文章编号:1001-5132（2010）04-0083-04

态射的加权 Moore-Penrose 逆

章劲鸥

（宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211）

摘要: 讨论带有对合$*$的范畴C中具有满单分解态射的加权 Moore-Penrose 逆, 给出了具有满单分解态射的加权 Moore-Penrose 逆存在的几个充要条件以及具有满单分解的加权 Moore-Penrose 逆的表达式, 所得结论和公式包括了关于广义 Moore-Penrose 逆中的结果.

关键词: 范畴; 满单分解; 态射; 加权 Moore-Penrose 逆

中图分类号: O153.3 **文献标识码:** A

1 预备知识与引理

文献[1~3]中, 研究了带有对合$*$的范畴中态射的 Moore-Penrose 逆, 给出了具有满单分解态射 Moore-Penrose 逆存在的充要条件以及计算公式. 文献[4~6]中, 讨论了有满单分解态射广义 Moore-Penrose 逆存在的充要条件. 笔者在上述研究的基础上, 讨论了范畴中的态射的比广义 Moore-Penrose 逆更广泛的一类广义逆, 称之谓加权 Moore-Penrose 逆. 并且给出了具有满单分解态射的加权 Moore- Penrose 逆存在的几个充要条件以及表达式, 所得结论和公式包括了关于广义 Moore-Penrose 逆中的结果, 自然也包括了关于 Moore-Penrose 逆中的结果.

笔者用C表示带有对合$*$的范畴[2]. 对于C中 2 个对象X和Y, $M(X,Y)$表示所有态射$X\to Y$组成的集合. 对于$\varphi\in M(X,Y)$, $\eta\in M(Y,Z)$, 规定φ与η的乘积为$\varphi\eta: X\to Y\to Z$.

对于$X,Y\in C$, 给定$\alpha\in M(X,X)$, $\beta\in M(Y,Y)$.

定义 1 设$\varphi\in M(X,Y)$, 如果态射$\eta\in M(Y,X)$满足: (1) $\varphi\eta\varphi=\varphi$; (2) $\eta\varphi\eta=\eta$; (3) $(\alpha\varphi\eta)^*=\alpha\varphi\eta$; (4) $(\eta\varphi\beta)^*=\eta\varphi\beta$. 那么称态射$\eta$为态射$\varphi$的关于$\alpha$和$\beta$的一个加权 Moore-Penrose 逆. 记$\varphi^+_{\alpha,\beta}$.

满足定义 1 中(1)~(4)中的条件$(i),\cdots,(j)$的η称为φ的加权$\{i,\cdots,j\}$-逆. 用$\varphi_{\alpha,\beta}\{i,\cdots,j\}$表示$\varphi$的所有关于$\alpha$和$\beta$的加权$\{i,\cdots,j\}$-逆组成的集合.

定义 2 给定$\alpha\in M(X,X),\beta\in M(Y,Y)$. 设$\varphi\in M(X,Y)$, 如果存在态射$\xi\in M(X,X)$和$\zeta\in M(Y,Y)$使$\xi\alpha\varphi=\varphi,\varphi\beta\zeta=\varphi$, 则$\alpha$称为$\varphi$的左恒等化子, β称为φ的右恒等化子.

引理 1 设$\varphi\in M(X,Y)$, $\alpha\in M(X,X)$, $\beta\in M(Y,Y)$, 则(1)若φ关于α加权$\{1,3\}$-逆存在, 则$\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射. (2)若φ关于β加权$\{1,4\}$-逆存在, 则$\varphi\beta\varphi^*$是$*$-对称态射. (3)若$\varphi^+_{\alpha,\beta}$存在, 且α为φ的左恒等化子, β为φ的右恒等化子, 则φ的关于α和β的加权 Moore-Penrose 逆是唯一的.

证明 (1) 令$\eta=\varphi^{(1,3)}_\alpha$, 则$\varphi\eta\varphi=\varphi$, $(\alpha\varphi\eta)^*=\alpha\varphi\eta$, 因此$(\varphi^*\alpha\varphi)^*=\varphi^*\alpha^*\varphi=\varphi^*\eta^*\varphi^*\alpha^*\varphi=\varphi^*(\alpha\varphi\eta)^*\varphi=$

收稿日期: 2010-04-10. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 浙江省教育厅科研项目（2010253）.
作者简介: 章劲鸥（1974－）, 女, 浙江宁波人, 硕士/讲师, 主要研究方向: 矩阵论和态射. E-mail: zhangjinou@nbu.edu.cn

$\varphi^*\alpha\varphi\eta\varphi=\varphi^*\alpha\varphi$，故$\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射.

(2) 令$\eta=\varphi_\beta^{(1,4)}$，则$\varphi\eta\varphi=\varphi$, $(\eta\varphi\beta)^*=\eta\varphi\beta$, 因此$(\varphi\beta\varphi^*)^*=\varphi\beta^*\varphi^*=\varphi\beta^*\varphi^*\eta^*\varphi^*=\varphi(\eta\varphi\beta)^*\varphi^*=\varphi\eta\varphi\beta\varphi^*=\varphi\beta\varphi^*$，故$\varphi\beta\varphi^*$是$*$-对称态射.

(3) 若θ_1和θ_2都是φ的关于α和β的加权Moore-Penrose逆，则$\theta_1\varphi\beta=\theta_1\varphi\theta_2\varphi\beta=\theta_1\varphi\beta^*\varphi^*\theta_2^*=\theta_1\varphi\beta\varphi^*\theta_2^*=\beta^*\varphi^*\theta_1^*\varphi^*\theta_2^*=\beta^*\varphi^*\theta_2^*=\theta_2\varphi\beta$.

那么，$\theta_1\varphi\beta\zeta=\theta_2\varphi\beta\zeta$，由于$\beta$为$\varphi$的右恒等化子，因此$\theta_1\varphi=\theta_2\varphi$. 由此得$\theta_1\varphi\theta_1=\theta_2\varphi\theta_1$. 于是，

$$\theta_1=\theta_2\varphi\theta_1. \tag{1}$$

又由于

$$\alpha\varphi\theta_1=\alpha\varphi\theta_2\varphi\theta_1=\theta_2^*\varphi^*\alpha^*\varphi\theta_1=\theta_2^*\varphi^*\alpha\varphi\theta_1=$$
$$\theta_2^*\varphi^*\theta_1^*\varphi^*\alpha^*=\theta_2^*\varphi^*\alpha^*=\alpha\varphi\theta_2.$$

那么，$\xi\alpha\varphi\theta_1=\xi\alpha\varphi\theta_2$. 由条件知，$\varphi\theta_1=\varphi\theta_2$. 于是，$\theta_2\varphi\theta_1=\theta_2\varphi\theta_2$，即

$$\theta_2\varphi\theta_1=\theta_2. \tag{2}$$

由(1)和(2)式得$\theta_1=\theta_2$. 所以，φ的关于α和β的加权Moore-Penrose逆是唯一的. 证毕.

引理**2** 设$\varphi\in M(X,Y)$且$\varphi=\varphi_1\varphi_2$是$\varphi$的满单分解，$\alpha\in M(X,X)$, $\beta\in M(Y,Y)$，则(1) $\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射的充要条件$\varphi_1^*\alpha\varphi_1$是$*$-对称态射. (2) $\varphi\beta\varphi^*$是$*$-对称态射的充要条件$\varphi_2\beta\varphi_2^*$是$*$-对称态射.

证明 $\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射，则有：

$$\varphi_2^*\varphi_1^*\alpha^*\varphi_1\varphi_2=(\varphi^*\alpha\varphi)^*=\varphi^*\alpha\varphi=\varphi_2^*\varphi_1^*\alpha\varphi_1\varphi_2.$$

由于φ_2是单态射，φ_2^*是满态射，得$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^*=\varphi_1^*\alpha\varphi_1$，即$\varphi_1^*\alpha\varphi_1$是$*$-对称态射. $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$是$*$-对称态射，则有$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^*=\varphi_1^*\alpha^*\varphi_1=\varphi_1^*\alpha\varphi_1$. 等式左边乘$\varphi_2^*$，右边乘$\varphi_2$，得$(\varphi^*\alpha\varphi)^*=\varphi^*\alpha\varphi$. 即$\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射. 同理可得(2). 证毕.

引理 **3** 设$\varphi\in M(X,Y)$, $\alpha\in M(X,X)$, $\beta\in M(Y,Y)$，且α为φ的左恒等化子，β为φ的右恒等化子，若$\varphi_{\alpha,\beta}^+$存在的充要条件是$\varphi^*\alpha\varphi$和$\varphi\beta\varphi^*$均是$*$-对称态射且态射方程$x\varphi^*\alpha\varphi=\varphi$和$\varphi\beta\varphi^*y=\varphi$均有解. 此时有$\varphi_{\alpha,\beta}^+=\beta^*\delta^*\varphi\sigma^*\alpha^*=\varphi_\beta^{(1,4)}\varphi\varphi_\alpha^{(1,3)}$，其中$\sigma$和$\delta$是态射方程$x\varphi^*\alpha\varphi=\varphi$和$\varphi\beta\varphi^*y=\varphi$的解.

2 满态射和单态射的加权 Moore-Penrose 逆

定理 **1** 设$\varphi\in M(X,Y)$是满态射，$\alpha\in M(X,X)$，且α为φ的左恒等化子. 那么下列条件等价：(1) φ关于α加权$\{1,3\}$-逆存在. (2) $\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射且左可逆. (3) $\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射且右可逆. (4) $\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射且可逆. (5)对任意$*$-对称态射$\gamma\in M(Y,Y)$，φ关于α和γ的加权Moore-Penrose逆存在，此时$\varphi_{\alpha,\gamma}^+=(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2): 令$\eta=\varphi_\alpha^{(1,3)}$, $\rho=\eta\xi\eta^*$由引理1知，$\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射，且有：

$$\varphi\rho(\varphi^*\alpha\varphi)=\varphi\eta\xi\eta^*(\varphi^*\alpha\varphi)=\varphi\eta\xi(\alpha\varphi\eta)^*\varphi=$$
$$\varphi\eta\xi\alpha\varphi\eta\varphi=\varphi\eta\xi\alpha\varphi=\varphi\eta\varphi=\varphi. \tag{3}$$

因φ是满态射，由(3)式左消去φ，有$\rho\varphi^*\alpha\varphi=I_Y$，故$\varphi^*\alpha\varphi$左可逆.

(2)$\Rightarrow$(3): 由$\varphi^*\alpha\varphi$左可逆可知道，存在ρ使$\rho\varphi^*\alpha\varphi=1_Y$，故$\varphi^*\alpha\varphi$是满态射. 由于$\varphi^*\alpha\varphi$是$*$-对称态射，$\varphi^*\alpha\varphi=(\varphi^*\alpha\varphi)^*$是单态射，由$\varphi^*\alpha\varphi\rho\varphi^*\alpha\varphi=\varphi^*\alpha\varphi=I_Y\varphi^*\alpha\varphi$右消去$\varphi^*\alpha\varphi$，得到$\varphi^*\alpha\varphi\rho=I_Y$. 因此$\varphi^*\alpha\varphi$右可逆.

(3)$\Rightarrow$(4): 若$\varphi^*\alpha\varphi$右可逆，与(2)$\Rightarrow$(3)同理可知$\varphi^*\alpha\varphi$左可逆. 故$\varphi^*\alpha\varphi$可逆.

(4)$\Rightarrow$(5): 因$\varphi^*\alpha\varphi$可逆，令$\eta=(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*$，则$\varphi\eta\varphi=\varphi(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*\varphi=\varphi(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha\varphi=\varphi$.

$$\eta\varphi\eta=(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha\varphi(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*=$$
$$(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*=\eta.$$
$$(\alpha\varphi\eta)^*=(\alpha\varphi(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*)^*=$$
$$\alpha\varphi(\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha^*=\alpha\varphi\eta.$$

对于任意$*$-对称态射$\gamma\in M(Y,Y)$，$(\eta\varphi\gamma)^*=((\varphi^*\alpha\varphi)^{-1}\varphi^*\alpha\varphi\gamma)^*=\gamma^*=\gamma=\eta\varphi\gamma$. η为φ关于α和γ的加权Moore-Penrose逆. (5)$\Rightarrow$(1): 显然.

定理 **2** 设$\varphi\in M(X,Y)$是单态射，$\beta\in M(Y,Y)$，且β为φ的右恒等化子. 那么下列条件等价：(1) φ关于β加权$\{1,4\}$-逆存在. (2) $\varphi\beta\varphi^*$是$*$-对称态射且左可逆. (3) $\varphi\beta\varphi^*$是$*$-对称态射且右可逆. (4)

$\varphi\beta\varphi^*$ 是 $*$-对称态射且可逆. (5)对任意 $*$-对称态射 $\lambda\in M(X,X)$, φ 关于 λ 和 β 的加权 Moore-Penrose 逆存在, 此时 $\varphi^+_{\lambda,\beta}=\beta^*\varphi^*(\varphi\beta\varphi^*)^{-1}$.

3　具有满单分解态射的加权 Moore-Penrose 逆

定理3　设 $\varphi\in M(X,Y)$ 且 $\varphi=\varphi_1\varphi_2$ 是 φ 的满单分解, $\alpha\in M(X,X)$, $\beta\in M(Y,Y)$, 且 α 为 φ 的左恒等化子, β 为 φ 的右恒等化子. 那么下列条件等价:

(1)　φ 关于 α 和 β 的加权 Moore-Penrose 逆存在.

(2)　$\varphi^*\alpha\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*$ 是 $*$-对称态射, $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆.

(3)　$\varphi^*\alpha\varphi_1$ 是满态射, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 是单态射; 对任意 $*$-对称态射 $\lambda\in M(Z,Z)$, $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 关于 β 和 λ 的加权 Moore-Penrose 逆存在. $\varphi_2\beta\varphi^*$ 关于 λ 和 α 的加权 Moore-Penrose 逆存在.

(4)　$\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是 $*$-对称态射且可逆. 此时有 $\varphi^+_{\alpha,\beta}=\beta^*\varphi_2^*(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}\varphi_1^*\alpha^*$. 其中 $\sigma=(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*$, 为 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 的一个左逆. $\delta=\alpha^*\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}$, 为 $\varphi_2\beta\varphi^*$ 的一个右逆.

(5)　$\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是 $*$-对称态射, $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射且 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 是满(单)态射; 对任意 $*$-对称态射 $\lambda\in M(Z,Z)$, $\varphi_1^*\alpha\varphi_1,\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 关于 λ 和 λ 的加权 Moore-Penrose 逆存在.

(6)　$\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是 $*$-对称态射, $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射且 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 是满(单)态射; 且 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 均存在(1)逆.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2): 若 φ 关于 α 和 β 的加权 Moore-Penrose 逆存在, 由引理 1 得 $\varphi^*\alpha\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*$ 是 $*$-对称态射. 记 $\eta=\varphi^+_{\alpha,\beta}$, 则

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi=\varphi\eta\varphi\eta\varphi=\varphi\eta\xi(\alpha\varphi\eta)^*\varphi=$$
$$\varphi\eta\xi\eta^*\varphi^*\alpha^*\varphi=\varphi_1\varphi_2\eta\xi\eta^*\varphi^*\alpha\varphi_1\varphi_2.$$

又因为 φ_1 是满态射, φ_2 是单态射, 因此 $\varphi_2\eta\xi\cdot\eta^*\varphi^*\alpha\varphi_1=I_Z$, 即 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, 同理可得 $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆.

(2) $\Rightarrow$ (1): 因为 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆, 所以存在态射 $\sigma\in M(Z,Y)$ 和 $\delta\in M(X,Z)$, 使得:

$$\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1=I_Z=\varphi_2\beta\varphi^*\delta.$$

两边同时左乘 φ_1, 右乘 φ_2, 得:

$$\varphi_1\sigma\varphi^*\alpha\varphi=\varphi=\varphi\beta\varphi^*\delta\varphi_2.$$

可知 $\varphi_1\sigma$ 和 $\delta\varphi_2$ 分别是态射方程 $x\varphi^*\alpha\varphi=\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*y=\varphi$ 的解, 因为 $\varphi^*\alpha\varphi,\varphi\beta\varphi^*$ 是 $*$-对称态射, 由引理 3 知 $\eta=\beta^*(\delta\varphi_2)^*\varphi(\varphi_1\sigma)^*\alpha^*$, 为 φ 关于 α 和 β 的加权 Moore-Penrose 逆.

(2) $\Rightarrow$ (4): 因 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆, 故存在态射 $\sigma\in M(Z,Y)$ 和 $\delta\in M(X,Z)$, 使 $\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1=I_Z=\varphi_2\beta\varphi^*\delta$. 则 $(\sigma\varphi_2^*)(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)=I_Z$,

$$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\sigma\varphi_2^*)\varphi_1^*=(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)\sigma\varphi_2^*(\varphi_1^*\alpha^*\varphi\sigma^*)\varphi_1^*=$$
$$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1)\varphi_2\sigma^*\varphi_1^*=$$
$$(\varphi_1^*\alpha\varphi\sigma^*)\varphi_1^*=(\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1)^*\varphi_1^*=I_Z\varphi_1^*.$$

因为 φ_1^* 是单态射, 所以 $(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\sigma\varphi_2^*)=I_Z$, 因此 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 可逆且 $(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}=\sigma\varphi_2^*$. 类似地可证明 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 可逆且 $(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}=\varphi_1^*\delta$.

因为 $\varphi^*\alpha\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*$ 都是 $*$-对称态射. 由引理 2 知 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是 $*$-对称态射.

(4) $\Rightarrow$ (2): 因为 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是 $*$-对称态射. 由引理 2 知 $\varphi^*\alpha\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*$ 都是 $*$-对称态射. 又因为 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都可逆, 令

$$\sigma=(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*,$$
$$\delta=\alpha^*\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1},$$

则有:

$$\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1=(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*\varphi^*\alpha\varphi_1=$$
$$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*\varphi_2^*\varphi_1^*\alpha\varphi_1=I_Z,$$
$$\varphi_2\beta\varphi^*\delta=\varphi_2\beta\varphi^*\alpha^*\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}=$$
$$\varphi_2\beta\varphi_2^*\varphi_1^*\alpha^*\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}=I_Z.$$

因此 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆. 得 φ 关于 α 和 β 的加权 Moore-Penrose 逆存在, 此时

$$\varphi^+_{\alpha,\beta}=\beta^*(\delta\varphi_2)^*\varphi(\varphi_1\sigma)^*\alpha^*=$$
$$\beta^*(\alpha\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2)^*\varphi(\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}\cdot$$
$$(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta)^*\alpha^*=\beta^*\varphi_2^*(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\cdot$$
$$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\varphi_2\beta\varphi_2^*)(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}\cdot$$

$$\varphi_1^*\alpha^* = \beta^*\varphi_2^*(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}\varphi_1^*\alpha^*.$$

$(2)\Rightarrow(3)$: $\varphi^*\alpha\varphi$ 和 $\varphi\beta\varphi^*$ 都是$*$-对称态射. 由引理 2 知 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 都是$*$-对称态射. 因为 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆, 因此 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 是满态射, $\varphi_2\beta\varphi^*$ 是单态射. 又由于(2)与(4)等价, 所以 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 均可逆. 设

$$\sigma = (\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*,$$

$$\delta = \alpha^*\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}.$$

则 $\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1 = I_Z = \varphi_2\beta\varphi^*\delta$. 因此 $\varphi^*\alpha\varphi_1\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1 = \varphi^*\alpha\varphi_1$, $\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1\sigma = \sigma$.

$$(\beta\varphi^*\alpha\varphi_1\sigma)^* = (\beta\varphi^*\alpha\varphi_1(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1}(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\cdot \varphi_2\beta^*)^* = (\beta\varphi_2^*(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^*)^* = \beta\varphi_2^*(\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}\varphi_2\beta^* = \beta\varphi^*\alpha\varphi_1\sigma,$$

$$(\sigma\varphi^*\alpha\varphi_1\lambda)^* = \lambda^* = \lambda = \sigma\varphi^*\alpha\varphi_1\lambda,$$

于是 $(\varphi^*\alpha\varphi_1)^+_{\beta,\lambda} = \sigma$.

类似可得: $(\varphi_2\beta\varphi^*)^+_{\lambda,\alpha} = \delta$.

$(3)\Rightarrow(2)$: 由 $(\varphi^*\alpha\varphi_1)(\varphi^*\alpha\varphi_1)^+_{\beta,\lambda}(\varphi^*\alpha\varphi_1) = (\varphi^*\alpha\varphi_1)$ 及 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 是满态射可知 $\varphi^*\alpha\varphi_1$ 左可逆, 类似地证明 $\varphi_2\beta\varphi^*$ 右可逆.

$(4)\Rightarrow(5)$: 由 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 左(右)可逆, 知 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射. 由 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 左(右)可逆, 知 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 是满(单)态射. 因为 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 和 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 均可逆, 所以 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射, $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 是满(单)态射, 且有:

$$(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^+_{\lambda,\lambda} = (\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{-1},\ (\varphi_2\beta\varphi_2^*)^+_{\lambda,\lambda} = (\varphi_2\beta\varphi_2^*)^{-1}.$$

$(5)\Rightarrow(4)$: 由 $(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^+_{\lambda,\lambda}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1) = (\varphi_1^*\alpha\varphi_1)$ 及 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射 可知 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 可逆. 类似地证明 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 可逆.

$(5)\Rightarrow(6)$: 显然.

$(6)\Rightarrow(4)$: 由 $(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)(\varphi_1^*\alpha\varphi_1)^{(1)}(\varphi_1^*\alpha\varphi_1) = (\varphi_1^*\alpha\varphi_1)$ 及 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 是满(单)态射, 可知 $\varphi_1^*\alpha\varphi_1$ 可逆. 类似地证明 $\varphi_2\beta\varphi_2^*$ 可逆.

参考文献:

[1] Miao Jianming, Robinson D W. The Moore-Penrose inverse of amorphism with factorization[J]. Linear Alg Appl, 1981, 40:129-141.

[2] 李桃生. 有满单分解态射的 Moore-Penrose 逆[J]. 数学学报, 1993, 36(1):60-67.

[3] 欧阳明曦. 态射的 Moore-Penrose 逆的构成[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 1999, 33(2):165-167.

[4] 刘晓冀. 态射的广义 Moore-Penrose 逆[J]. 数学杂志, 1998, 18(3):267-270.

[5] 张荣娥. 范畴中态射的广义 Moore-Penrose 逆[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2000, 13(1):1-5.

[6] 王志坚, 刘晓冀. 关于范畴中态射的广义 Moore-Penrose 逆[J]. 曲阜师范大学学报, 2002, 28(1):34-36.

On Weighted Moore-Penrose Inverses of Morphisms

ZHANG Jin-ou

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The weighted Moore-Penrose inverses of the morphisms with epic and monic factorization in general category with an involution $*$ are discussed. Some necessary and sufficient conditions for existence and some properties of the weighted Moore-Penrose inverse of the morphisms with epic and monic factorization are given.

Key words: category; with epic and monic factorization; morphism; weighted Moore-Penrose inverse

CLC number: O153.3 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）