一元函数与多元函数基本性质异同性的分析*

吴一梅　　赵临龙

（安康学院数学系　　安康市　　725000）

摘　要：通过对一元函数到多元函数基本性质的讨论，分析了从一元函数到多元函数中异同点的原因，归纳出一元函数中命题的正确性在多元函数中能否得以保持的内在结构.

关键词：一元函数；多元函数；极限；连续性；可导性；可积性

多元函数是一元函数的推广，因此它保留着一元函数的许多性质，但也由于自变量的变化范围由一维空间扩展到了 n 维空间（n≥2），使研究的问题更加复杂化，研究的方法更加多样化.

1　从一元函数到多元函数中出现的异同点

我们在研究多元函数时采用了两种思想方法. 一种是在多个自变量同时变化的情况下进行研究，我们称为多元法. 另一种是在其中一个自变量变化，而其余的自变量暂时看作常数的情况下进行研究，即单一法. 在多元函数中的概念，有些是用多元法给出的，如极限、连续、可微、重积分等，而有些是用单一法给出的，如偏导数，驻点等.

在一元函数的研究中，因它只有一个自变量，其研究问题的方法就没有多元法与单一法之分，这就使得原来在一元函数中概念间的关系，在多元函数中有些会发生质的变化.

1.1 一元函数与多元函数的相同点

(1)“连续$\Rightarrow$有极限”的关系在多元函数中仍然成立. 在多元函数中，由于连续和有极限这两个概念都是用多元法给出的，这样，一元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的表达式 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，可以换成多元函数 $f(p)$ 在点 p_0 处连续的表达式（点 p 和点 p_0 是多维空间的点），$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=f(p_0)$. 从而使 $f(x)$ 在点 x_0 处“连续$\Rightarrow$有极限”的关系在多元函数中仍然成立.

(2)“可微$\Rightarrow$可导”的关系，在多元函数中也成立. 在多元函数中，由于可微这一概念是用多元法给出的，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，既有 $\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$（其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$）成立，此式中的 $\Delta x\cdot\Delta y$ 是任意的，其中蕴涵了当 $\Delta x=0$ 时，$f_y(x_0,y_0)$ 存在或 $\Delta y=0$ 时，$f_x(x_0,y_0)$ 存在的情况下也成立. 显然，可微这一概念囊括了用单一法给出的偏导数概念. 所以一元函数中“可微$\Rightarrow$可导”的关系，在多元函数中也成立.

1.2 一元函数与多元函数的相异点

（1）“偏导数存在$\Rightarrow$连续”的结论不一定成立. 例如，在二元函数中，$f(x,y)$在点(x_0，y_0)处的偏导数是由一元函数中的导数推广来的，而偏导数远不及导数的功能丰富. 因为f_x(x_0，y_0)和f_y(x_0，y_0)只是分别表示$f(x,y)$在点(x_0，y_0)处沿平行于x轴和y轴的变化率，它们的存在只能保证点(x_0，y_0)分别沿这样两个特殊方向趋于x_0时，函数值$f(x,y)$趋于f（x_0，y_0）. 但不能保证点（x_0，y_0）以任何方式、沿任何路径趋于时，函数值$f(x,y)$)都趋于f（x_0，y_0）. 因此，对多元函数来说“偏导数存在$\Rightarrow$连续”的结论不一定成立.

例 1　$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$. 当$f(x,y)$沿直线$y=kx$趋于点(0，0)时，有

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0,y=kx}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然，该极限值随k值而改变. 即点（x，y）沿不同的直线趋于点(0，0)时，极限值不相同，故$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在. 因此，$f(x,y)$在点（0，0）处是不连续的. 而

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\Delta y\cdot 0}{\Delta y^2+0^2}-0}{\Delta y}=0.$$

所以，函数$f(x,y)$在(0，0)处的两个偏导数均存在，但它在(0，0)处并不连续.

（2）“连续$\Rightarrow$偏导数存在”也不一定成立.

例 2　$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0，0)处连续，但它在(0，0)处的两个偏导数都不存在. 这是因为$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，故 f(x，y)在(0，0)处连续，但$f(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$.

由一元函数的结论知$f(x,0)=|x|$在$x=0$处不可导. 同理，$f(0,y)=\sqrt{y^2}=|y|$在$y=0$处也不可导. 所以，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)处连续，但它在(0,0)处的两个偏导数$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$

都不存在.

（3）“偏导数存在$\Rightarrow$可微”不一定成立.

例 3 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，在点（0，0）处有偏导数 $f_x^{'}(0,0)=0$ 及 $f_y^{'}(0,0)=0$，但在该点不可微，若函数 $f(x,y)$ 在点(0，0)点可微，则

$$\Delta z-dz=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x^{'}(0,0)\Delta x-f_y^{'}(0,0)\Delta y=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$，应该是较 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小量.

因此，考察极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$. 当动点 $p(x,y)$ 沿直线 $y=mx$ 而趋于定点(0，0)时，由例 1 知上述极限不存在，因而函数 $f(x,y)$ 在原点不可微.

2 一元函数与多元函数异同点的分析

2.1 若关于多元函数的命题，其题设条件中所涉及的概念是用多元法给出的，而结论中所涉及的概念是用单一法给出的，则这命题的正确性也可得以保持.

例如，在多元函数中，可微和极值点两个概念是用多元法给出的，而可导和驻点这两个概念是用单一法给出的. 所以，在一元函数中的“可微$\Rightarrow$可导”和 “极值点必为驻点”两命题的正确性仍可保持.

例 4 讨论函数 $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} z_x=2x-6=0\\ z_y=10y+10=0\end{cases}$，得稳定点 $p_0(3,-1)$.

由于 $z_{xx}(3,-1)=2$，$z_{yy}(3,-1)=10$，$z_{xy}(3,-1)=0$，且 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=20>0$. 故 $f(x,y)$ 在点(3，-1)取得极小值 $f(3,-1)=-8$.

2.2 若关于多元函数的命题，其题设条件和结论中所涉及的概念均是用多元法给出的，则这一命题的正确性，在多元函数中能够得以保持.

例如，在多元函数中的极限、连续、可微、重积分、最大（小）值等概念，均是用多元法给出的. 所以，一元函数中的“可微$\Rightarrow$连续”，“可微$\Rightarrow$有极限”，“连续$\Rightarrow$有极限”等命题的正确性在多元函数中仍然保持.

一元函数中的“在闭区间上连续的函数必可积”和“在闭区间上连续的函数必有最大值和最小值”两命题，在多元函数中，可分别推广为“在闭区间上连续的函数必存在重积分”和“在闭区域上连续的函数必有最大值和最小值”.

例5 若$f(x,y)$在有界闭区域D上非负连续，且在D上不恒为零，则$\iint\limits_D f(x,y)d\delta>0$，由于$f(x,y)$在D上不恒为零，则$\exists\delta>0$，及$p_0(x_0,y_0)\in D$，有$f(x_0,y_0)>\delta$则对于任一分割$T=\left\{\sigma_1,\sigma_{2,\ldots,}\sigma_n\right\}$，设$p_0(x_0,y_0)\in\sigma_k$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\delta=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\sigma_i$，由于$f(x,y)$为非负函数，则上式大于等于$f(x_0,y_0)\sigma_k=\delta\sigma_k>0$，命题得证.

2.3 若关于多元函数的命题，其题设条件中所涉及的概念是用单一法给出的，而结论中所涉及的概念是用多元法给出的，则这一命题的正确性在多元函数中不再保持.

例如，一元函数$f(x)$在点x_0处可导，则有“可导$\Rightarrow$可微”、“可导$\Rightarrow$连续”、“可导$\Rightarrow$有极限”成立.因为在多元函数中，偏导数概念是用单一法给出的，可微、连续、有极限等概念是用多元法给出的，则上述命题的正确性在多元函数中不再保持，即“偏导数存在$\Rightarrow$可微”,“偏导数存在$\Rightarrow$连续”,“偏导数存在$\Rightarrow$有极限”不成立.

从一元函数到多元函数中出现的问题可以看作是一个量变与质变的过程，但一元函数微分学理论是基础，因此在学习过程中应该予以重视，以便为学习多元函数微分学做好准备.

参考文献:

1.刘开宇、周利彪,高等数学多元微积分学[M].北京：科学出版社.2007

2.华东师范大学数学系,数学分析(第三版)[M].北京:高等教育出版社.2008.

项目基金：安康学院大学生科技创新项目《数学课程理论研究与应用》（2008akxydxs03）.