第三章 静磁场及其边值问题

3.1 静磁场方程和矢势

恒定电流遵从方程$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$,它产生静磁场,电流和磁场的分布均与时间无关.毕奥一萨伐尔定律

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{3.1}$$

是恒定电流激发磁场的规律.磁场方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\text{，}\quad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{J}$一般地包括物质内的传导电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$和磁化电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}$.由于磁场的无源性,可引入矢势函数$\boldsymbol{A}$,使

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.3}$$

将此式对任意非闭合曲面S积分,并由斯托克斯定理,有

$$\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.4}$$

即矢势$\boldsymbol{A}$沿任意闭合路径L的环量,等于通过以L为边界的曲面S之磁通量.可见只有矢势的环量才有物理意义,一点上矢势的绝对值没有明确意义.

由于对任意标量场ψ,均有$\nabla\times\nabla\psi=0$，因此当

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi$$

仍有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}'=\nabla\times(\boldsymbol{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

可见有任意多个矢势A可以描述同一个B场.原因在于作为矢量场的$\boldsymbol{A}$,只由(3.3)式给出它的旋度,没有限定其散度$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$,故$\boldsymbol{A}$未确定.对$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$的每一种选择称为一种规范.

例 1.均匀磁场B的矢势.

【解】令 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$ 由 $\nabla\times\boldsymbol{A}=B\boldsymbol{e}_z$,在直角坐标系中,有

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B\,,\quad \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0$$

有无穷多个 $\boldsymbol{A}$ 场可以满足这组方程,例如:

(1) $A_x=0$, $A_y=Bx$, $A_z=C$

(2) $A_x=-By$, $A_y=0$, $A_z=C$

(3) $A_x=-\frac{1}{2}By$, $A_y=\frac{1}{2}Bx$, $A_z=C$

C 为任意常数,可取 $C=0$.分别作上述 A 的图.

将(3.3)代入(3.1)的第一式,并选择库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,可得矢势方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}\qquad(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)\tag{3.5}$$

它在无界空间中的解为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\mathrm{d}V'\tag{3.6}$$

r 是电流分布点 $\boldsymbol{x}'$ 到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离,积分遍及电流分布区域 V.其中已把无穷远处选择为 A 的零值参考点.这积分意味着矢势 A 与静电势 φ 一样遵从叠加原理.对(3.5)求场点的旋度,即给出毕奥一萨伐尔定律(3.1)式.只要给定电流分布函数 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$,由(3.6)式可求出矢势,再由(3.3)式可求出磁场 B.若已知 B 或 A 的分布,由(3.2)的第一式或(3.5)式,可求出电流分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$.

例 2.圆电流圈的矢势和磁场.

【解】如图，以 z 为电流圈的对称轴,电流圈的中心为坐标原点.选择球坐标,令电流沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向.于是电流分布便有 z 轴对称性,它的矢势 A 和磁场 B 也有同样的对称性.任一点的

矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I\mathrm{d}l'}{r}\boldsymbol{e}_\phi\tag{1}$$

均只有 $\boldsymbol{e}_\phi$ 分量,而且与坐标 ϕ 无关,即

$$\boldsymbol{A}=A_\phi(R,\theta)\boldsymbol{e}_\phi\quad,\quad A_R=A_\theta=0\tag{2}$$

因此,任意半径 $r=R\sin\theta$ 的圆周各点上 A 值相等.故可以计算 xz 平面上 P′点的 A_ϕ,

此处$\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_y$, $A_\phi = A_y$.由

$$\begin{aligned} r^2 &= z^2 + L^2 = z^2 + x^2 + a^2 - 2xa\cos\phi' \\ &= R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi' \\ &= R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi' \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}l' = a\mathrm{d}\phi', \qquad \mathrm{d}l'_y = \mathrm{d}l'\cos\phi' = a\cos\phi'\mathrm{d}\phi'$$

因此有

$$A_\phi(\mathrm{P}') = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \frac{\mathrm{d}l'_y}{r} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi'\mathrm{d}\phi'}{(R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}} \tag{3}$$

用椭圆积分可得到结果. 讨论当$2Ra\sin\theta << R^2 + a^2$的情形,可以计算出近轴场和远场.此时被积函数的分母可展开为级数

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}} = \frac{1}{(R^2 + a^2)^{1/2}}\left(1 - \frac{2Ra\sin\theta\cos\phi'}{R^2 + a^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{(R^2 + a^2)^{1/2}}\left[1 + \frac{Ra\sin\theta\cos\phi'}{R^2 + a^2} + \frac{3}{2}\frac{(Ra\sin\theta\cos\phi')^2}{(R^2 + a^2)^2} + \frac{5}{2}\frac{(Ra\sin\theta\cos\phi')^3}{(R^2 + a^2)^3} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{4}$$

将(4)式右方代入(3)式并对ϕ积分，所有偶次项均为零.第二项代入(3)积分给出:

$$A_\phi^{(1)} = \frac{\mu_0 Ia^2 R}{4(R^2 + a^2)^{3/2}}\sin\theta \tag{5}$$

于是由$A_R^{(1)} = A_\theta^{(1)} = 0$, $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$,得到以球坐标表示的磁场

$$B_R = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial R}(\sin\theta A_\phi^{(1)}) = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}\cos\theta$$

$$B_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi^{(1)}) = \frac{\mu_0 Ia^2(R^2 - 2a^2)}{4(R^2 + a^2)^{5/2}}\sin\theta, \qquad B_\phi = 0 \tag{6}$$

当$\theta \to 0$, $\sin\theta \to 0$, $\cos\theta \to 1$,即在近轴处,有

$$B \approx \frac{\mu_0 Ia^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \qquad (B\text{ 线几乎与 }z\text{ 轴平行}) \tag{7}$$

当$R >> a$，即在远处, (5)和(6)成为

$$A = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}\sin\theta \quad ; \qquad B_R = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}\cos\theta, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\sin\theta, \quad B_\phi = 0 \tag{8}$$

这是电流圈的磁矩$\boldsymbol{m} = I\pi a^2\boldsymbol{e}_z$ (其值为$m = I\pi a^2$)在远处产生的矢势和磁场.B 写成矢量即为

$$B=\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_R+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{9}$$

3.2 磁偶极矩的势和磁场

在上例的积分式(3)中，我们略去了$2Ra\sin\theta\cos\phi'/(R^2+a^2)$ 3 次以上的奇次项.在远处看来,这个圆电流圈可以看成一个典型的磁偶极子.其实,如同电荷系统在其外部的电场那样,任何电流系统在其外部的磁场,也可表示成一系列多极矩场的叠加.在远处,如同对静电势做多极展开一样,亦可将(3.6)式中的$1/r$展开为级数,因而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')[\frac{1}{R}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{R})+\cdots]\mathrm{d}V'\\&=\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\cdots\end{aligned} \tag{3.7}$$

R是原点到场点的距离.因为恒定电流的流线都是闭合的,任何恒定电流都可以看为由许多闭合电流管I_i组成,故上式右方第一项——即矢势的单极项为零:

$$\boldsymbol{A}^{(0)}=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi R}\sum_i I_i\oint_{L_i}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i=0 \tag{3.8}$$

磁场的单极项$\boldsymbol{B}^{(0)}$自然亦为零,这与认为不存在磁单极的磁场散度方程$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$是一致的.偶极项为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{3.9}$$

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}$是坐标原点到场点的矢径.$\boldsymbol{m}$为电流系统的磁偶极矩：

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' \tag{3.10}$$

它的磁场为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\nabla\times\boldsymbol{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{m}}{R^3}] \tag{3.11}$$

若磁矩沿z轴,即$\boldsymbol{m}=m\boldsymbol{e}_z$, (3.11)便与例 2 中的(9)式一致.

在电流密度$\boldsymbol{J}=0$的单连通区域内,磁场旋度方程为$\nabla\times\boldsymbol{B}=0$,因而可引入磁标势$\varphi$,使

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0\nabla\varphi \tag{3.12}$$

于是磁偶极矩$\boldsymbol{m}$的标势为

$$\varphi^{(1)}=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3} \tag{3.13}$$

将磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的磁场表达式(3.11)与电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的电场表达式加以比较,可知当 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{m}/c^2$,有 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}$,这代换反映了 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 的场有对偶性.

3.3 静磁能　外磁场对电流的作用能

静磁能　在线性均匀介质内,磁能密度为 $w=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}/2$,其中 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$.真空中 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$.磁场一般地分布于全空间,因此总磁能是磁场分布的所有区域内能量之和,即总能量一般地由积分

$$W=\int_\infty\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \tag{3.15}$$

给出.由 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_\mathrm{f}$ 及 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,下述积分

$$W=\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_\mathrm{f}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{3.16}$$

也可给出总磁能,积分只需遍及电流分布区域.

外磁场对电流的作用能　设 V_1 内的电流分布 $\boldsymbol{J}_1$ 激发的矢势为 $\boldsymbol{A}_1$, V_2 内的电流分布 $\boldsymbol{J}_2$ 激发的矢势为 $\boldsymbol{A}_2$,由(3.15),总静磁能为

$$W=\frac{1}{2}\int_V(\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{A}_1)\mathrm{d}V \tag{3.17}$$

被积函数中第三、四两项反映了两个电流的互作用能,而这两项是相等的.因此,当分布于区域 V 内的电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 处于另一电流产生的外磁场中,外场的矢势记为 $\boldsymbol{A}_\mathrm{e}(\boldsymbol{x})$,则外磁场对这电流系统的作用能为

$$W_\mathrm{i}=\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_\mathrm{e}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V \tag{3.18}$$

此式没有考虑到相互作用过程引起电磁感应所产生的效果.事实上,相互作用过程必然会引起电磁感应（见教材 P89-90，或讲稿）.因此,外磁场对磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 的作用能,作用力,和作用力矩为

$$W_\mathrm{i}=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{e} \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{F}=-\nabla W_\mathrm{i}=\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_\mathrm{e} \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{e} \tag{3.21}$$

3.4 矢势的量子效应

见讲稿

经典电动力学把电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 作为描写电磁场的基本物理量,标势 φ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 只是作为数学手段而引入的辅助量.但 A−B 效应以及超导现象等实验事实表明,描写磁场对带电粒子的作用时,仅用 $\boldsymbol{B}$ 的局域作用理论显示出其局限性,在微观电磁现象中矢势有客观的物理效应.由于微观带电粒子的状态由波函数描写,因此,磁场对粒子作用的物理量是相因子 $e^{i\phi}$,其中

$$\phi = \frac{e}{\hbar}\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.22}$$

e 是粒子的电荷,L 为任意闭合路径.当 L 可以缩小为任意一点的无限小路径,$\boldsymbol{B}$ 对带电粒子的局域作用描述等价于相因子描述.若 L 不可以缩小为任意一点的无限小路径,例如 A−B 效应中电子通过双缝后干涉条纹的移动现象,以及超导环的磁通量子化现象,都表明 $\boldsymbol{B}$ 的局域作用理论不能反映磁场对微观带电粒子的作用.在微观电磁现象中,矢势 $\boldsymbol{A}$ 比 $\boldsymbol{B}$ 有更基本的地位.

3.5 静磁场边值问题

在有不同介质分布时,已知电流的磁场将使介质出现磁化电流,磁化电流反过来又激发磁场,而磁化电流通常不能预先求出.因此,必须根据给定介质的电磁性质和边界条件,求解磁场或势的微分方程,才能求出磁场分布.如同静电场边值问题一样,寻找静磁场边值问题解的依据,是唯一性定理.

静磁场方程和边值关系　连续介质内的静磁场方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_\mathrm{f}\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.23}$$

$\boldsymbol{J}_\mathrm{f}$ 为传导电流密度.在两种介质分界面上,一般情况下的边值关系为

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\,,\quad \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f} \tag{3.24}$$

由磁场强度的定义 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$,而一般情况下界面两边磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的跃变关系为 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{M}$,故第二个边值关系与 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=\mu_0(\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f}+\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{M})$ 等价,$\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f}$ 是界面的传导电流面密度,$\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{M}$ 是磁化电流面密度.在非导电介质的分界面上,一般有 $\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f}=0$.

矢势的微分方程和边值关系　当介质是分区线性均匀的,则在区域 i 内, $\boldsymbol{B}=\mu_i\boldsymbol{H}$,由(3.12)的第一式和 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,此区域内矢势的方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_i\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}\qquad(\text{辅助条件}\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)\tag{3.25}$$

若这区域内传导电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=0$,便有 $\nabla^2\boldsymbol{A}=0$.在线性均匀区域 i 和 j 的分界面上,由(3.24),得矢势一般的边值关系

$$\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}_i\,,\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\left(\frac{1}{\mu_j}\nabla\times\boldsymbol{A}_j-\frac{1}{\mu_i}\nabla\times\boldsymbol{A}_i\right)=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}\tag{3.26}$$

磁标势方程和边值关系　在 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=0$ 的单连通区域内,磁场强度的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$,故可引入磁标势 φ_{m} ,使 $\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_{\mathrm{m}}$.又由 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$,可知 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}$ 为介质的磁化强度.若引入假想磁荷密度 ρ_{m} ,使

$$\rho_{\mathrm{m}}=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}\tag{3.27}$$

则在 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=0$ 的区域内,从磁场方程(3.12)可得磁标势方程

$$\nabla^2\varphi_{\mathrm{m}}=-\rho_{\mathrm{m}}/\mu_0\qquad(\text{或}\ \nabla^2\varphi_{\mathrm{m}}=0\,,\text{当}\ \rho_{\mathrm{m}}=0)\tag{3.28}$$

它与静电势的方程相似.在两种介质分界面上,由(3.24),一般的边值关系为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(-\nabla\varphi_2+\nabla\varphi_1)=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}\,,\quad B_{2\mathrm{n}}=B_{1\mathrm{n}}\tag{3.29}$$

若两种介质线性均匀,且界面上 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}=0$,则边值关系为

$$\varphi_2=\varphi_1\,,\quad \mu_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\mu_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\tag{3.30}$$

在各种连续介质分布的区域内,满足磁场方程(3.23),或矢势方程(3.25),或标势方程(3.28),在介质分界面上又满足给定的边值关系及边界条件的解,才是静磁场唯一正确的解.

例 1. $\mu\to\infty$ 的介质（高 μ 值磁介质，如铁磁质）的表面为等磁势面。（教材 P83，自习）

例 2. 均匀磁化铁球的磁场（教材 P83）

【解】见讲稿

例 3. 半经为 R_0 的薄导体球壳，均匀地带有电荷 q ，这球壳绕其自身某一直

径以角速度ω转动，求磁场分布。

【解】 以球心为坐标原点,转轴为z轴.球壳电荷面密度$\sigma_{\mathrm{f}}=q/4\pi R_0^2$,因球壳自转而形成的面电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}=\sigma_f\boldsymbol{v}=\frac{q}{4\pi R_0^2}\omega\boldsymbol{e}_z\times R_0\boldsymbol{e}_R=\frac{q\omega}{4\pi R_0}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \tag{1}$$

【方法一】 磁标势法 球内外两区域均无传导电流分布,磁标势均满足方程$\nabla^2\varphi=0$,边界条件为

$$R=0\text{，}\quad\varphi_1\text{有限}\quad;\quad R\to\infty\text{，}\quad\varphi_2\to 0 \tag{2}$$

$$R=R_0\text{处},B_{2R}=B_{1R}\text{，}\quad\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}$$

$$\text{即}\quad\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\quad,-\frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}=\frac{q\omega}{4\pi R_0}\sin\theta \tag{3}$$

由z轴对称性,及(2)的两个条件,磁标势方程的解写为

$$\varphi_1=\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\,,(R<R_0) \tag{4}$$

$$\varphi_2=\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\text{，}\quad(R>R_0) \tag{5}$$

由条件(3),解出

$$\varphi_1=-\frac{q\omega}{6\pi R_0}R\cos\theta\text{，}\quad\varphi_2=\frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\mu_0(-\nabla\varphi_1)=\frac{\mu_0q\omega}{6\pi R_0}\boldsymbol{e}_z \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_0(-\nabla\varphi_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{m}}{R^3}] \tag{8}$$

球内为均匀场,球外为磁偶极场,球面电流形成的磁矩为

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\oint_S(R_0\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}})\mathrm{d}S=\frac{q\omega R_0^2}{3}\boldsymbol{e}_z \tag{9}$$

【方法二】 如(9)式先计算出球面电流的磁矩$\boldsymbol{m}$,得球外的磁标势和磁场

$$\varphi_2=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}=\frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_0(-\nabla\varphi_2)=\frac{\mu_0m}{4\pi R^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}}+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{10}$$

因$R=0$处φ_1有限,故球内标势方程$\nabla^2\varphi_1=0$的解如(4)式,再由$R=R_0$处$B_{2R}=B_{1R}$,即

$$\frac{\mu_0m}{4\pi R_0^3}2\cos\theta=-\mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\Big|_{R=R_0} \tag{11}$$

解得

$$a_1 = -\frac{m}{2\pi R_0^3} = -\frac{q\omega}{6\pi R_0}\text{；}\quad a_n = 0\text{，}\quad \text{当}\, n \neq 1$$

由此得球内的标势和磁场

$$\varphi_1 = -\frac{q\omega}{6\pi R_0} R\cos\theta\text{，}\quad \boldsymbol{B}_1 = \mu_0(-\nabla\varphi_1) = \frac{\mu_0 q\omega}{6\pi R_0}\boldsymbol{e}_z \tag{12}$$

【方法三】 矢势法 球面电流密度如(1)式.因球内外两区域传导电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ 均为零,故矢势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0\,,(\nabla\cdot\mathbf{A} = 0)\text{，}\quad (R < R_0, R > R_0) \tag{13}$$

$$R = 0\,, \boldsymbol{A}_1 \text{有限；}\quad R \to \infty\,, \boldsymbol{A}_2 \to 0 \tag{14}$$

$R = R_0$ 处

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2\text{，}\quad \boldsymbol{e}_R \times (\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}_2 - \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}_1) = \frac{q\omega}{4\pi R_0}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \tag{15}$$

球面电流形成的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 如(9)式,故球外矢势为

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\text{，}\quad (R > R_0) \tag{16}$$

由轴对称性及 $R = R_0$ 处 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$,可知球内矢势函数应当为

$$\boldsymbol{A}_1 = A_\phi(R,\theta)\boldsymbol{e}_\phi\,, A_R = A_\theta = 0 \tag{17}$$

将(16)和(17)式代入边值关系(15)的第二式,并由球坐标旋度公式,可解出

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 q\omega}{12\pi R_0} R\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\text{，}\quad (R < R_0) \tag{18}$$

可以验证,$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 满足条件(14),以及 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.于是得

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla\times\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 q\omega}{6\pi R_0}\boldsymbol{e}_z \tag{19}$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \nabla\times\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3}] \tag{20}$$

3.6 超导体的电磁性质

伦敦唯象理论 在 $\mu \approx \mu_0, \varepsilon \approx \varepsilon_0$ 的超导体内,磁化电流与极化电流可以忽略.

正常传导电流遵从欧姆定律 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{n}}=\sigma\boldsymbol{E}$, σ 为材料的电导率.超导电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-n_{\mathrm{s}}e\boldsymbol{v}$,其中 n_s 为超导电子密度, e 为电子电荷量, $\boldsymbol{v}$ 为超导电子的平均速度.以经典力学和麦克斯韦电磁理论为基础的伦敦方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}_s}{\partial t}=\alpha\boldsymbol{E}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{J}_s=-\alpha\boldsymbol{B} \tag{3.28}$$

可以唯象地解释超导体的超导电性(零电阻效应)和抗磁性(迈斯纳效应).其中

$$\alpha=n_s e^2/m \tag{3.29}$$

m 为电子质量.在恒定情形下, $\partial\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}/\partial t=0$,由伦敦第一方程,超导体内电场 $\boldsymbol{E}=0$,正常传导电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{n}}=0$,只有超导电流因而电阻为零；此时超导体内的磁场和超导电流遵从的麦克斯韦-伦敦方程组为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \tag{3.30}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-\alpha\boldsymbol{B} \tag{3.31}$$

在伦敦规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \qquad \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{A}\big|_{\mathrm{s}}=0 \tag{3.32}$$

下(第二式限定超导体表面 S 上 $\boldsymbol{A}$ 的法向分量 $A_{\mathrm{n}}=0$),矢势 $\boldsymbol{A}$ 可唯一确定.由伦敦第二方程可以推出，仅在单连通的超导体内部,超导电流与矢势才有确定的局域关系

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})=-\alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{3.33}$$

从方程组(3.30)和(3.31)，可得到超导体内部的磁场与超导电流遵从同一形式的方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}\boldsymbol{B}, \qquad \nabla^2\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \tag{3.34}$$

第一个方程可以解释超导体的抗磁性——磁场随着透入超导体内部深度的增加而衰减.其中

$$\lambda_{\mathrm{L}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\alpha}}=\sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_{\mathrm{s}}e^2}} \tag{3.35}$$

为伦敦穿透深度,一般地 $\lambda_{\mathrm{L}} \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}$.在若干个 λ_{L} 处,$\boldsymbol{B}$ 显著地趋于零.超导电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 也按同一规律衰减.这是一般迈斯纳态，此时超导体表面的边值关系为

$$H_{2\mathrm{t}} = H_{1\mathrm{t}}, \qquad B_{2\mathrm{n}} = B_{1\mathrm{n}} \tag{3.36}$$

超导体之所以显示抗磁性,是由于超导电流在其内部产生与外场逆向的磁场.对于宏观尺度超导体,若看成 $\lambda_{\mathrm{L}} \to 0$,则可认为磁场完全被排出超导体外,其内部

$$\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{J}_s = 0 \tag{3.37}$$

即超导体有完全抗磁性,这是理想迈斯纳态，超导电流视为面电流 $\boldsymbol{\alpha}_s$.此时边值关系为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}_s, \qquad B_{\mathrm{n}} = 0 \tag{3.38}$$

这里 $\boldsymbol{B}$ 是超导体外表面的磁感应强度,其法向分量 $B_{\mathrm{n}} = 0$ 意味着无论外部磁场如何分布,均不能透入超导体内部.表面超导电流完全屏蔽了外部磁场.

皮帕德非局域修正　实验发现合金和化合物超导体的实际穿透深度,随电子自由程的减小而增加,而且比伦敦局域理论给出的 λ_{L} 大得多.这是因为超导电子以库珀对为单元凝聚成量子态,不同点上超导电子的运动互相关联,亦即一点上的 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ 不仅与该点的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 有关,还会受到附近的场的影响.这种关联性可以通过唯象参数 l 、ξ_0 、ξ_{p} 和 λ_{p},以及皮帕德非局域方程描写.其中

$$\frac{1}{\xi_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{dl} \tag{3.39}$$

l 为正常态纯金属的电子平均自由程,系数 d 决定于材料(一般地 $d \le 1$),ξ_0 为 $T = 0\mathrm{K}$ 时大块纯金属超导体的相干长度,ξ_{p} 称为皮帕德有效相干长度.相应地存在皮帕德有效穿透深度 λ_{p}.皮帕德非局域方程为:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{3\alpha}{4\pi\xi_0}\int_V \frac{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')]e^{-r/\xi_{\mathrm{p}}}}{r^4}\mathrm{d}V' \tag{3.40}$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ 为 $\boldsymbol{x}'$ 点到 $\boldsymbol{x}$ 点的矢径.当 $dl \ll \xi_0$,则 $\xi_{\mathrm{p}} \ll \lambda_{\mathrm{p}}$,从上式可给出局域近似结果:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})=-\frac{\alpha}{\xi_0}\xi_{\mathrm{p}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{3.41}$$

对此式求旋度,并利用静磁场方程(3.30)，可得到形如(3.34)的方程.由此得局域近似下的皮帕德有效穿透深度

$$\lambda_{\mathrm{p}}=\lambda_{\mathrm{L}}(\frac{\xi_0+dl}{dl})^{1/2}\approx\lambda_{\mathrm{L}}(\frac{\xi_0}{dl})^{1/2} \tag{3.42}$$

对于满足条件 $dl<<\xi_0$, $\xi_{\mathrm{p}}<<\lambda_{\mathrm{p}}$ 的第二类超导体,可用局域近似理论计算磁场和超导电流分布.不满足上述条件时,应当用非局域理论处理相应问题.

有第二类超导体存在时磁场分布的求解　在恒定情形下，超导体外部的磁场遵从一般的静磁场方程.对于一般迈斯纳态的第二类超导体内部,应当在方程组(3.30)、(3.31)，以及(3.34)的两个方程中,作出修正：

$$\alpha\rightarrow\alpha'=\alpha\xi_{\mathrm{p}}/\xi_0\,,\qquad \lambda_{\mathrm{L}}\rightarrow\lambda_{\mathrm{p}} \tag{3.43}$$

利用这些方程和边值关系(3.36),并结合一定的边界条件，原则上可以求解磁场和超导电流分布.若把超导体看成处于理想迈斯纳态,即其内部 $\boldsymbol{B}=0$ ， $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=0$,则只需求解外部磁场,它必须满足静磁场的基本方程和边值关系(3.38).根据已知的场源,可以选择磁标势法、镜像法、矢势法或其它方法求解.

磁介质观点　按此观点，超导体被“磁化”而诱导出超导电流,因而有宏观磁矩.若仍略去超导体的分子磁化电流,可令磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 遵从方程

$$\nabla\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\,,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{M}=0 \tag{3.44}$$

在恒定情形,由磁场方程(3.30),以及 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$,超导体内的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 便满足方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0\,,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{3.45}$$

现在,$\boldsymbol{H}$不再与超导电流直接联系.因而可在超导体内引入磁标势φ,使$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi$,且$\varphi$满足方程$\nabla^2\varphi=0$.在超导体表面,$\boldsymbol{H}$的边值关系为

$$H_{2\mathrm{t}}=H_{1\mathrm{t}}, \qquad H_{\mathrm{n}}=0 \tag{3.46}$$

若超导体外部也无自由电流，便亦可引入磁标势求解.此时在超导体表面,边值关系(3.46)可表为

$$\varphi_2=\varphi_1, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=0 \tag{3.47}$$

若把超导体看成处于理想迈斯纳态,即内部$\boldsymbol{B}=0$,$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=0$.由$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=0$可知,超导体内部处处有

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{M} \tag{3.48}$$

即超导体的磁化率$\chi_{\mathrm{M}}=-1$,磁导率$\mu=\mu_0(1+\chi_{\mathrm{M}})=0$.若能解出$\boldsymbol{H}$,便得到$\boldsymbol{M}$.超导体表面超导电流密度$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{s}}$可由

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{s}} \tag{3.49}$$

求出,这里$\boldsymbol{M}$为超导体表面的磁化强度.但是,对处于一般迈斯纳态的超导体,由于预先不知道其内部$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{M}$的关系,即使可以通过标势法解出$\boldsymbol{H}$,由$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$可知:只要基本场量$\boldsymbol{B}$未解出,$\boldsymbol{M}$就无法确定；或者只要$\boldsymbol{M}$未解出,$\boldsymbol{B}$也无法确定.

磁通量子化　对于复连通超导体,例如超导环或中空的超导圆柱体,以及处于混合态(正常态与超导态并存)的超导体,磁通量$\varPhi$都是量子化的，这是由于矢势$\boldsymbol{A}$影响着超导电子波函数的相位.例如超导环,在其内部足够深处,$\boldsymbol{B}=0$,$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-n_{\mathrm{s}}e\boldsymbol{v}=0$,但$\boldsymbol{A}\neq0$.一个库珀对的正则动量为$\boldsymbol{P}=2m\boldsymbol{v}-2e\boldsymbol{A}$,设想在深处绕着环一周,则电子波的相位改变为

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{\hbar}\oint_C \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{\hbar}\oint_C (2m\boldsymbol{v} - 2e\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= -\frac{2e}{\hbar}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned} \tag{3.50}$$

上式右边$\boldsymbol{A}$绕闭合路径C的积分,是通过C所围面积的磁通量$\varPhi$.由波函数的单值性，绕C一周后相位变化只能是2π的整数倍,因此有

$$\frac{2e}{\hbar}\varPhi = 2n\pi\ ,\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \tag{3.51}$$

$$\varPhi = n\frac{2\pi\hbar}{2e} = n\frac{h}{2e} = n\varPhi_0 \tag{3.52}$$

$$\varPhi_0 = \frac{h}{2e} = 2.067\,833\,667\,(52)\times 10^{-15}\ \mathrm{Wb} \tag{3.53}$$

$\varPhi_0$称为磁通量子.每一条磁通线只能以$\varPhi_0$值整条产生或整条消失.