

联立方程(8)~(15),注意到 $F_A = bF/l$, $F_B = aF/l$,解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = -\frac{Fb}{6EI} (l^2 - b^2), a_2 = 0, a_3 = \frac{Fb}{6EI} \\ b_0 &= \frac{Fa^3}{6EI}, b_1 = -\frac{Fa(a^2 + 2l^2)}{6EI} \\ b_2 &= \frac{Fa}{2EI}, b_3 = -\frac{Fa}{6EI} \end{aligned}$$

这和积分法得到的结果是一致的.

3 结语

本文方法及其算例表明:

(1) 方法具有普遍性,不论是静定还是超静定,也不论挠曲线方程是否分段,都可以解决.特别是复杂分布载荷作用下单跨超静定梁的求解尤具优势.

(2) 方法程式化,根据载荷形式确定挠曲线方程形式,边界条件给出待定系数满足的线性代数方程.

(3) 方法便捷,主要工作量是确定边界条件和解线性代数方程,一旦待定系数确定,挠曲线方程、转角方程、弯矩方程、剪力方程、支座反力可一并得到.

参考文献

- 刘鸿文. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 孙训芳, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2002
- 刘明超, 丁晓燕. 拉氏变换求解梁的挠曲线方程. 力学与实践, 2012, 34(2): 78-80
- 黄太川, 倪尔有. 求解超静定刚架的一种新方法. 力学与实践, 2003, 25(6): 65-66

(责任编辑: 胡漫)

超静定结构温度应力问题探讨

李忠芳^{*,1)} 马万征[†] 宛传平^{*} 陈丰^{*} 张华^{*}

^{*}(安徽科技学院机电与车辆工程学院, 安徽凤阳 233100)

[†](安徽科技学院城建与环境学院, 安徽凤阳 233100)

摘要 把温度应力问题分为两个过程求解. 先解除多余约束, 将超静定问题转化为静定问题, 使杆件自由伸长或缩短. 再按照原来的方式将所有杆件安装好, 由于温度升高后, 杆件的长度可能不再匹配, 所以会产生装配应力, 这时便转化为一般的装配应力问题. 这样便把耦合在一起的温度应力和拉压应力分解成两个过程, 令学生感到非常容易接受.

关键词 温度应力, 超静定, 装配应力

中图分类号: O341 文献标识码: A

DOI: 10.6052/1000-0879-12-068

超静定结构温度应力的求解^[1-5], 对许多同学来讲都不容易理解. 原因是变形引起应力还是应力引起变形, 是一个难分难解的疑问. 本文通过将问题拆解, 转化为一个静定问题的自由膨胀与超静定问题的装配应力问题.

1 超静定温度应力问题实例

如图 1 所示, 1, 2, 3 号杆的材料都相同, 长度分别为 $l, l, l \cos \beta$. 当温度由 T_1 变到 T_2 时, 求各杆的内力. (杆 1, 2, 3 的线膨胀系数为 $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3, \Delta T = T_2 - T_1$).

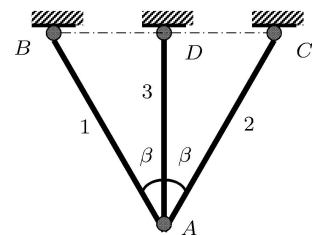


图 1 超静定结构简图

2 传统解法

(1) 选 A 点为研究对象, A 点受力如图 2.

根据图 2, 列平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= F_{N1} \sin \beta - F_{N2} \sin \beta = 0 \\ \sum Y &= F_{N1} \cos \beta + F_{N2} \cos \beta + F_{N3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

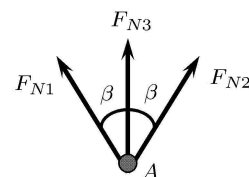


图 2 A 点受力分析

本文于 2012-02-20 收到.

1) 李忠芳, 女, 博士, 主要从事波动方程数值计算、检测实验研究. E-mail: lizhongfang_ahstu@yeah.net

(2) 杆 1, 2, 3 变形几何关系如图 3. 根据图 3, 列几何方程

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 \cos \beta \quad (2)$$

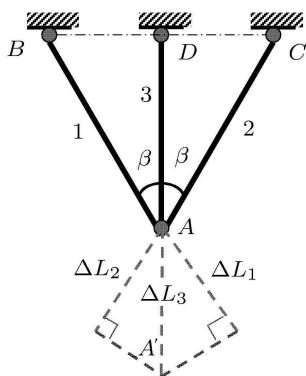


图 3 变形几何关系

(3) 根据温度应力公式, 列物理方程

$$\Delta L_i = \Delta T \alpha_i L_i + \frac{F_{N_i} L_i}{E_i A_i} \quad (3)$$

其中, $\Delta T \alpha_i L_i$ 是温度升高引起杆件的伸长量, $\frac{F_{N_i} L_i}{E_i A_i}$ 为内力引起的变形量.

综合式 (1),(2),(3), 可得

$$F_{N1} = F_{N2} = -\frac{E_1 A_1 (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^2 \beta \Delta T}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

$$F_{N3} = \frac{2 E_1 A_1 (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^3 \beta \Delta T}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

3 用拆解方法求解

同学们对物理方程 (3) 易产生疑惑. 有的同学会问, 温度升高会引起变形, 变形引起内力, 内力又会引起变形, 究竟怎样理解前后因果关系呢? 用以下拆解方法会将此疑虑完全取消, 使得同学们清楚地理解超静定问题温度变化后引起的内力求解过程.

3.1 静定问题的自由膨胀

(1) 在自由状态下, 各杆件伸长为

$$\Delta L_i = \Delta T \alpha_i L_i$$

(2) 各杆件伸长后, 杆 1 和杆 2 长度变为

$$l'_{1,2} = l + \Delta T \alpha_1 l$$

(3) 杆 3 长度变为

$$l'_3 = l \cos \beta + \Delta T \alpha_3 l \cos \beta$$

3.2 超静定问题的装配应力

(1) 温度升高后, 3 杆与 1, 2 杆的长度不再匹配, 由于约束的作用, 3 个杆件仍铰接在一起, 这就转化为一个装配应力问题, 如图 4. 假设 3 杆相对变短, 1, 2 杆长度乘以 $\cos \beta$ 与 3 杆的长度之差为

$$l'_{1,2} (\cos \beta) - l'_3 = \Delta T l \cos \beta (\alpha_1 - \alpha_3)$$

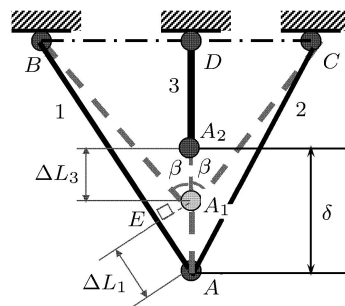


图 4 装配应力问题

杆 3 的长度误差为 $\delta = \Delta T l \cos \beta (\alpha_1 - \alpha_3)$.

(2) 装配应力问题的解

此问题的解^[4]为

$$F_{N1} = F_{N2} = -\frac{\delta}{l} \cdot \frac{E_1 A_1 \cos \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

$$F_{N3} = \frac{\delta}{l} \cdot \frac{2 E_1 A_1 \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

将 δ 的值代入上式, 得

$$F_{N1} = F_{N2} = -\frac{E_1 A_1 (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^2 \beta \Delta T}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

$$F_{N3} = \frac{2 E_1 A_1 (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^3 \beta \Delta T}{1 + 2 \cos^3 \beta E_1 A_1 / (E_3 A_3)}$$

本文将温度应力问题转化为装配应力问题求解, 使得问题更加简单易懂, 该方法可推广到其他超静定结构的温度应力问题.

参考文献

- 1 刘鸿文. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 2 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 1998
- 3 何结兵. 变形比较法解简单超静定梁的教学方法设计. 力学与实践, 2007, 29(2): 66
- 4 王太川, 倪尔有. 求解超静定刚架的一种新方法. 力学与实践, 2003, 25(6): 65-66
- 5 成祥生. 材料力学中某些超静定结构的一种解法. 力学与实践, 1979, 1(1): 46-47

(责任编辑: 胡漫)