chen Shenghong, Wang Weiming, Xu Mingyi, Cheng Li. Finite element analysis of crack propagation in high arch dam heel of Xiaowan project [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003(1): 66—67. (in Chinese)
- [7] Mose N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69(7): 813—833.
- [8] Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T. Extended finite element method for three dimensional crack modeling [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(11): 1549—1570.
- [9] Sukumar N, Prevost J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(26): 7513—7537.

(参考文献[10]—[13]转第 23 页)

间中不同波数处拟涡能的 PDF 分布形状有着较好的一致性。当运动尺度逐渐接近 Kolmogorov 尺度时, PDF 分布的形状逐渐发生变化, PDF 的峰值向低拟涡能处移动且峰值有所增大, 高拟涡能区域的 PDF 值有所降低。PDF 分布的特征不仅体现了湍流场中能量从大尺度到小尺度的级串过程, 而且显示了耗散过程中能量的转化。

参考文献:

- [1] Comte-Bellot G, Corrsin S. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, 48(2): 273—337.
- [2] Kang H S, Chester S, Meneveau C. Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 480: 129—160.
- [3] She Z S, Jackson E, Orszag S A. Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations [J]. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1991, 434(1980): 101—124.
- [4] Zang T A, Dahlburg R B, Dahlburg J P. Direct and large-eddy simulations of three-dimensional compressible Navier-Stokes turbulence [J]. *Physics of Fluids*, 1992, 4(1): 127—140.
- [5] Stolz S, Adams N A. An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation [J]. *Physics of Fluids*, 1999, 11(7): 1699—1701.
- [6] Zhang S, Rutland C J. Premixed flame effects on turbulence and pressure-related terms [J]. *Combustion and Flame*, 1995, 102(4): 447—461.
- [7] Thévenin D. Three-dimensional direct numerical simulations and structure of expanding turbulent methane flames [J]. *Proceedings of the Combustion Institute*, 2005, 30(1): 629—637.
- [8] Morinishi Y, Lund T S, Vasilyev O V, Moin P. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 143(1): 90—124.
- [9] Gottlieb S, Shu C W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes [J]. *Mathematics of Computation*, 1998, 67(221): 73—85.
- [10] Rai M M, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, 96(1): 15—53.
- [11] Rogallo R S. Numerical experiments in homogeneous turbulence [R]. Moffett Field, CA: NASA Technical Memorandum, TM-81315, 1981.
- [12] Mansour N N, Wray A A. Decay of isotropic turbulence at low Reynolds number [J]. *Physics of Fluids*, 1994, 6(2): 808—814.
- [13] Veeravalli S V. An experimental study of the effects of rapid rotation on turbulence [C]// Center for Turbulence Research. Annual Research Briefs. Stanford, CA: Stanford University, 1989: 51—57.
- [14] Tavoularis S, Bennett J C, Corrsin S. Velocity-derivative skewness in small Reynolds number, nearly isotropic turbulence [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, 88(1): 63—69.

(上接第 16 页)

- [10] Stolarska M, Chopp D L, Mose N. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(8): 943—960.
- [11] Ventura G, Xu J X, Belytschko T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG [J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 2002, 54(6): 923—944.
- [12] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [13] Chinese Aeronautical Establishment. Handbook of stress intensity factor [M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese)
- [13] Huang R, Sukumar N, Prevost J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 7539—7552.