与 Schrödinger 型算子有关的 L^p 估计

方 益 [1], 陶祥兴 [2*]
（1.宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2.浙江科技学院 理学院, 浙江 杭州 310023）

摘要: 讨论了与 Schrödinger 型算子 $H=(-\Delta)^2+V^2$ 有关的几类算子的 L^p 估计, 并就位势函数 V 满足不同的条件时给出 p 的取值范围.

关键词: Schrödinger 型算子; 逆 Hölder 函数类; 基本解; L^p 估计
中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-5132（2011）01-0054-04

1 引言和结论

关于 Schrödinger 型算子的研究已有很长一段历史, 特别是近年来更是受到很多学者的广泛关注, 得出了一系列好的结果[1-7]. 记 $L=-\Delta+V$, $H=(-\Delta)^2+V^2$ 为 2 类 Schrödinger 型算子, 这里 Δ 为 Laplace 算子, V 为非负位势函数. 当 V 为非负多项式时, 1993 年 Zhong 在其博士论文中分别给出了算子 L 和 H 的基本解估计, 并得到了算子 V^kL^{-k}, $V^{k-1/2}\nabla L^{-k}(k\in\mathbb{N})$ 以及 $V^{2-j/2}\nabla^j H^{-1}(j=0,1,2,3,4)$ 的 L^p 有界性. 当 $V\in\mathfrak{B}_q(q\geqslant n/2)$, 即逆 Hölder 函数类时, Shen 在 1995 年证明了算子 VL^{-1} 和 $V^{1/2}\nabla L^{-1}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间中的有界性, 这里要求 p 分别满足 $1\leqslant p\leqslant q$ 和 $1\leqslant p\leqslant C(q)$. 最近, Sugano 从不同方向推广了 Zhong 和 Shen 的结果, 得到如下结论:

定理 A[4] 设 $V(x)\in\mathfrak{B}_\infty$, 则对任意的 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 存在正的常数 C, C' 使得:

$$\|V^kL^{-k}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

$$\|V^{k-1/2}\nabla L^{-k}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

这里 $1<p\leqslant\infty$.

定理 B[5] (i) 设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}(n\geqslant 5)$, 且存在正的常数 C 使得 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$, 则存在正的常数 C_j $(j=0,1,2,3)$ 使得:

$$\|V^{2-j/2}\nabla^j H^{-1}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_j\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3}$$

这里 $1<p\leqslant\infty$.

(ii) 在(i)条件下, 同样存在正常数 C' 使得:

$$\|V^{2k}H^{-k}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4}$$

这里 $1<p\leqslant\infty$, $k\in\mathbb{N}$.

在叙述主要结论前, 我们先对文中出现的相关记号和术语作些介绍. 笔者要求的空间维数 $n\geqslant 5$. $B(x,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心, 以 r 为半径的球体, 即有:

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|<r\}.$$

另外约定

$$\nabla_x^j=\partial^{|\alpha|}/(\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}),\quad j=|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

下文中出现的 C, C' 都表示大于零的常数, 当然它们出现在不同的地方, 取值是不相同的.

记 $\varGamma_H(x,y)$ 为算子 H 的基本解, 关于 $\varGamma_H(x,y)$ 的一些基本估计笔者将在第 2 部分给出. 这里先给出 H^{-1} 的定义.

$$H^{-1}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varGamma_H(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

利用递归的方法将 $H^{-m}(m\geqslant 2)$ 定义为:

$$H^{-m}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varGamma_H(x,y)H^{-(m-1)}f(y)\mathrm{d}y.$$

对于 $L^{-m}(m\geqslant 1)$, 可类比上述方式来定义, 也可参考文献[4].

定义 1[3] (i) 若非负函数 $V(x)\in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$ $(1<q<\infty)$, 且存在 C 使得逆 Hölder 不等式

$$(1/|B(x,r)|\int_{B(x,r)}V(y)^q\mathrm{d}y)^{1/q}\leqslant C/|B(x,r)|\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y,$$

对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $0<r<\infty$ 均成立, 则称 $V(x)$ 属于

收稿日期: 2010-04-27. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 国家自然科学基金（10771110, 10471069）.
第一作者: 方 益（1985－）, 男, 安徽安庆人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 调和分析与偏微分方程. E-mail: flxy85@163.com
*通讯作者: 陶祥兴（1965－）, 男, 浙江台州人, 博士/教授, 主要研究方向: 调和分析与偏微分方程. E-mail: xxtau@163.com

逆 Hölder 函数类 $\mathfrak{B}_q$.

(ii) 称非负函数 $V(x)$ 属于逆 Hölder 函数类 $\mathfrak{B}_\infty$, 如果 $V(x)\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 且存在 C 使得:

$$\|V\|_{L^\infty}\leqslant C/|B(x,r)|\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y,$$

对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $0<r<\infty$ 均成立.

注 1　利用 Hölder 不等式易知 $\mathfrak{B}_p\subset\mathfrak{B}_q$, 若 $p>q>1$. 由文献[8]的结论可知 $\mathfrak{B}_q$ 具有自提升性, 即若 $V\in\mathfrak{B}_q$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $V\in\mathfrak{B}_{q+\varepsilon}$.

受文献[3,5]启发, 笔者主要讨论当位势函数 $V(x)$ 满足不同的条件时算子 $V^{2m-j/2}\nabla^jH^{-m}(m\geqslant1)$ 的 L^p 有界性以及 p 的取值范围.

定理 1　对 $j=0,1,2,3,\ m\in\mathbb{N}$, 假设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 且存在 C 使得 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$, 则存在常数 C_j 使得:

$$\|V^{2m-j/2}\nabla^jH^{-m}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_j\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\tag{5}$$

这里 $1<p\leqslant\infty$.

注 2　当 $V(x)\in\mathfrak{B}_\infty$ 时, 不难验证 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 且 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$, 即(5)式对 $V(x)\in\mathfrak{B}_\infty$ 也成立. 在(5)式中, $m=1$ 及 $m\in\mathbb{N}$, $j=0$ 的情形分别对应于定理 B 中的(i)和(ii).

定理 2　对 $j=1,2,3,$ 假设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{q_0}$, $q_0\geqslant n/2$, 则对 $1\leqslant p\leqslant p_0$ 有:

$$\|V^{2-j/2}\nabla^jH^{-1}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_j\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\tag{6}$$

这里 $1/p_0=(4-j/2)/q_0-(4-j)/n$, 如果 $n/2\leqslant q_0<2n/(4-j)$; $p_0=q_0/(2-j/2)$, 如果 $q_0\geqslant2n/(4-j)$.

2　几个引理

这里先给出辅助函数 $m(x,V)$ 的定义及其基本性质, 关于 $m(x,V)$ 更丰富的性质, 可参考文献[3].

定义 2[3]　设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 我们定义辅助函数 $m(x,V)$ 为:

$$1/m(x,V)=\sup\{r>0:1/r^{n-2}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant1\}.$$

引理 1[3]　设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 那么存在 k_0, $C>0$, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的 x 和 y 成立:

$$\frac{m(y,V)}{C(1+m(x,V)|x-y|)^{k_0}}\leqslant m(x,V)\leqslant C(1+m(x,V)|x-y|)^{k_0/(k_0+1)}m(y,V).$$

以下回顾 $\varGamma_H(x,y)$ 的一些基本性质.

引理 2[5]　设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 则对任意的正整数 N 存在常数 $C_N>0$ 使得:

$$|\varGamma_H(x,y)|\leqslant\frac{C_N}{(1+m(x,V)|x-y|)^N}\frac{1}{|x-y|^{n-4}}.$$

引理 3[5]　对 $j=1,2,3,$ 假设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 且存在常数 C 使得 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$, 那么对任意的正整数 N 存在常数 $C_N>0$ 使得:

$$|\nabla_x^j\varGamma_H(x,y)|\leqslant\frac{C_N}{(1+m(x,V)|x-y|)^N}\frac{1}{|x-y|^{n-4+j}}.$$

引理 4[5]　对 $j=1,2,3,$ 假设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{2n/(4-j)}$. 那么对任意的正整数 N 存在常数 $C_N>0$ 使得:

$$|\nabla_x^j\varGamma_H(x,y)|\leqslant\frac{C_N}{(1+m(x,V)|x-y|)^N}\frac{1}{|x-y|^{n-4+j}}.$$

引理 5[5]　对 $j=1,2,3,$ 假设 $V(x)\in\mathfrak{B}_{q_0}$, 且 $n/2\leqslant q_0\leqslant2n/(4-j)$. 若对 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 在 $B(x_0,R)$ 中成立 $(-\Delta)^2u+V^2u=0$, 则存在 C 使得:

$$\left(\int_{B(x_0,R/2)}|\nabla_x^ju(x)|^t\mathrm{d}x\right)^{1/t}\leqslant CR^{2n/q_0-4}\{1+Rm(x_0,V)\}^4\sup_{y\in B(x_0,R)}|u(y)|,$$

这里 $1/t=2/q_0-(4-j)/n$.

命题 1[3]　当 $V(x)\in\mathfrak{B}_q$, $q>1$ 时, $V(x)\mathrm{d}x$ 是双倍测度, 即存在正的常数 C_0 使得(7)式成立:

$$\int_{B(x,2r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant C_0\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y.\tag{7}$$

引理 6[3]　设 $V(x)\in\mathfrak{B}_q$, $q>n/2$, 则存在 C 使得对任意的 $0<r<R<\infty$ 有:

$$1/r^{n-2}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant C(R/r)^{n/q-2}(1/R^{n-2})\int_{B(x,R)}V(y)\mathrm{d}y.$$

3　定理的证明

为了证明定理 1, 我们需要引理 7.

引理 7　假设 $m\in\mathbb{N}$, $V(x)\in\mathfrak{B}_{n/2}$, 且存在常数 C 使得 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$, 那么对于 $j=0,1,2,3,$ 存在 C' 使得:

$$|m(x,V)^{4m-j}\nabla_x^jH^{-m}f(x)|\leqslant C'M^{(m)}f(x).\tag{8}$$

对任意的 $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 均成立, 这里 $M^{(m)}$ 表示 Hardy-Littlewood 算子 M 的 m 次复合.

证明　我们对 m 进行归纳证明. 当 $m=1$ 时, (8)式类似于定理 B (i)的证明. 我们假设(8)式对 $1\leqslant m\leqslant k$, $k\in\mathbb{N}$ 均成立, 以下考虑 $m=k+1$ 的情形. 注意到:

$$|m(x,V)^{4(k+1)-j}\nabla_x^jH^{-(k+1)}f(x)|=$$

$$|m(x,V)^{4(k+1)-j}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_x^j\varGamma_H(x,y)H^{-k}f(y)\mathrm{d}y|,$$

利用引理 3 和引理 1 可得:

$$\begin{aligned}&|m(x,V)^{4(k+1)-j}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_x^j\varGamma_H(x,y)H^{-k}f(y)\mathrm{d}y|\leqslant\\&C_N m(x,V)^{4(k+1)-j}\int_{\mathbb{R}^n}|H^{-k}f(y)|/((1+m(x,V)\cdot\\&|x-y|)^N|x-y|^{n-4+j})\mathrm{d}y\leqslant C_N m(x,V)^{4-j}\cdot\\&\int_{\mathbb{R}^n}(m(y,V)^{4k}|H^{-k}f(y)|)/((1+m(x,V)\cdot\\&|x-y|)^{N-4kk_0/(k_0+1)}|x-y|^{n-4+j})\mathrm{d}y.\end{aligned}\quad(9)$$

令 $r=1/m(x,V)$，由归纳假设易知(9)式能被以下(10)式所控制:

$$\begin{aligned}&C_N m(x,V)^{4-j}\int_{\mathbb{R}^n}(M^{(k)}f(y))/((1+m(x,V)\cdot\\&|x-y|)^{N-4kk_0/(k_0+1)}|x-y|^{n-4+j})\mathrm{d}y\leqslant\\&C_N\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\int_{2^{i-1}r\leqslant|x-y|\leqslant 2^i r}(M^{(k)}f(y))/(r^{4-j}\cdot\\&(1+r^{-1}|x-y|)^{N-4kk_0/(k_0+1)}|x-y|^{n-4+j})\cdot\\&\mathrm{d}y\leqslant C_N\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\int_{|x-y|\leqslant 2^i r}(M^{(k)}f(y))/(r^{4-j}\cdot\\&(1+2^{i-1})^{N-4kk_0/(k_0+1)}(2^{i-1}r)^{n-4+j})\mathrm{d}y\leqslant\\&C_N 2^n\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{2^{(i-1)(4-j)}}{(1+2^{i-1})^{N-4kk_0/(k_0+1)}}\frac{1}{(2^i r)^n}\cdot\\&\int_{|x-y|\leqslant 2^i r}M^{(k)}f(y)\mathrm{d}y\leqslant C_N 2^n\cdot\\&\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{2^{(i-1)(4-j)}}{(1+2^{i-1})^{N-4kk_0/(k_0+1)}}M^{(k+1)}f(y)\leqslant\\&C(n,N)M^{(k+1)}f(y).\end{aligned}\quad(10)$$

在(10)式倒数第 2 个式子中取充分大的 N，即得所求级数收敛. 从而定理的结论对 $m=k+1$ 也成立，于是定理得证.

注 3 在(8)式中取 $j=0$，$m\geqslant 1$，此即对应为定理 B (ii).

接下来我们给出定理 1 的证明.

由 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$ 及引理 7 的结论，再利用 H-L 极大算子 M 的 $L^p(1<p\leqslant\infty)$ 有界性很容易得出定理 1 的结论.

最后给出定理 2 的证明.

由逆 Hölder 函数类 $\mathfrak{B}_q(1<q<\infty)$ 的自提升性知，对某些 $q_1>q_0$，$V\in\mathfrak{B}_{q_1}$.

设 $Tf(x)=V(x)^{2-j/2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_x^j\varGamma_H(x,y)f(y)\mathrm{d}y$，则 T 的对偶算子可表示为:

$$T^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_y^j\varGamma_H(y,x)V(y)^{2-j/2}f(y)\mathrm{d}y.$$

由算子的对偶性质，只须证

$$\|T^*f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ p_0'\leqslant p\leqslant\infty.$$

首先考虑 $n/2\leqslant q_0<q_1<2n/(4-j)$ 的情形. 令 $r=1/m(x,V)$，选取 t 和 p_1 满足 $1/t=2/q_1-(4-j)/n$, $1/p_1=1-(4-j/2)/q_1+(4-j)/n$，于是有:

$$1/t+(2-j/2)/q_1+1/p_1=1.$$

由 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned}&|T^*f(x)|=|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2^{k-1}r<|y-x|\leqslant 2^k r}\nabla_y^j\Gamma_H(y,x)V(y)^{2-j/2}\cdot\\&f(y)\mathrm{d}y|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\int_{2^{k-1}r<|y-x|\leqslant 2^k r}|\nabla_y^j\Gamma_H(y,x)|^t\cdot\\&\mathrm{d}y)^{1/t}(\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}V(y)^{q_1}\mathrm{d}y)^{(2-j/2)/q_1}\cdot\\&(\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}|f(y)|^{p_1}\mathrm{d}y)^{1/p_1}.\end{aligned}$$

由引理 5 和引理 2 可知:

$$\begin{aligned}&(\int_{2^{k-1}r<|y-x|\leqslant 2^k r}|\nabla_y^j\varGamma_H(y,x)|^t\mathrm{d}y)^{1/t}\leqslant\\&C_N(2^k r)^{2n/q_1-n}/(1+2^k)^N.\end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned}&|T^*f(x)|\leqslant C_N\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(2^k r)^{4-j}}{(1+2^k)^N}(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}V(y)^{q_1}\cdot\\&\mathrm{d}y)^{(2-j/2)/q_1}(1/(2^k r)^n\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}|f(y)|^{p_1}\cdot\\&\mathrm{d}y)^{1/p_1}\leqslant C_N\{M(|f|^{p_1})(x)\}^{1/p_1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(2^k r)^{4-j}}{(1+2^k)^N}\cdot\\&(1/(2^k r)^n\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}V(y)\mathrm{d}y)^{2-j/2},\end{aligned}\quad(11)$$

(11)式中第 2 个不等式成立是根据 H-L 极大算子 M 的定义和逆 Hölder 类 $\mathfrak{B}_{q_1}$ 的定义. 接下来首先估计

$$I=:(2^k r)^{4-j}(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{|y-x|\leqslant 2^k r}V(y)\mathrm{d}y)^{2-j/2}.$$

当 $k>0$ 时，由命题 1 和定义 2 可得:

$$\begin{aligned}&I\leqslant(2^k r)^{4-j}(\frac{C_0{}^k}{(2^k r)^n}\int_{|y-x|\leqslant r}V(y)\mathrm{d}y)^{2-j/2}\leqslant\\&(\frac{C_0{}^k}{(2^k)^{n-2}}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{|y-x|\leqslant r}V(y)\mathrm{d}y)^{2-j/2}\leqslant\\&C_0{}^{(2-j/2)k}2^{(2-n)(2-j/2)k}\leqslant C(2^k)^{N_0},\end{aligned}$$

这里 $N_0<0$.

当 $k\leqslant 0$ 时，由引理 6 可得:

$$\begin{aligned}&I\leqslant(2^k r)^{4-j}(1/(2^k r)^2(r/(2^k r))^{n/q_1-2}\cdot\\&\frac{1}{r^{n-2}}\int_{|y-x|\leqslant r}V(y)\mathrm{d}y)^{2-j/2}\leqslant(2^k)^{(2-n/q_1)(2-j/2)}.\end{aligned}$$

综合上述 2 种情况，取 N 充分大时，可得:

$$|T^* f(x)| \leqslant C\{M(|f|^{p_1})(x)\}^{1/p_1},$$

再由 H-L 极大算子 M 的 $L^p(1<p\leqslant\infty)$ 有界性易得:

$$\|T^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad p_1<p\leqslant\infty,$$

于是由 $p_0'>p_1$ 可得要证的结论成立.

其次, 我们考虑 $q_1 \geqslant 2n/(4-j)$ 的情形, 再由 $\mathfrak{B}_q$ 的自提升性质, 可设 $q_1>2n/(4-j)$, 于是由注 1 可知, $V\in\mathfrak{B}_{2n/(4-j)}$, 再由引理 4 可得:

$$|T^* f(x)| \leqslant C_N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+2^k)^N} \frac{1}{(2^k r)^{n-4+j}} \cdot$$

$$\int_{|y-x|\leqslant 2^k r} V(y)^{2-j/2} |f(y)| \mathrm{d}y \leqslant C_N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+2^k)^N} \cdot$$

$$C_N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(2^k r)^{4-j}}{(1+2^k)^N} \Big(\frac{1}{(2^k r)^n} \int_{|y-x|\leqslant 2^k r} V(y)^{q_1} \cdot$$

$$\mathrm{d}y\Big)^{(2-j/2)/q_1} \Big(1/(2^k r)^n \int_{|y-x|\leqslant 2^k r} |f(y)|^{p_1} \mathrm{d}y\Big)^{1/p_1},$$

这里 $1/p_1 = 1-(2-j/2)/q_1$. 因此由第一种情形证明思路可得结论同样成立.

参考文献:

[1] Fefferman C. The uncertainly principle[J]. Bull Amer Math Soc, 1983, 9:129-206.

[2] Zhong J. Harmonic analysis for some Schrödinger type operators[D]. Princeton University, 1993.

[3] Shen Z. L^p estimates for Schrödinger type operators with certain potentials[J]. Annales de I'Institut Fourier, 1995, 45(2):513-546.

[4] Sugano S. L^p estimates for some Schrödinger type operators[C]//Kyoto University Research Information Repository. Kyoto: Kyoto University, 2001:10-16.

[5] Sugano S. L^p estimates for Schrödinger type operators and a Calderón-Zygmund operator of Schrödinger type[J]. Tokyo J Math, 2007, 30(1):179-197.

[6] Tao X, Wang H. On the neumann problem for the Schrödinger equations with singular potentials in Lipschitz domains[J]. Canad J Math, 2004, 56(3):655-672.

[7] Liu Yu, Ding Youzheng. Some estimates of Schrödinger type operators with certain nonnegative potentials [EB/OL]. [2008-01-18]. http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2008/ 214030.abs.html.

[8] Gehring F. The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi-conformal mapping[J]. Acta Math, 1973, 130: 265-277.

[9] Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983.

[10] 周民强. 调和分析讲义(实变方法)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999.

[11] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

L^p Estimates Related to Some Operators of Schrödinger Type

FANG Yi[1], TAO Xiang-xing[2*]

(1. Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2. Faculty of Science, Zhejiang University of Science & Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Some L^p estimates related to operators of Schrödinger type $H=(-\Delta)^2+V^2$ are obtained, and the range of the index p is studied in the case of the potential V satisfying different conditions.

Key words: Schrödinger type operator; reverse Hölder class; fundamental solution; L^p estimates

（责任编辑　史小丽）