

# 曲面变形的水平集方法

潘青<sup>1)</sup>, 徐国良<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (湖南师范大学 数学与计算机科学学院 湖南长沙 410081)

<sup>2)</sup> (LSEC, 中国科学院数学与系统科学研究院 计算数学与科学工程计算研究所 北京 100080)

**摘要** 本文中我们提出一种曲面变形的新方法. 首先引入一个一阶能量范函, 然后通过对其极小化诱导出一个水平集形式的二阶几何偏微分方程, 从而将曲面变形过程转化为一个三维体上隐式模型的演化过程. 模型演化产生的系列变形曲面被描述成一个密集取样的三维体上的水平集函数的演化. 实验结果显示大尺度的形变以及拓扑结构的自动改变均能理想地实现. 我们采用 $C^2$ 光滑的B样条作为水平集函数, 从而获得了高质量的曲面. 同时, 我们的方法还有另外一些优点, 比如用户输入简单, 数学模型灵活以及数值算法稳健.

**关键词** 曲面变形; 水平集方法; 距离函数; 几何偏微分方程.

中图法分类号 65D17

## Metamorphosis Based on the Level-Set Methods

Qing Pan<sup>1)</sup>, Guoliang Xu<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (Hunan Normal University, College of Mathematics and Computer Science, Hunan Changsha, 410081)

<sup>2)</sup> (LSEC, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences,  
Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Beijing, 100080)

**Abstract** We present a new approach for metamorphosis. We introduce a first-order energy functional, then minimize it to derive a second-order geometric partial differential equation (GPDE) in the level-set formulation. The surface deformation process is encoded as an evolution process of an implicit model in a 3-dimensional volume. The sequence of deformed surfaces generated from the model evolution is represented as a level-set function on the 3-dimensional densely sampled volume. The experiment result shows that the big shape change and the change of topology can be desirably achieved. We use  $C^2$  smooth B-spline function as the level-set function, which is reasonable and improves the quality of surface. At the same time, our algorithm has some other advantages, such as the simplicity of user input, the flexibility of mathematical model, and the robustness of numerical algorithm.

**Key words** Metamorphosis; Level-set method; Distance function; Geometric partial differential equation.

## 1. 引言

曲面变形 (metamorphosis/morphing) 也称为 曲面的形状融合 (shape blending)、形状平均

(shape averaging)、形状插值(shape interpolation)或形状演化(shape evolving). 一般是指在给定的两张曲面 $s_A$ 和 $s_B$ 之间插入一系列曲面, 以产生从 $s_A$ 到 $s_B$ 的连续过渡. 为叙述方便, 我们将 $s_A$ 称为源(source)曲面,  $s_B$ 称为靶(target)曲面. 这项技术常应用于计算机动画, 以减轻美工师的手工劳动; 也应用于产品造型设计, 可把不同造型特征相互交融, 以产生新的系列造型. 此外, 它还可用于计算机绘图、计算机美术和计算机视觉等领域.

曲面变形的可大致分为两类, 一类是基于曲面的显式表达, 另一类是基于曲面的隐式表达(level set). 对于基于曲面的显式表达的方法, 曲面变形往往转化为多面体的变形来实现. 这是因为曲面可用离散的空间四边形网格或三角形网格来逼近. 如果曲面已经表示为NURBS形式, 那么还可以更简单地把源曲面和靶曲面的控制网格进行变形来产生中间过渡网格, 进而得到中间曲面. 多面体变形通常被分解为两个关键问题([1]), 一个是确定源曲面和靶曲面的网格中每个顶点的相互对应关系, 简称为顶点对应问题(vertex correspondence problem); 二是建立一套变形算法, 对首末对应顶点作变形, 产生一个中间点, 进而得到中间网格, 简称为顶点路径问题(ver-

tex path problem). 这两个问题相互关联, 因为不同的顶点对应将导致不同的顶点路径. 目前已经有大量的解决上述两个问题的方法([2]). 在顶点对应方面, 有基于能量的方法、调和映照法、特征点法等等; 在顶点路径方面, 为防止中间曲面的扭曲与萎缩, 应当对首末两空间网格提取出与坐标系无关的几何内在量来进行变形, 再由变形所得的中间曲面的几何内在量重建出中间曲面. 上述多面体变形方法的最大弊端是建立顶点的对应关系非常困难, 特别是当两个曲面的拓扑结构相差比较悬殊时更是如此([3, 4]). 在顶点路径建立的问题上, 如何避免出现不同路径相互交织在一起也是一个颇为棘手的问题. 然而, 使用基于曲面的水平集表达的方法能够很好地克服上述两方面的困难([5]).

水平集方法(level set method)是二十世纪八十年代末由 Osher 和 Sethian([6])引入用以解决界面的运动问题, 因其具有拓扑结构自动识别([7])和易于实现等优点而迅速应用于各个领域. 水平集方法的主要思想是将移动的界面作为零水平集嵌入到高维的水平集函数中, 这样, 由闭超曲面的演化方程可以得到水平集函数的演化方程, 而嵌入的闭超曲面总是其零水平集, 最终只要确定零水平集即可

确定移动界面演化的结果. 水平集方法自提出以来, 已在界面演化、流体力学、燃烧、材料力学、图像处理、计算机视觉等领域得到了广泛的应用([8, 9]). 同时, Whitaker ([10])、Zhao([11, 12, 13])等人也提出将水平集方法应用到曲面重构中, 并取得了较好的结果. 水平集方法最大的优点是由于其表示形式是隐式的, 所以特别适用于拓扑结构复杂的曲面处理问题. 水平集方法也被用于曲面磨光和曲面修复技术 ([7, 11, 14, 15, 16, 17, 18]). 该方法将曲面表达成三维函数的等曲面(水平曲面), 水平曲面通常被定义为在某个体积笛卡儿网格上的符号距离, 在该体积上偏微分方程的演化控制着水平曲面的运动行为. 目前, 关于水平集方法的研究工作已经取得了非常丰富的成果. 水平集方法能轻松地实现拓扑结构的自动识别, 这也是参数化方法所无法比拟的. 水平集方法的最大缺点是刻画细节的能力有限, 但是近年来所发展的一些新技术使得这一问题得以解决, 比如使用自适应的四面体网格([19])、T-网格以及高阶数据([20]).

在曲面变形过程中, 拓扑结构大多会发生改变. 用参数曲面来追踪拓扑结构的改变是相当麻烦的, 同时, 对于亏格改变的问题, 也是困难和繁琐的, 要求大量的人工干

预, 并且会发生曲面自结现象. 但若使用隐式表达的曲面, 这些问题都能轻而易举地得到解决. 在水平集方法中, 把源曲面和靶曲面分别表示为两个三元函数的水平集, 曲面变形问题就转化为这两个三元函数的插值问题, 因而不存在建立顶点的对应问题和构造路径问题. 显然, 任何一种连续的两个函数之间的插值方法均可用于构造连续过渡的中间曲面([21]), 但是一个简单的线性插值往往不能产生令人满意的结果. 我们仅要求给定源曲面和靶曲面, 通过一个一阶能量泛函诱导出其对应的水平集形式的二阶几何偏微分方程, 驱动源曲面在该方程模型的控制下动态地进行变形, 同时对其进行跟踪来抓扑过渡曲面, 最终获得指定的靶曲面.

## 2. 算法概要

我们将曲面(二维流形)的变形问题转化为一个定义在三维体上的水平集函数的演化问题. 变形曲面从源曲面开始, 在几何偏微分方程的控制下连续运动无限逼近最终曲面(指定的靶曲面), 实现这一曲面变形过程的步骤如下:

- (1). 在同一个足够大的三维体中, 将源曲面通过仿射变换与靶曲面尽可能地对齐, 变换后

的源曲面作为曲面变形过程的初始曲面.

(2). 将该初始曲面的符号距离函数作为演化变形过程的初始水平集函数, 然后在几何偏微分方程的驱动下发生演化变形.

(3). 在演化变形的过程当中, 为了防止过渡曲面偏离正确的变形路径而发生异变, 需要及时地将其纠正到正确的变形路径上来, 同时提取出演化过程中的水平曲面, 由此来产生过渡曲面序列.

下面就一些细节进行阐述.

## 2.1 源曲面与靶曲面的对齐

在着手进行变形之前, 应通过平移、旋转以及缩放变换以使得源曲面和靶曲面尽可能地对齐(alignment), 虽然不能达到完全重叠, 但是却能为后续产生的过渡曲面序列提供一个较好的初始曲面. 对齐([22, 23])是曲面变形非常关键的一步, 它关系到曲面变形的成败, 也是困难的一步. 关于什么是对齐, 可以有多种定义, 比如说两个曲面所围成的区域的交的体积最大, 或者对齐两物体的中心和主轴(定义为物体协变矩阵的特征向量). 我们采用两个仿射变换(包括旋转、平移和缩放)来完成源曲面与靶曲面的对齐.

首先对源曲面 $s_A$ 和靶曲面 $s_B$ 所围成的封闭区域 $\Omega_A$ 和 $\Omega_B$ 计算其各自的体心, 我们统一写

成 $\bar{C}$ . 将该封闭区域置于一个均匀剖分的长方体中, 然后确定体上每个网格点是否在封闭区域的内部或外部, 那么其体心为

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{C \in I} C,$$

其中,  $I$ 为封闭区域内部点坐标的集合,  $n$ 为其内部点的个数. 那么对于每个封闭区域可得到其对应的协变矩阵, 我们统一写成 $M$ ,

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix},$$

其中

$$M_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{C_i, C_j \in \Omega} (C_i - \bar{C}_i) \times (C_j - \bar{C}_j), \quad i, j \in \{x, y, z\},$$

很明显, 矩阵 $M$ 是实对称矩阵, 可用Jacobi方法计算该矩阵的全部特征值 $e_1, e_2, e_3$ 以及其对应的特征向量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . 那么旋转矩阵定义为

$$R = (e_1^T, e_2^T, e_3^T), \quad (1)$$

其逆矩阵

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}. \quad (2)$$

缩放矩阵 $s$ 是将封闭区域 $\Omega_A$ 缩放到与封闭区域 $\Omega_B$ 较接近的尺寸, 定义为

$$s = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中

$$s_x = \sqrt{\lambda_1^B / \lambda_1^A}, \quad s_y = \sqrt{\lambda_2^B / \lambda_2^A}, \quad s_z = \sqrt{\lambda_3^B / \lambda_3^A},$$

$\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A$  和  $\lambda_1^B, \lambda_2^B, \lambda_3^B$  分别为封闭区域  $\Omega_A$  和  $\Omega_B$  所产生的旋转矩阵的特征值  $e_1, e_2, e_3$  所对应的特征向量. 这样, 对于源曲面  $S_A$  上的某点  $v$ , 我们就可按照下面的格式

$$v' = (v - \bar{C}^A) R^A S (R^B)^{-1} + \bar{C}^B, \quad (4)$$

得到其与靶曲面  $S_B$  对齐后新的位置  $v'$ .

## 2.2. 符号距离的计算

经过仿射变换后的源曲面作为初始曲面, 然后将它与靶曲面共同放置于一个足够大的均匀剖分的三维体  $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \in \mathbb{R}^3$  中 ( $b > a, d > c, f > e$ ). 将体  $\Omega$  均匀剖分, 其体网格点集合  $\{V_{i,j,k}\}$  为

$$\{V_{i,j,k}\} := \{x_i\}_{i=1}^L \times \{y_j\}_{j=1}^M \times \{z_k\}_{k=1}^N,$$

其中  $x_i = a + i\Delta x, \quad y_j = c + j\Delta y, \quad z_k = e + k\Delta z,$

$$\Delta x = (b-a)/L, \quad \Delta y = (d-c)/M, \quad \Delta z = (f-e)/N.$$

我们假定初始曲面 (仿射变换后的源曲面) 和靶曲面分别为两个三角形网格. 首先计算体网格点与曲面网格之间的欧氏距离.

用  $M_\Delta = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$  表示曲面  $M$  的三角形片集合,

对于空间中的任意一点  $X \in \mathbb{R}^3$ , 定义

$$d_\Delta(X) = \text{dist}(X, M_\Delta) = \min_{1 \leq i \leq m} \text{dist}(X, \Delta_i),$$

其中  $\text{dist}(X, \Delta)$  表示点  $X$  到三角形片  $\Delta$  的欧氏距离. 用  $M_v = \{v_i\}_{i=1}^n$  表示曲面  $M$  的三角形片顶点

的集合, 定义

$$d_v(X) = \text{dist}(X, M_v) = \min_{1 \leq i \leq n} \text{dist}(X, v_i),$$

其中  $\text{dist}(X, v)$  示点  $X$  与点  $v$  之间的欧氏距离. 则

$$d(X) = \text{dist}(X, M) = \min(d_v(X), d_\Delta(X)),$$

即点  $X$  到曲面  $M$  的距离取其与曲面的三角形片及其三角形片顶点的欧氏距离中的最小值.

对该欧氏距离还需指定其相应的正负号, 算法如下:

(1). 扰动曲面三角形网格的顶点, 使得 (i) 所有面的法向量的  $x$ -分量不为零; (ii) 三角网格所有边在  $yz$ -平面上的投影不通过该平面上的任何一个体网格点.

(2).  $yz$  面上的网格点  $q \in \{q\}_{j,k=1}^{M,N} := \{y_j\}_{j=1}^M \times \{z_k\}_{k=1}^N$  可联络一套数据, 称为  $q$ -集. 这个  $q$ -集开始是个空集. 将  $\Delta x$  记为曲面上的三角形片  $\Delta$  在  $yz$  平面上的投影. 对于每一个网格点  $q \in \Delta_x$ , 计算线段  $[x, q] \in \mathbb{R}^3, \quad x \in [a, b]$  与三角形  $\Delta$  的交点, 将该交点的  $x$  分量放到  $q$ -集中.

(3). 通过上述两步骤, 我们对  $yz$  平面的每个网格点产生了其对应的  $q$ -集, 将该  $q$ -集中的数据按从小到大的顺序排列, 记为

$t_1 < t_2 < \dots < t_k$ . 那么, 如果网格点  $[a + j\Delta x]$  在区域  $[t_i, t_{i+1}]$  内, 则该网格点到曲面网格的距离符号就为  $(-1)^i$ , 其中  $t_0 = a, t_{k+1} = b$ .

注: 第一步所做的扰动是微小的, 不会影

响到距离函数符号的正确判定, 其作用主要是保证线段  $[x, q] \in \mathbb{R}^3$ ,  $x \in [a, b]$  与三角形  $\Delta$  的交点是唯一的, 避免在  $q$ -集中产生重复的数据.

我们在同一个三维体  $\Omega$  上分别对初始曲面(仿射变换后的源曲面)和靶曲面计算其符号距离, 记为  $d_A(X)$  和  $d_B(X)$ . 下面介绍驱动曲面变形的几何偏微分方程模型.

### 2.3 运动界面的控制方程

如上所述, 我们将源曲面到靶曲面的变形过程转化为一个三维体上隐式模型的演化. 用隐式函数(水平集函数)来表示变形

$$M(t) = \{X(t) \in \mathbb{R}^3 : \phi(X, t) = 0\},$$

其中  $\phi$  为该三维体上的水平集函数. 不失一般性, 我们将水平集函数取为符号距离函数

$$\phi(X, t) = \begin{cases} -d(X, t) = -\text{dist}(X, \Omega(t)), & X \in \Omega(t), \\ 0, & X \in M(t), \\ d(X, t) = \text{dist}(X, \bar{\Omega}(t)), & X \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\Omega(t)$  为变形曲面  $M(t)$  所围成的封闭区域.

符号距离函数  $\phi(X)$  具有重要性质:

$$|\nabla \phi(X)| = 1.$$

我们所采用的能量模型定义为

$$E(M) = \lambda(X) \int_M d_B^2(X) dA + [1 - \lambda(X)] \int_M d_A^2(X) dA, \quad (6)$$

其中  $\lambda(X) = e^{-d_B^2(X)}$ . 组合系数  $\lambda(X)$  和  $1 - \lambda(X)$  的作用为: 当水平集曲面远离靶曲面时, 我们极小化能量范函  $\int_M d_A^2(X) dA$ , 而当水平集曲面接近靶曲面时, 我们极小化能量范函  $\int_M d_B^2(X) dA$ . 理论上

来讲, 当使得该能量达到极小时的曲面就是指定的靶曲面. 需要指出的是, 该模型中的第一项是靶曲面的距离函数的平方, 目的是为了计算其Euler-Lagrange方程的方便, 此外, 距离函数是连续函数, 但不是可微函数, 而平方距离函数是连续可微函数. 模型中我们所增加的第二项还可以起到光滑变形曲面的作用, 避免在演化的过程当中出现噪音. 此处, 我们提出, 该项是一个灵活项, 可根据实际问题的需要修改甚至改变, 体现了本方法的灵活性.

极小化能量范函(6), 可以导出其水平集形式的几何偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = (\lambda(X) d_B^2 + [1 - \lambda(X)]) \text{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) |\nabla \phi| + 2\lambda(X) \nabla(d_B^2)^T \nabla \phi, \\ M(0) = \{X \in \mathbb{R}^3 : \phi(X, 0) = 0\}, \end{cases} \quad (7)$$

分别记

$$L(\phi) = (\lambda(X) d_B^2 + [1 - \lambda(X)]) \text{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) |\nabla \phi|,$$

$$H(\nabla \phi) = 2\lambda(X) \nabla(d_B^2)^T \nabla \phi.$$

### 2.4 演化和纠正

我们虽然通过前面叙述的对齐算法, 使得源曲面和靶曲面尽可能地重叠, 但是当源曲面和靶曲面之间的差别在细节部分比较大时, 源曲面的演化很有可能偏离正确的变形路径, 发生异变, 导致最终得不到指定的靶曲面, 所以需要在演化过程当中对过渡曲面进行一定的纠正.

我们采用两次线性插值的算法来进行纠

正. 记在时刻  $t_0, \dots, t_i, \dots, t_n$  所对应的水平集函数依次为  $\phi_0(X, t_0), \dots, \phi_i(X, t_i), \dots, \phi_n(X, t_n)$ , 那么在每个时间段  $(t_i, t_{i+1}]$  我们改写方程模型 (7) 为

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = L(\phi_i) + H(\nabla \phi_i), \\ \phi_i(X, t_i) = \phi_i^0(X), \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1, \quad (8)$$

其中  $\phi_i^0(X) = \phi_A(X)$  (当  $t_i = 0$  时);  $\phi_i^0(X) = (1 - \lambda(t))\phi_i(X, t_i) + \lambda(t)[(1 - \lambda(t))\phi_A(X) + \lambda(t)\phi_B(t)]$ , ( $\lambda(t) \in (0, 1)$ , 当  $t_i \neq 0$  时).  $\phi_A(X)$  和  $\phi_B(X)$  分别为初始曲面和靶曲面在体  $\Omega$  上的符号距离函数  $d_A(X)$  和  $d_B(X)$ , 参数  $\lambda(t)$  随着时间  $t$  的增大而增大.

我们是在体  $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \in R^3$  上求解方程 (7). 经典的水平集方法通常使用  $C^0$  光滑的三线性水平集函数. 水平集函数的低光滑度经常会导致崎岖不平的水平集曲面. 当然, 增加网格剖分的密度可以提高曲面的质量, 但这会使运算量急剧攀升. 而且对于有噪声的数据, 即使增加网格的密度, 也未必会使曲面的质量提高. 其次, 从三线性水平集函数获得的二阶以上的导数均为零, 这使得曲面的高阶量 (比如曲率) 计算失准. 在大量实际曲面处理问题中, 要求曲面至少达到  $C^1$  光滑. 因此, 使用较光滑的水平集函数是非常理想的. 最后, 我们的方程模型是二阶几何偏微分方程 (如果修改能量泛函 (6) 可诱导出更高阶的几何偏微分方程), 其中曲率的计算是必不可少的. 因此

使用具有二阶以上光滑度的水平集函数是必要的. 我们知道,  $C^2$  光滑的最低次的样条函数是三次样条. 所以我们设计采用三一三次样条 (张量积形式) 函数作为逼近符号距离的水平集函数, 即

$$\begin{aligned} \phi(X, t) &= \phi(u, v, w, t) \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \beta_{i,3}(u) \beta_{j,3}(v) \beta_{k,3}(w) d_{i,j,k}(t), \quad u, v, w \in [0, 1], \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\beta_{i,3}(u)$ ,  $\beta_{j,3}(v)$ ,  $\beta_{k,3}(w)$  分别为体  $\Omega$  在  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -方向的三次 B 样条基函数,  $d_{i,j,k}$  为体网格点  $V_{i,j,k}$  上的符号距离. 在方程模型的数值求解问题上, 我们采用具有二阶精度的中心差分来计算 (7) 中第一项中的导数, 而对于第二项则采用迎风的差分离散格式.

## 2.5 符号距离的重新初始化

保持  $\phi(X, t)$  始终是体网格点到变形曲面的符号距离是非常重要的, 但往往经过几个时间步的演化后将不再是符号距离了, 需要通过重新初始化来保持它作为符号距离的性质:  $|\nabla \phi| = 1$ . 通常的方法是求解下面的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + S(\phi)(|\nabla \phi| - 1) = 0, \\ \phi(X, 0) = \phi_0, \end{cases} \quad (10)$$

我们提出求解下面 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + S(\phi)(\nabla \phi^T \nabla \phi - 1) = 0, \\ \phi(X, 0) = \phi_0, \end{cases} \quad (11)$$

的稳定解, 符号函数  $S(\phi)$  光滑化为

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + |\nabla \phi|^2 \Delta x^2}}. \quad (12)$$

对于(10)有许多离散方法. 我们采用(11)替代(10)的好处在于(11)的右端是 $\phi$ 的光滑函数, 同时也便于半隐式空间离散格式的应用. 对空间方向的离散, 我们采用Godunov方法([24]), 因为它是单调的迎风格式, 即

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{n+1} = & \phi_{i,j,k}^n - \Delta\tau S^+(\phi_{i,j,k})(\max[(a^+)^2, (b^-)^2] \\ & + \max[(c^+)^2, (d^-)^2] + \max[(e^+)^2, (f^-)^2] - 1) \\ & - \Delta\tau S^-(\phi_{i,j,k})(\max[(a^-)^2, (b^+)^2] + \max[(c^-)^2, (d^+)^2] \\ & + \max[(e^-)^2, (f^+)^2] - 1) \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $S^\pm(\phi_{i,j,k})$ 是(12)的逼近格式,

$p^+ = \max(p, 0)$ ,  $p^- = \min(p, 0)$ ,  $a, b, c, d, e, f$  定义为

$$\begin{aligned} a &= D_x^- \phi_{i,j,k}^n, \quad c = D_y^- \phi_{i,j,k}^n, \quad e = D_z^- \phi_{i,j,k}^n, \\ b &= D_x^+ \phi_{i,j,k}^n, \quad d = D_y^+ \phi_{i,j,k}^n, \quad f = D_z^+ \phi_{i,j,k}^n, \end{aligned}$$

其中 $D_x^\pm \phi_{i,j,k}^n$ ,  $D_y^\pm \phi_{i,j,k}^n$ ,  $D_z^\pm \phi_{i,j,k}^n$  依次表示体网格点 $V_{i,j,k}$ 在 $x$ -,  $y$ -,  $z$ -方向的单边差分, 采用了二阶本质无震荡(ENO)技术.

## 2.6 等值面的提取

将通过仿射变换后的源曲面的符号距离函数 $d_A(x)$ 作为初始的水平集函数 $\phi(x, 0)$ , 我们通过演化水平集函数 $\phi(x, t)$ , 获得了一族水平曲面, 其中 $t$ 参数化这族,  $x$ 参数化曲面, 因此很容易将某个时刻 $t$ 的等值面 $\phi(x, t)=0$ 提取出来.

高效地提取等值面的算法是一个非常活跃的研究领域, 已有很多软件. 此文中, 我们采用marching cube方法(25)来提取我们的

水平集函数的等值面. 在这里, 笔者非常感谢C. L. Bajaj 和 V. Siddavanahalli 向我们提供的免费软件.

## 3. 实验结果

图例(1)演示了一个实体物的变形过程. 该图中的(a)为源曲面, (f)为所获得的指定靶曲面, (b)-(e)为变形过程所产生的过渡曲面.

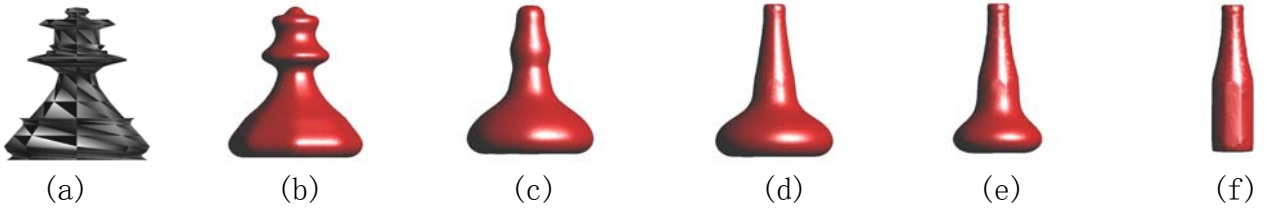
图例(2)演示一个亏格发生改变的例子, 由球演变成为一个'8'字型. 在此例中, 我们还将我们的方法与直接线性插值方法做了比较.

该图中: (a)为源曲面, (g)为指定的靶曲面, (b)-(f)为由我们的方法所产生的过渡曲面, (B)-(F)为在源曲面与靶曲面之间直接进行线性插值所得到的中间曲面. 从视觉效果上来看, 通过方程演化控制变形比直接插值要更加自然. 同时, 此例也充分说明了水平集方法能轻松地处理曲面变形中亏格发生改变的情况.

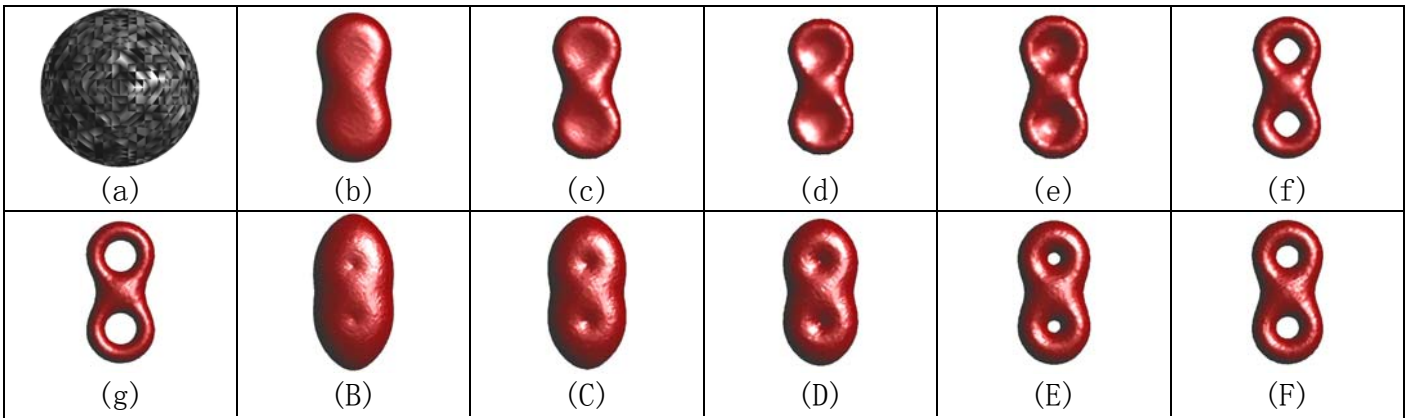
我们在图例(3)中演示了一个拓扑结构相差非常大的复杂例子, 由一头鲨鱼变形为一头奶牛. 该图中: (a)为源曲面, (h)为所获得的指定靶曲面, (b)-(g)为演化变形过程中所产生的过渡曲面. 此例也说明了我们所设计的方法能适用于很大范围的形状差异和拓扑结



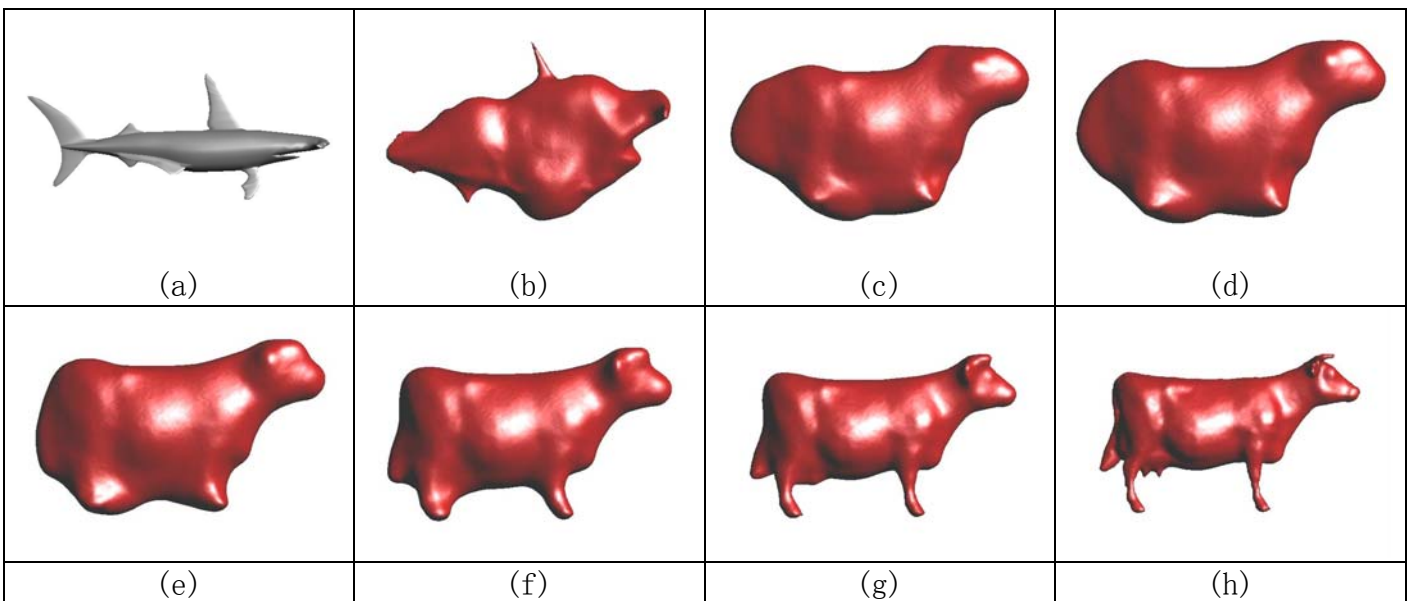
构改变的情况.



图(1): (a) 作为源曲面. (b)-(e)是演化变形过程所产生的过渡曲面. (f)为演化变形所获得的指定靶曲面.



图(2): (a) 是一个球, 作为源曲面. (g)是一个'8'字型, 为指定的靶曲面. (b)-(f)是演化变形所产生的过渡曲面. (B)-(F)为在源曲面(a)与靶曲面(g)之间线性插值所得到的中间结果.



图(3): (a)是一头鲨鱼, 为源曲面. (b)-(g)是演化变形所产生的过渡曲面. (h)是一头奶牛, 为演化变形所获得的指定靶曲面.

计算效率方面.

## 4. 结语和展望

针对曲面变形问题, 我们构造出一个一阶能量泛函, 其极小化诱导出一个二阶的水平集形式的几何偏微分方程, 使得源曲面在该方程模型的驱动下演化变形直至获得指定的靶曲面. 基于水平集表示的曲面变形方法的优点是不需要考虑曲面之间的对应问题以及路径问题, 可以自动实现拓扑结构的改变. 我们所设计的方法能适用于很大范围的形状差异和拓扑结构改变, 算法自动铺设了一条合理的曲面变形路径, 保证源曲面能变形成指定的靶曲面.

我们的方法在使用上是非常简单的, 输入要求是最少的, 只需要用户给定源曲面和靶曲面, 不需要在两者之间建立任何特定的联系或拓扑关系. 同时, 模型方程也具有灵活性, 用户可根据实际问题的需要在模型中添加一些能量项. 最后, 我们设计采用具有 $C^2$ 光滑的B样条函数作为水平集函数, 此设计非常合理, 也是基于提高曲面质量的考虑, 同时, 在方程模型的求解问题上, 我们采用了一些合理稳健的数值算法, 效果非常好. 需要提到的是, 我们的方法还有一些有待改进的地方, 比如说, 在

## 参 考 文 献

- [1] H. Yan and S. Hu and R. Martin. 3D morphing using strain field interpolation. *Journal of Computer Science and Technology* 2(1): 47-155, 2007.
- [2] M. Alexa. Recent advances in mesh morphing. *Computer Graphics Forum*, 17(3): 23-30, 2002.
- [3] V. Kraevoy and A. Sheker. Cross-parameterization and compatible remeshing of 3d models. *ACM Transactions on Graphics*, 23(3):861-869, 2004.
- [4] T. Lee, C. Yao, H. Chu, M. Tai, and C. Chen. Generating genus-n-to-m mesh morphing using spherical parameterization. *Journal of Visualization and Computer Animation*, 17(3-4): 33- 43, 2006.
- [5] F. Lazarus and A. Verroust. Three dimensional metamorphosis: survey. *The Visual Computer*, 14(8),1998.
- [6] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Comp. Phy.*,79(1): 12-49, 1988.
- [7] K.Museth, D. Breen, R.Whitaker, and A. Barr. Level set surface editing operators. In *Siggraph02*, pages 330-338, 2002.
- [8] S. Antonio. Level set and pde methods for computer graphics. *Notes for SIGGRAPH 2002 Course 10*. 2002.
- [9] S. Osher and R. Fedkiw. Level set methods: an overview and some recent results. *Journal of Comp. Phys.*, 169(2), 2001.
- [10] R. Whitaker. A level set approach to 3-d reconstruction from range data. *The International Journal of Computer Vision*, 29(3): 203-231, 1998.
- [11] H. Zhao, S. Osher, and R. Fedkiw. Fast surface reconstruction using the level set method. *CAM Report 01-01*, UCLA, Mathematics Department, 2001.
- [12] H. K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, M. Kang. Implicit and Nonparametric Shape Reconstruction from Unorganized Points Using Variational Level Set Method *Computer Vision and Image Understanding*, 80(3): 295-319, 2000.
- [13] H. K. Zhao, T. Chan, B. Merriaman, and S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion.

- J. Comp. Phys.,127:179-195, 1996.
- [14] C. Bajaj, Q. Wu, and G. Xu. Level-set Based Volumetric Anisotropic Diffusion for 3D Image Denoising. ICES Technical Report 03-10, University of Texas at Austin, 2003.
- [15] M. Bertalmio, L. T. Cheng, and S. Osher. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces. CAM Report 00-23, UCLA, Mathematics Department, 2000.
- [16] M. Bertalmio, G. Sapiro, L. T. Cheng, and S. Osher. A framework for solving surface partial differential equations for computer graphics applications. CAM Report 00-43, UCLA, Mathematics Department, 2000.
- [17] S. J. Osher and R. P. Fedkiw. Level set methods. CAM Report 00-07, UCLA, Mathematics Department, 2000.
- [18] R. Whitaker and D. Breen. Level set models for the deformation of solid objects. In Proceedings of the 3rd International Workshop on Implicit Surfaces. Euro graphics Association, pages 19-35, June 1998.
- [19] T. Preußner and M. Rumpf. An adaptive finite element method for large scale image processing. In Scale Space Theories in Computer Vision, pages 232- 234, 1999.
- [20] L. Kobbelt, M. Botsch, U. Schwanerke, and H. P. Seidel. Feature sensitive surface extraction from volume data. In Siggraph2001, pages 51-66, 2001.
- [21] B. Payne and A. Toga. Distance field manipulation of surface models. IEEE Computer Graphics and Applications,12 (1): 65-71, 1992.
- [22] H. Yang and B. Juttler 3D shape metamorphosis based on T-spline level sets. The Visual Computer, 23 (12):1015-1025, 2007.
- [23] D. Breen and R. Whitaker. A level-set approach for the metamorphosis of solid models. IEEE Transactions on Visualization and Computer graphics, 7(2):173-192, 2001.
- [24] S. Osher and C. W. Shu. High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton- Jacobi equations. SIAM J. Numer. Anal., 28(4):907-922, 1991.
- [25] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. In SIGGRAPH'87: Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, pages 163-169,1987.

## Background

In simplicity, morphing makes a smooth and continuous transition from the source object to the target object through producing a series of intermediate objects from the two objects. Morphing is a special technique in computer art, motion pictures and computer animation, etc., where it brings some magic and fantastic effects. With the rapid development of computer, morphing creates more and more natural and realistic vision effect.

There are many methods to realize the morphing effect. We represent an algorithm based on the Geometric Partial Differential Equations in the level-set formation, which has its own some advantages. At the same time, our algorithm represents its character, such as the simplicity of user input, the flexibility of mathematical

model, and the robustness of numerical algorithm.

This research is supported by the national natural science foundation of China (No. 60773165 and No. 10701071) and the national key basic research development plan of China (No. 2004CB318000).

Our group already achieved some research work in the area of using the geometric partial differential equations to solve several surface modeling problems, which was published in the international high-rank journal, such as the journal of Computer-aided geometric design, the journal of computer aided design. As for the geometric partial differential equations method, there are a lot of things worth researching not only in theory, but also in application. We will try our best to get more and better work.