基于波达选择法的语言型群决策方法

厦门大学自动化系　谭领城

摘要: 本文针对传统波达选择函数应用于群决策时存在对各决策者的排序方案打分时没有考虑到相邻方案之间的偏好程度这一问题,提出了改进的波达选择函数方法。并将其应用于语言型群决策。给出了基于改进的波达选择法的语言型群决策方法及其具体步骤，最后通过一个算例说明了方法的有效性。
关键词：群决策　语言偏好关系矩阵，语言评价集，波达选择函数

1 引言：

在许多实际的群决策过程中，由于被判断事物的模糊性和不确定性，决策者以语言形式的评价信息来反映自己的偏好是最为常见的情形，例如我们评价一个学生的成绩时通常用“优”,“良”“中”,“差”等语言信息来描述。因此，基于语言评价信息的群决策理论与方法的研究受到了广泛的关注[1-6]。目前解决语言型群决策问题主要有两种途径:一,首先把各个专家给出的决策矩阵用某种集结方法集结成群体决策矩阵，然后通过该群体决策矩阵得出方案排序结果[7-9]。二，首先根据各个专家给出的决策矩阵分别得出各个专家对方案的排序结果，然后将这些排序结果集结成专家群体的排序结果。波达选择函数方法[10]是对这些排序结果进行集结的常用方法（文献[10]还罗列了很多其他方法），其思想是首先根据每个专家的排序结果计算出方案在每个专家中的得分（打分方法是将 n-1 分，n-2 分，…，0 分依次赋给排在第 1 位，第 2 位，…第 n 位的方案），然后将这些得分集结成方案在专家群体中的总得分，最后根据这些总得分的大小得出方案的排序结果。 我们细想便会发现这种打分方法存在明显的缺陷就是在打分的过程中没有考虑到相邻方案之间的偏好程度，这样得出的群体排序结果就会与实际的排序结果有一些偏差。故而本文便提出了一种改进的波达选择函数方法，该方法在打分的过程中将相邻方案之间的偏好程度考虑进来，继而得出了一种更为合理的打分方法。

2 语言变量及其运算法则

在本文中引入语言评价集是为了描述已经排好序的相邻两个方案之间的偏好程度设 $L=\{l_i \mid i=-s,\dots,s\}$ 是一个语言短语集，其中 l_i为语言变量，$i=-s,\dots,s$ L 满足如下条件[11]:

（1） 若 $i \ge j$ 则 $l_i \ge l_j$

（2） 存在负算子 neg(l_i)=l_{-i}

例如 L 可取

$$L=\{l_{-4}=极差,l_{-3}=很差,l_{-2}=差,l_{-1}=稍差,\\ l_0=相同,l_1=稍好,l_2=好,l_3=很好,l_4=极好\}$$

在决策信息集成过程中，集成结果往往与语言评价集 L 中的元素不匹配，为了便与计算和避免丢失决策信息，我们可以在原有语言评价集 $L=\{l_i \mid i=-s,\dots,s\}$ 的基础上定义一个拓展语言短语集 $\overline{L}=\{l_i \mid i\in[-s,s]\}$ 且若 $l_i \in L$ 则称 l_i 为本语言变量，否则称 l_i 为拓

展语言变量或虚拟语言变量.

注：一般，决策者运用本语言变量评估决策方案，而拓展语言变量只出现在计算过程或排序过程中. 为了对语言变量进行运算，下面定义语言变量的一些运算法则：

设 $l_\alpha, l_\beta \in \overline{L}, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ 则

（1）$\lambda l_\alpha = l_{\lambda\alpha}$

（2）$l_\alpha \oplus l_\beta = l_{\alpha+\beta}$

（3）$\lambda(l_\alpha \oplus l_\beta) = \lambda l_\alpha \oplus \lambda l_\beta$

（4）$l_\alpha \oplus l_\beta = l_\beta \oplus l_\alpha$

（5）$(\lambda_1 + \lambda_2) l_\alpha = \lambda_1 l_\alpha + \lambda_2 l_\alpha$

（6） 极大化运算 若 $l_i \geq l_j$ 则 $\max\{l_\alpha, l_\beta\} = l_\alpha$

（7） 极小化运算 若 $l_i \leq l_j$ 则 $\min\{l_\alpha, l_\beta\} = l_\alpha$

定义 1：语言环境下的 LAA 算子

LAA：$L \to \bar{L}$

$$LAA(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots l_{\alpha_n}) = \frac{1}{n}(l_{\alpha_1} \oplus l_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus l_{\alpha_n}) = l_\alpha$$

其中 $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots l_{\alpha_n} \in L$， $l_\alpha \in \bar{L}$

则称 LAA 为 n 维语言算术平均算子.

定义 2：语言环境下的 LWAA 算子

LWAA：$L \to \bar{L}$

$$LWAA(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots, l_{\alpha_n}) = \omega_1 l_{\alpha_1} + \omega_2 l_{\alpha_2} + \ldots \omega_n l_{\alpha_n} = l_\alpha$$

其中 $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots l_{\alpha_n} \in L$， $l_\alpha \in \bar{L}$，$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ 为语言数据组 $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots l_{\alpha_n}$ 的加权向量，$\omega_i \in [0,1], i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

则称 LWAA 为 n 维语言加权平均算术算子.

下面再给出一个关于语言变量及其下标之间的函数定义

定义 3[12]**：**

设 $L = \{l_i \mid i = -s, \ldots, s\}$ 为有序语言短语集 $l_i \in L$ 为第 i 个语言变量，它所对应的下标 i 和序数 i 所对应的语言变量可分别由下面的函数 I 和 I^{-1} 得到：

（1）$I : L \to N$

$I(l_i) = i, l_i \in L$

（2）$I^{-1} : N \to L$

$I^{-1}(i) = l_i, i = 1, 2 \ldots s$

3 基于语言评价集的波达选择函数方法

3.1 波达选择函数方法

根据每个决策者对方案集 X 的优劣排序，把（n−1）分，(n−2）分至 0 分依次赋给排在第 1 位，第 2 位到第 n 位的方案，记 $x_j \in X$ 在决策者 e_k 中的得分函数为 $b_k(x_j)$（j=1, 2, . . . , n; k=1, 2, . . . , p），然后计算每个 $x_j \in X$ 在各个决策者排序中的得分的总和就是 x_j 的波达选择函数，记做 $b(x_j)=\sum_{k=1}^{p} b_k(x_j)$，根据 $b(x_j)$（j=1, 2, . . . , n) 从大到小的顺序就可以得到多人决策群体对方案集的优劣排序，不难证明，方案 $x_j \in X(j=1,2,...,n)$ 的波达选择函数值 $b(x_j)$ 等价于认为 x_j 优于所有方案 $x_t \in X \setminus \{x_j\}$ 的决策者人数之和。于是，又可将波达选择函数定义为

$$b(x_j)=\sum_{x_t \in X} |\{k \mid x_j \succ_k x_t (k=1,2,...,p)\}|$$

其中 $x_j \succ_k x_t$ 表示决策者 e_k 认为 x_j 优于 x_t，在一些决策群体中，需要对多人决策群体中各个决策者的重要性加以区别。因此，对第 k 个决策者赋予权重 λ_k，其中 $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ 且 $\lambda_k \geq 0\ (k=1,2,...,p)$。记多人决策群体权重向量为 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p)^T$ 于是，方案 $x_j \in X(j=1,2,...,n)$ 的加权波达选择函数可定义为 $\bar{b}(x_j)=\sum_{k=1}^{p} \lambda_k b_k(x_j)$

3.2 基于语言评价集的波达选择函数方法：

传统的波达选择函数方法在给一组有序方案赋值的时候仅仅是根据方案的排序位置来打分，并未考虑到方案与方案之间的偏好程度，例如假设有三个方案 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$，根据波达选择函数的打分规则就是分别把 2 分，1 分，0 分依次赋给 x_1, x_2, x_3。该方法并未考虑到 x_1 比 x_2， x_2 比 x_3 优多少，即相邻位置方案之间的偏好程度。所以这样简单的打分存在一定的缺陷。本文利用语言变量来刻画相邻位置的方案之间的偏好程度 $L=\{l_i \mid i=-s,...,s\}$ $s \geq 2$ 为一个语言评价集且 $l_{-s} < ... < l_s$，决策者利用这些语言短语来描述方案之间的偏好程度。例如假设决策者认为两个相邻位置的方案 x_i 与 x_j 之间的偏好程度为 l_m 那么我们就记作 $x_i \succ_{l_m} x_j$。现在决策者给出了一组方案集 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 两两之间的偏好关系矩阵，那么我们可以通过很多方法算出方案集的排序结果，并且我们可以根据已知的偏好关系矩阵得出相邻位置上的两个方案之间的偏好程度，假设我们得出的排序结果为 $x_p \succ ...x_i \succ x_j \succ ...x_q$ 再根据

决策已经给出的偏好关系矩阵我们可以得出带偏好程度方案排序结果假设为 $x_p \succ_{l_m} \cdots \succ_{l_a} x_i \succ_{l_b} \succ_{l_c} \cdots \succ_{l_d} x_q$。这时我们可以根据如下方法给有序方案集打分首先我们给排在第 1 位和最后 1 位的方案分别赋给（n-1）分和 0 分，排在其他位置的方案按如下公式打分，假设方案的排序结果为:

$$x^{(1)} \succ_{l^{(1)}} x^{(2)} \succ_{l^{(2)}} x^{(3)} \succ_{l^{(3)}} \cdots\cdots \succ_{l^{(n-1)}} x^{(n)}$$

$x^{(i)}$ 表示排在第 i 位的方案，$l^{(i)}$ 表示 $x^{(i)}$ 相对于 $x^{(i-1)}$ 的偏好程度，我们记 $f(x^{(i)})$ 表示排在第 i 位的方案的得分，则按我们前面的分析可得 $f(x^{(1)}) = n-1, f(x^{(n)}) = 0$。

下面计算 $f(x^{(i)})$ $i = 2,3,\ldots n-1$

$$f(x^{(i)}) = \frac{\sum_{s=i}^{n-1} I(l^{(s)})}{\sum_{s=1}^{n-1} I(l^{(s)})} \times (n-1)$$

$i = 2,3,\ldots n-1$

4 基于波达选择法的语言型群决策方法

4.1 语言偏好信息的群决策问题描述

考虑的群决策问题是一个有限方案集 $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ $(m \geq 2)$ 中选择最优方案或进行方案排序，其中 a_i 表示第 i 个决策方案。决策群体集为 $E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ $(n \geq 2)$，其中 e_k 表示第 k 个决策者，决策者 e_k 从语言短语集 $L = \{l_i \mid i = -s, \ldots, s\}$ 中选择一个元素来表示他（她）的偏好，且随着 l_i 下标增加，语言短语所代表的评价含义愈多。一般地，L 中的元素个数为奇数，例如一个由 9 个元素构成的有序语言短语集可表示为

$$L = \{l_{-4} = 极差, l_{-3} = 很差, l_{-2} = 差, l_{-1} = 稍差, l_0 = 相同, l_1 = 稍好, l_2 = 好, l_3 = 很好, l_4 = 极好\}$$

假设决策者 e_k 针对方案集 A 提供的两两方案比较偏好信息是用基于语言短语集 L 上的一个语言判断矩阵 $P^k = [p_{ij}^k]_{n \times n}$ 来描述，

$p_{ij}^k \in L, \forall i, j = 1, 2, \ldots, n, p_{ij}^k$ 可以理解为方案 a_i 与方案 a_j 相比较所得的优劣评价。根据判断矩阵 $P^k = [p_{ij}^k]_{n \times n}$ 得出决策者 e_k 对方案的排序结果，本文就是讨论如何对各个专家的排序结果进行集结，最后得出群体对方案的排序结果。

4.2 基于波达选择法的语言型群决策方法

假设有 p 个决策者（$e_1, e_2, \ldots e_p$）参与决策问题，并且每个决策者给出一个对 n 个方案进行两两比较的判断矩阵，记第 k 个决策者给出的判断矩阵为 P^k，在这里我们用语言变量来描述方案之间的偏好程度。

下面我们给出一种基于语言变量的波达选择函数方法在群决策问题中的应用方法步骤:

（1）根据第 k 个决策者给出的决策矩阵 P^k 计算出第 k 个决策者的方案排序结果（带偏好程度的排序结果）

（2）按照前文介绍的打分公式计算第 j 个方案在决策者 e_k 中的得分函数，我们记为 $f_k(x_j)$

（3）计算每个方案在各个决策者排序中的得分总和，记为 $f(x_j)=\sum_{k=1}^{p} f_k(x_j)$ （若考虑各个决策者的重要性，则 $f(x_j)=\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x_j)$，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p)^T$ 为决策者的权重向量）

（4） 根据 $f(x_j)$ 从大到小的顺序就可以得到多人决策群体对方案集 X 的优劣排序

5 算例分析

某投资公司有一笔资金要进行投资，现有 4 个备选方案 x_1,x_2,x_3和x_4，其中 x_1 表示投资于塑料厂； x_2表示投资于食品厂；x_3表示投资于飞机制造厂；x_4表示投资于电脑公司，该公司聘请 3 位专家（即 e_1,e_2,e_3 ）每位专家都根据下列语言短语集

$L=\{l_{-4}=$极差，$l_{-3}=$很差$,l_{-2}=$差$,l_{-1}=$稍差$,$
$l_0=$相同$,l_1=$稍好$,l_2=$好$,l_3=$很好，$l_4=$极好$\}$

给出的偏好信息（即判断矩阵 P_{ij}^k ）分别是:

$$P^1=\begin{pmatrix} l_0 & l_4 & l_{-4} & l_{-4} \\ l_{-4} & l_0 & l_{-4} & l_{-3} \\ l_4 & l_4 & l_0 & l_1 \\ l_4 & l_3 & l_{-1} & l_0 \end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix} l_0 & l_4 & l_4 & l_4 \\ l_{-4} & l_0 & l_{-4} & l_1 \\ l_{-4} & l_4 & l_0 & l_4 \\ l_{-4} & l_{-1} & l_{-4} & l_0 \end{pmatrix}$$

$$P^3=\begin{pmatrix} l_0 & l_{-1} & l_{-3} & l_4 \\ l_1 & l_0 & l_{-4} & l_2 \\ l_3 & l_4 & l_0 & l_4 \\ l_{-4} & l_{-2} & l_{-4} & l_0 \end{pmatrix}$$

1 利用 LAA 算子对上面的判断矩阵进行集结例如

对 P^1进行集结之后的结果如下

$$LAA(a_1)=\frac{1}{4}(l_0+l_4+l_{-4}+l_{-4})=l_{-1.00}$$
$$LAA(a_2)=\frac{1}{4}(l_{-4}+l_0+l_{-4}+l_{-3})=l_{-3.75}$$
$$LAA(a_3)=\frac{1}{4}(l_4+l_4+l_0+l_1)=l_{2.25}$$
$$LAA(a_4)=\frac{1}{4}(l_4+l_3+l_{-1}+l_0)=l_{1.50}$$

所以决策者 e_1 的排序结果为

$$x_3 \succ_{l_1} x_4 \succ_{l_4} x_1 \succ_{l_4} x_2$$

同理可得： 决策者 e_2 的排序结果为

$$x_1 \succ_{l_4} x_3 \succ_{l_4} x_2 \succ_{l_1} x_4$$

决策者 e_3 的排序结果为

$x_3 \succ_{l_4} x_2 \succ_{l_1} x_1 \succ_{l_4} x_4$

2 按照前面给出的打分公式，可以得出 x_1, x_2, x_3, x_4 在决策者 e_1 中的得分分别为 1.33,0.00,3.00,2.67

在决策者 e_2 中的得分分别为 3.00,0.33,1.67,0.00

在决策者 e_3 中的得分分别为 1.33,1.67,3.00,0.00

3 计算 x_1, x_2, x_3, x_4 在专家群体中的得分总和为

5.66,2.00,7.67,2.67

4 根据各个方案的得分总和的大小顺序得出多人决策群体对方案的排序结果为 $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$

为了比较，下面我们再用传统的波达选择函数对上面的算例重新计算一遍

根据决策者 e_1 给出的排序结果

$x_3 \succ_{l_1} x_4 \succ_{l_4} x_1 \succ_{l_4} x_2$

计算 x_1, x_2, x_3, x_4 在决策者 e_1 的得分分别为 1，0，3，2

同理可计算出 x_1, x_2, x_3, x_4 在决策者 e_2 的得分分别为 3，1，2，0

在决策者 e_3 中的得分分别为 1，2，3，0

最后可以得出 x_1, x_2, x_3, x_4 在专家群体中的总得分总和为：5，3，8，2

所以此种方法所计算出的多人决策群体对方案 x_1, x_2, x_3, x_4 的排序结果为： $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$

现假设三位专家 e_1, e_2, e_3 的权重分别为 0.4，0.5，0.1

此时采用加权改进的波达选择函数 $f(x_j) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x_j)$ 可以计算得出方案 x_1, x_2, x_3, x_4 在多人决策群体中的得分总和分别为

$$f(x_1) = 0.4 \times 1.33 + 0.5 \times 3 + 0.1 \times 1.33 = 2.165$$
$$f(x_2) = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 0.33 + 0.1 \times 1.67 = 0.332$$
$$f(x_3) = 0.4 \times 3 + 0.5 \times 1.67 + 0.1 \times 3 = 2.335$$
$$f(x_4) = 0.4 \times 2.67 + 0.5 \times 0 + 0.1 \times 0 = 1.068$$

所以此时 x_1, x_2, x_3, x_4 在多人决策群体中的排序为：

$x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$

结语：传统的波达选择函数应用于群决策问题时，在给方案打分的过程中没有考虑到相邻方案之间的偏好程度。本文就基于上述理由提出了一种改进的波达选择函数方法，该方法在给方案打分的过程中充分考虑到相邻方案之间的偏好程度，并且将这种偏好程度融入到打分公式中去。与传统的波达选择函数相比，这种方法应用于语言型群决策问题时给出的方案得分更为合理，最后得出的方案排序也更为准确。

参考文献:

[1]Jose luis Garcia-Lapresta,A general class of simple majority decision rules based on linguistic opinions,Information Sciences 176(2006)352-365

[2]Zeshui Xu,Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under

uncertain linguistic environment, Information Sciences 168 (2004) 171-184
[3]J.L.Garcia-lapresta,M.Martinez-Panero,L.C. Meneses, Defining the Borda count in a linguistic decision making context, Information Sciences 179 (2009) 2309-2316
[4]Zhibin Wu,Yihua Chen,The maximizing deviation method for group multiple attribute decision making under linguistic enviroment Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1608-1617
[5] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information, Fuzzy Sets and Systems115(2000)67-82.
[6]李洪燕，樊治平.具有语言信息的多指标群体综合评价.东北大学学报(自然科学版)，2005,26(7)703-706
[7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martinez, A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making, Fuzzy Sets and Systems 114(2000)43-58.
[8] 王欣荣，樊治平,一种具有不同形式的群决策方法.东北大学学报(自然科学版)，2003,24(2)178—181.
[9]姜艳平，樊治平，基于不同粒度语言判断矩阵的群决策方法，系统工程学报 2006，21（3）
[10]李登峰，模糊多目标多人决策与对策，国防工业出版社，2003
[11]徐泽水，不确定多属性决策方法及应用，清华大学出版社，2004
[12]陈侠，樊治平，陈岩，基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性分析，控制与决策 2006，21（8）