文章编号:1001-5132（2010）01-0056-03

k-广义酉矩阵与 k-广义 Hermite 矩阵的张量积和诱导矩阵

郑建青

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要: 利用矩阵的张量积和诱导矩阵的性质，得到了有限个 k-广义酉矩阵的张量积和诱导矩阵为 k-广义酉矩阵，有限个 k-广义 Hermite 矩阵的张量积和诱导矩阵为 k-广义 Hermite 矩阵. 并把 2007 年候谦民等结果中广义酉矩阵推广到 k-广义酉矩阵，广义 Hermite 矩阵推广到 k-广义 Hermite 矩阵.

关键词: k-广义 Hermite 矩阵；k-广义酉矩阵；张量积；诱导矩阵

中图分类号: O152.2 **文献标识码:** A

1 引言和记号

酉矩阵和 Hermite 矩阵的研究已取得了丰硕成果，在线性系统、现代经济学、控制理论等学科都有很好的应用. 随着研究的深入和应用的需要，人们对其已有多种推广. 文献[1]对拟酉矩阵，拟 Hermit 矩阵作了研究；文献[2]对广义酉矩阵，广义 Hermit 矩阵作了研究；文献[3]研究了有限个广义酉矩阵与有限个广义(斜)Hermite 矩阵的张量积和诱导矩阵；文献[4-5]提出了 k-广义酉矩阵，k-广义 Hermite 矩阵的概念，并对其若干基本性质进行了研究. 笔者在文献[4-5]的基础上，利用张量积和诱导矩阵的性质，得到了有限个 k-广义酉矩阵的张量积和诱导矩阵仍为 k-广义酉矩阵，有限个 k-广义 Hermite 矩阵的张量积和诱导矩阵仍为 k-广义 Hermite 矩阵，推广了文献[3]相应的结果.

为讨论方便，采用以下记号：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个矩阵，记共轭转置矩阵为 A^*，共轭次转置矩阵为 $A^{(*)}$，n 阶单位矩阵为 E_n，2 个矩阵的张量积为 $A\otimes B$，$m\times n$ 复矩阵集为 $C^{m\times n}$，n 阶复可逆矩阵集为 C_n^n，设 $A_i\in C^{m_i\times n_i}\,(i=1,2,\cdots,r)$，记所有 A_i 的张量积为 $\otimes_1^r A_i$.

设 $\Gamma_{m,n}$ 是不超过 n 的 m 个正整数组成的序列集合，即 $\Gamma_{m,n}=\{\alpha=(\alpha(1),\cdots,\alpha(m))\,|\,1\leqslant\alpha(i)\leqslant n,\ i=1,2,\cdots,m\}$，$S_m$ 为 m 阶置换群，G 是 S_m 的子群. $\chi:G\to C$ (复数域)是次数为 1 的复特征标，在 $\Gamma_{m,n}$ 中，定义一个关于 G 的等价关系：当且仅当存在置换 $\sigma\in G$，使 $\alpha\sigma=(\alpha\sigma(1),\alpha\sigma(2),\cdots,\alpha\sigma(m))=\beta$ 时，α 等价于 β，记作 $\alpha\sim\beta$.

由序列 α 所确定的 G 的等价类是集合 $\Gamma_\alpha=\{\alpha\sigma\,|\,\sigma\in G\}$，并称它为 $\Gamma_{m,n}$ 中 α 的 G-轨道，每个轨道中按字母排列的第 1 名序列所组成的轨

收稿日期：2009-05-06. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：宁波市自然科学基金（2006A610032）.
作者简介：郑建青（1965－），女，浙江宁波人，讲师，主要研究方向：矩阵论. E-mail: zhengjianqing@nbu.edu.cn

道代表集用 Δ 表示.

对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$， $G_\alpha=(\sigma\in G\mid\alpha\sigma=\alpha)$ 是 G 的子群，称为 G 对 α 的稳定子群. 引进一个序列集合 $\overline{\Delta}=\{\alpha\in\Delta\mid\sum_{a\in G_\alpha}\chi(\sigma)\neq 0\}$，它是 Δ 中使 $G_\alpha\subset Ker\chi$ 的一切 α 的集合. $|\overline{\Delta}|$ 表示集合 $\overline{\Delta}$ 的元素个数，其中 $|\overline{\Delta}|=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}/|G|$， $c(\sigma)$ 是 σ 分解为不相交的循环置换乘积中因子的数目(包括长度为 1 的循环置换).

设 $\chi(e)=1$(e 为恒等置换), 集合 $\overline{\Delta}$ 不空并按字典次序排列, 对于 $A\in C^{n\times n}$, A 关于 G 和 χ 的诱导矩阵 $K(A)\in C^{|\overline{\Delta}|\times|\overline{\Delta}|}$ 定义为:

$$K(A)_{\alpha,\beta}=1/\sqrt{|G_\alpha\|G_\beta|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)},\quad \alpha,\beta\in\overline{\Delta}.$$

定义 1[4]　设 $A\in C^{n\times n}$，若存在 $P\in C_n^n$ 及常数 k，使 $A^*PA=kP$, 则称 A 为 n 阶 k-P-广义酉矩阵, 简称 k-广义酉矩阵, 记为 $A\in U_P^k=\{A\in C^{n\times n}\mid A^*PA=kP\}$. 特别地, 当 $k=1$ 时, $U_P^k=\{A\in C^{n\times n}\mid A^*PA=P\}$ 为 n 阶广义酉矩阵集[2].

定义 2[5]　设 $A\in C^{n\times n}$，若存在 $P\in C_n^n$ 及常数 k，使 $A^*P=kPA$，则称 A 为 n 阶 k-P-广义 Hermite 矩阵，简称 k-广义 Hermite 矩阵，记为 $A\in H_P^k=\{A\in C_n^n\mid A^*P=kPA\}$. 特别地，当 $k=1$ 时($k=-1$), 为 n 阶广义(斜)Hermite 矩阵[2]. 当 $k=1$ ($k=-1$), 且 $P^{(*)}=P$ 时，$H_P^1=\{A\in C_n^n\mid A^*P=PA\}$ 为 n 阶(反)拟 Hermite 矩阵集[1].

2　主要结果

引理 1[6]　设 $A_i\in C^{m_i\times n_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 则 $\otimes_1^r A_i=0\Leftrightarrow$ 存在某个 $A_i=0$.

引理 2[6]　设 $A_i,B_i\in C^{m_i\times n_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 则 $\otimes_1^r A_i=\otimes_1^r B_i\neq 0\Leftrightarrow A_i=\lambda_i B_i\neq 0$ ($i=1,2,\cdots,r$), 且 $\prod_{i=1}^{r}\lambda_i=1$.

引理 3[7]　设 $K(A)$, $K(B)$ 分别为 $A\in C^{n\times n}$, $B\in C^{n\times n}$ 的关于 G 和 χ 的诱导矩阵, 集合 $\overline{\Delta}$ 不空, 且元素按字典次序排列, 则有: (1) $K(E_n)=E_{|\overline{\Delta}|}$; (2) $K(A^*)=K(A)^*$; (3)若 A 是可逆的, 则 $K(A^{-1})=K(A)^{-1}$; (4) $K(AB)=K(A)K(B)$; (5) $K(A)=K(B)\Leftrightarrow B=\xi A$, 且 $\xi^{|\overline{\Delta}|}=1$.

定理 1　(1)若 $A_i\in U_{P_i}^{k_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 则 $\otimes_1^r A_i\in U^k_{\otimes_1^r P_i}$, 其中 $k=\prod_{i=1}^{r}k_i$; (2)若 $A\in U_P^k$, 则 $K(A)\in U^{k^{|\overline{\Delta}|}}_{K(P)}$.

证明　(1) 公式 $(\otimes_1^r A_i)^*=\otimes_1^r A_i^*$ 与 $(A_1\otimes B_1)\cdot(A_2\otimes B_2)\cdots(A_r\otimes B_r)=(A_1A_2\cdots A_r)\otimes(B_1B_2\cdots B_r)$ 对每个 i, 由 $A_i\in U_{P_i}^{k_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 知 $A_i^*P_iA_i=k_iP_i$ ($i=1,2,\cdots,r$), 于是 $(\otimes_1^r A_i)^*(\otimes_1^r P_i)(\otimes_1^r A_i)=\otimes_1^r(A_i^*P_iA_i)=\otimes_1^r(k_iP_i)=(\prod_{i=1}^{r}k_i)\otimes_1^r P_i=k\otimes_1^r P_i$, 从而 $\otimes_1^r A_i\in U^k_{\otimes_1^r P_i}$.

(2) 由 $A\in U_P^k$, 有 $A^*PA=kP$. 由 P 可逆, 得 $P^{-1}APA=kE_n$. 由引理 3 可知:

$$K(P)^{-1}K(A)^*K(P)K(A)=K(P^{-1})K(A^*)K(P)\cdot K(A)=K(P^{-1}A^*PA)=K(kE_n)=k^{|\overline{\Delta}|}E_{|\overline{\Delta}|},$$

即 $K(A)^*K(P)K(A)=k^{|\overline{\Delta}|}K(P)$, 故 $K(A)\in U^{k^{|\overline{\Delta}|}}_{K(P)}$.

反之不一定正确.

定理 2　(1)设 $\otimes_1^r A_i\in U^k_{\otimes_1^r P_i}$, $k\neq 0$, 则 $A_i^*P_iA_i=\lambda_iP_i$ ($i=1,2,\cdots,r$), 且 $\prod_{i=1}^{r}\lambda_i=k$; (2)设 $K(A)\in U^k_{K(P)}$, $k\neq 0$, 则 $A^*PA=\xi P$, 且 $\xi^{|\overline{\Delta}|}=k$.

证明　(1) 因为 $\otimes_1^r P_i\neq 0$, 所以由引理 1 知每个 $P_i\neq 0$, 又由 $\otimes_1^r A_i\in U^k_{\otimes_1^r P_i}$, 得:

$$(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_r)^*(P_1\otimes P_2\otimes\cdots\otimes P_r)(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_r)=k(P_1\otimes P_2\otimes\cdots\otimes P_r),$$

$$(A_1^*P_1A_1)\otimes(A_2^*P_2A_2)\otimes\cdots\otimes(A_r^*P_rA_r)=k(P_1\otimes P_2\otimes\cdots\otimes P_r).$$

根据引理 2, 有 $A_i^*P_iA_i=\lambda_iP_i$ ($i=1,2,\cdots,r$), 且 $\prod_{i=1}^{r}\lambda_i=k$.

(2) 由 $K(A)\in U^k_{K(P)}$, 知 $K(A^*)K(P)K(A)=kK(P)$, 而 $K(A^*)K(P)K(A)=K(A^*PA)$, 故 $K(A^*PA)=kK(P)$.

再由引理 3 得 $A^*PA=\xi P$, 且 $\xi^{|\Delta|}=k$.

定理 3　如果 $A_i\in H_{P_i}^{k_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 则 $\otimes_1^r A_i\in H^k_{\otimes_1^r P_i}$, 其中 $k=\prod_{i=1}^{r}k_i$.

证明　因为 $A_i\in H_{P_i}^{k_i}$ ($i=1,2,\cdots,r$), 所以 $A_i^*P_i=kP_iA_i$ ($i=1,2,\cdots,r$), 从而 $(\otimes_1^r A_i)^*(\otimes_1^r P_i)=(\otimes_1^r A_i^*)\cdot(\otimes_1^r P_i)=\otimes_1^r(A_i^*P_i)=\otimes_1^r(k_iP_iA_i)=(\prod_{i=1}^{r}k_i)\otimes_1^r(P_iA_i)=k(\otimes_1^r P_i)(\otimes_1^r A_i)$, 故 $\otimes_1^r A_i\in H^k_{\otimes_1^r P_i}$.

反之不一定正确，但有

定理 4 设 $\otimes_1^r A_i \in H^k_{\otimes_1^r P_i}$，则有 $A_i^* P_i = \lambda_i P_i A_i$，$(i = 1, 2, \cdots, r)$，且 $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i = k$.

证明 因为 $\otimes_1^r A_i \neq 0$，所以每个 $A_i \neq 0$，且对每个 $P_i \in C_n^n$，由条件

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)^* (P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_r) = k(P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_r)(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r),$$

得
$$(A_1^* P_1) \otimes (A_2^* P_2) \otimes \cdots \otimes (A_r^* P_r) = k(P_1 A_1) \otimes (P_2 A_2) \otimes \cdots \otimes (P_r A_r).$$

显然 $(P_1 A_1) \otimes (P_2 A_2) \otimes \cdots \otimes (P_r A_r) \neq 0$，若不然，由引理 1 存在 i，使 $P_i A_i = 0$，而 P_i 可逆，得 $A_i = 0$，这与 $\otimes_1^r A_i \neq 0$ 矛盾，于是根据引理 2，有 $A_i^* P_i = \lambda_i P_i A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$，且 $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i = k$.

定理 5 若 $A \in H_P^k$，$\chi(e) = 1$，G 是 m 阶置换群 S_m 的子群，集合 $\overline{\Delta}$ 不空并按字典次序排列，则 A 关于 G 与 χ 的诱导矩阵 $K(A) \in H_{K(P)}^{k\overline{\Delta}}$.

证明 对于 $A \in C^{n \times n}$，集合 $\overline{\Delta}$ 不空且元素按字典次序排列，A 关于 G 与 χ 的诱导矩阵 $K(A) \in C^{|\overline{\Delta}| \times |\overline{\Delta}|}$，则 $K(kA) = k^{|\overline{\Delta}|} K(A)$，由条件 $A \in H_P^k$，知 $A^* P = kPA = P(kA)$. 由 P 可逆得 $P^{-1} A^* P = kA$，由引理 3 得:

$$K(P)^{-1} K(A)^* K(P) = K(P^{-1}) K(A^*) K(P) = K(P^{-1} A^* P) = K(kA) = k^{|\overline{\Delta}|} K(A),$$

即 $K(A)^* K(P) = k^{|\overline{\Delta}|} K(P) K(A)$，从而 $K(A) \in H_{K(P)}^{k^{|\overline{\Delta}|}}$.

在定理 1~5 中，取 $k = 1$ 得广义 Hermite 矩阵相应结果，$k = -1$ 得广义(斜)Hermite 矩阵相应结果[3].

参考文献:

[1] 袁晖坪. 拟酉矩阵与拟 Hermite 矩阵[J]. 数学理论与应用, 2001, 21(2):21-25.

[2] 袁晖坪. 广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵[J]. 数学杂志, 2003, 23(3):375-378.

[3] 侯谦民, 刘修生. 广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵的张量积与诱导矩阵[J]. 数学杂志, 2007, 27(5):583-587.

[4] 袁晖坪. k-广义酉矩阵[J]. 东北师范大学学报: 自然科学版, 2007, 49(3):22-26.

[5] 郑建青. 关于 k-广义 Hermite 矩阵[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2009, 32(4):253-256.

[6] 王伯英. 多重线性代数[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.

[7] 王心介. 关于 $n \times n$ 复矩阵与其诱导矩阵之间的关系[J]. 华中理工大学学报, 1993, 21(3):183-187.

Tensor Products and the Induced Matrix about *k*-generalized Unitary Matrix and *k*-generalized Hermite Matrix

ZHENG Jian-qing

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Using the property of tensor product and induced matrix, both the tensor product and induced matrix with the finite *k*-generalized unitary matrices are obtained, and obtained also are both the tensor product and induced matrix with the finite *k*-generalized Hermite matrices. In this paper, the author extends the results of the matrix of the finite generalized unitary matrices derived by Hou Qian-min etc. (2007) to *k*-generalized unitary matrices, and the generalized Hermite matrix to *k*-generalized Hermite matrices.

Key words: *k*-generalized Hermite matrix; *k*-generalized unitary matrix; tensor product; induced matrix

CLC number: O152.2 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）