6 Plaut RH, Suherman S, Dillard DA, et al. Deflections and buckling of a bent elastics in contact with a flat surface. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36(8): 1209-1229
7 Lee K. Post-buckling of uniform cantilever column under a combined load. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2001, 36(5): 813-816
8 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题. 力学与实践, 2003, 25(1): 1-5
9 刘延柱. 超大变形弹性细杆几何形态的拓扑描述. 力学与实践，2004，26(5): 68-70
10 Phungapalngam B, Chucheepsakul S, Wang CM. Post-buckling of beam subjected to intermediate follower force. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006, 132(1): 16-25
11 Vaz MA, Silva DFC. Post-buckling analysis of slender elastic rods subjected to terminal forces. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2003, 38(4): 483-492
12 Tiersten HF. On the derivation of the equation for the deflection of thin beams. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2006, 11(2): 176-180
13 潘文波, 李银山, 李彤等. 细长压杆弹性失稳后挠曲线形状的计算机仿真. 力学与实践, 2012, 34(1): 48-51
14 Stemple T. Extensional beam-columns: An exact theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1990, 25: 615-623
15 Jekot T. Non-linear problems of thermal buckling of a beam. *Journal of Thermal Stresses*, 1999, 19(4): 359-369
16 Filipich CP, Rosales MB. A further study on the post-buckling of extensible elastic rids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2000, 35(5): 997-1022
17 Coffin DW, Bloom F. Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, 34(5): 935-947
18 Vaz MA, Solano RF. Post-buckling analysis of slender elastic rods subjected to uniform thermal loads. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, 26(9): 847-860
19 Li SR, Zhou YH, Zheng XJ. Thermal post-buckling of a heated elastic rod with pinned-fixed ends. *Journal of Thermal Stresses*, 2002, 25(1): 45-56
20 Li SR, Batra RC. Thermal buckling and post-buckling of Euler-Bernoulli beams supported on nonlinear elastic foundations. *AIAA Journal*, 2007, 45(3): 711-720
21 李世荣, 李忠明. 压杆过屈曲分析中轴线无伸长假设的定量讨论. 兰州大学学报 (自然科学版), 1997, 33(40): 42-46
22 李清禄，李世荣. 功能梯度压杆后屈曲形态的数值计算. 力学与实践，2010, 32(6): 39-42
23 刘延柱，薛纭. 关于弹性梁的模型. 力学与实践，2011, 33(1): 74-77
24 薛纭，翁德玮. 轴线存在应变时弹性杆力学的两个概念. 力学与实践，2011, 33(5): 65-67
25 李世荣. 非线性柔韧梁板结构的热过屈曲和振动. [博士论文]. 兰州: 兰州大学, 2003

(责任编辑: 胡 漫)

应用瑞利 – 李兹法求高阶频率时剪力边界条件的效应

罗健豪 1)

(澳门大学机电工程系, 中国澳门)

摘要 在应用瑞利 – 李兹法求解细长梁和杆的静挠度、最小临界力和基频时，教材和文献都指出剪力边界条件的效应很弱，因此剪力一般可以不予考虑. 然而，本文通过例子指出剪力边界条件对高阶 (尤其是最高阶) 的固有频率有着显著的影响，而且它的影响并不能通过增加位移函数的项数来予以消除.

关键词 瑞利 – 李兹法, 力边界条件, 剪力边界条件, 固有频率

中图分类号：O341 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-11-318

1 关于瑞利 – 李兹法的扼要回顾

弹性力学指出剪力对粗短梁的效应很强，而对细长梁则不然 [1]. 材料力学也指出一般情况下细长梁 (尤其是均质的金属梁) 的破坏，主要是由与弯矩有关的正应力所控制的 [2]. 因此对于细长的梁和压杆，人们往往更为关心弯矩.

很多材料力学、弹性力学和有限元的教材都会提到瑞利 – 李兹法. 应用此法的关键是要懂得如何 “恰当” 地选取位移函数. 教材 [3-5] 一般提到选取的位移函数必须满足位移边界条件 (挠度及转角)，而对于力边界条件 (剪力和弯矩)，则要么没有提及，要么就是没有强调和深入比较二者的重要性. 文献 [6] 比较了剪力和弯矩边界条件的相对重要性，该文通过求解细长梁的静挠度和细长压杆的最小临界力，指出不满足弯矩边界条件可使误差高达 20%，而剪力边界条件的重要性则较低，违反它时误差一般只有 1% ∼ 2% 左右. 文献 [7-8] 后来也针对细长压杆临界力和细长梁的基频对剪力

2011–09–01 收到第 1 稿，2012–11–22 收到修改稿.

1) E-mail: KHLO@umac.mo

边界条件作出了探讨. 而且文献 [7] 还从数学上作出了说明.

本文主要讨论剪力边界条件对高阶频率的影响. 通过例题，本文指出剪力边界条件对高阶频率的效应是不应该随便忽略的. 此外，它的效应也不能通过增加位移函数的项数来予以消除. 下面利用算例来说明剪力边界条件对高阶频率的效应和是否能通过增加位移函数的项数来消除剪力边界条件的影响.

2　剪力边界条件对高阶频率的效应

图 1 所示的细长梁单位长度的质量为 M，其抗弯刚度为 EI，长为 L. 梁右边支承的弹簧刚度为 k. 用瑞利－李兹法求第一阶及第二阶的固有频率 ω_1 和 ω_2 (本例题引用自文献 [9]，这里对它做出了一些简化).

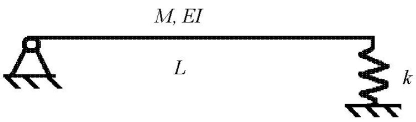

图 1　一端简支一端弹性支承的细长梁

解: 近似位移函数取为

$$y(x)=a_1\frac{x}{L}+a_2\sin\frac{\pi x}{L} \tag{1}$$

其中 a_1, a_2 为待定系数.

振动时梁的动能为

$$T_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^L M(y(x))^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ML\omega^2\Big(\frac{1}{3}a_1^2+\frac{2}{\pi}a_1a_2+\frac{1}{2}a_2^2\Big)$$

而系统 (梁加上弹簧) 的势能为

$$V_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^L EI\Big(\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}k(y(L))^2=\frac{1}{4}\frac{EI\pi^4}{L^3}a_2^2+\frac{1}{2}ka_1^2$$

由 $\dfrac{\partial(V_{\max}-T_{\max})}{\partial a_1}=0,\ \dfrac{\partial(V_{\max}-T_{\max})}{\partial a_2}=0$ 分别有

$$\Big(k-\frac{1}{3}\omega^2LM\Big)a_1-\frac{\omega^2LM}{\pi}a_2=0 \tag{2}$$

$$-\frac{\omega^2LM}{\pi}a_1+\Big(\frac{EI}{2}\frac{\pi^4}{L^3}-\frac{1}{2}\omega^2LM\Big)a_2=0 \tag{3}$$

由式 (2) 和式 (3) 的系数行列式等于零，求得频率方程为

$$\frac{(\pi^2-6)L^5M^2}{6L^3\pi^2}\omega^4-\frac{\pi^2ML(\pi^4EI+3kL^3)}{6L^3\pi^2}\omega^2+\frac{\pi^4kEI}{2L^3}=0 \tag{4}$$

由于式 (4) 中各物理量的具体数值并不影响讨论，为了求解方便，分别选取它们的数值为

$$L=5\,\mathrm{m},\ M=1\,\mathrm{kg/m},\ E=10\times10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$I=10\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4,\ k=\frac{\pi^4EI}{2L^3}\approx38.964\,\mathrm{N/m}$$

求解式 (4) 得 $\omega_1\approx3.233\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_2\approx9.430\,\mathrm{rad/s}$

本题的理论解为 $\omega_1*=3.232\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_2*=8.88\,\mathrm{rad/s}$

这里可以看出基频的近似解很好，而第二阶频率近似解的误差却为 6.194%，它已经超出工程计算一般认可的 ±5% 这个范围了.

下面我们考察所选取的近似位移函数在边界上的情况. 容易验证近似位移函数满足两端弯矩均为零及所有的位移边界条件. 对于右边的弹性支承，这里要求

$$EI\frac{\mathrm{d}^3y(L)}{\mathrm{d}x^3}=ky(L)$$

即

$$EI\frac{\pi^3}{L^3}a_2=\frac{\pi^4EI}{2L^3}a_1,\ \frac{a_2}{a_1}\approx1.571 \tag{5}$$

由式 (2) 和式 (3)，可以求得两个近似频率对应的振型 (见表 1).

表 1　两个近似频率对应的振型

	式 (2)	式 (3)
$\omega_1\approx3.233\,\mathrm{rad/s}$	$\dfrac{a_2}{a_1}\approx1.304$	$\dfrac{a_2}{a_1}\approx1.294$
$\omega_2\approx9.430\,\mathrm{rad/s}$	$\dfrac{a_2}{a_1}\approx-0.737$	$\dfrac{a_2}{a_1}\approx-0.793$

表 1 指出当梁以近似频率 ω_1 自由振动时，比值 $\dfrac{a_2}{a_1}\approx1.3$. 而当梁以近似频率 ω_2 自由振动时，比值 $\dfrac{a_2}{a_1}\approx-0.737$. 显然两个近似频率给出的比值 $\dfrac{a_2}{a_1}$ 与式 (5) 都有偏差. 也即所选取的近似位移函数在 $x=L$ 处并不满足剪力边界条件. 但是，第二阶近似频率的偏差较大. 也即剪力边界条件对第二阶固有频率的影响较大，而对基频的影响则较弱.

3　增加位移函数的项数对剪力边界条件效应的影响

对上例，为了考察是否能够通过增加位移函数的项数来改进频率近似解的精度，我们在式 (1) 中再添加一项，即取近似位移函数为

$$y(x)=a_1\frac{x}{L}+a_2\sin\frac{\pi x}{L}+a_3\sin\frac{2\pi x}{L} \tag{6}$$

其中 a_1, a_2, a_3 为待定系数.

在讨论之前，我们先简介一下文献 [10] 的结果. 该文的作者已经求得当右边的弹性支承取不同刚度时，本例题的梁的首三阶固有频率的理论解. 它们分别是

$$\omega_i*=a_i\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\quad(i=1,2,3)$$

其中 a_i 的取值见表 2.

节录自文献 [10] 的表 2 给出了当梁右边的弹性支承取不同刚度时近似位移函数 (式 (6)) 系数的相应取值.

表 2 中 $\beta_2=\dfrac{EI}{kL^3}$ 为支承的刚度系数, 当 $\beta_2\leqslant10^{-4}$ 时支承可视为简支端, 而 $\beta_2\geqslant10^4$ 时则支承可视为自由端. 本

题中右边的弹性支承若视为弹簧连接，则取 $\beta_2=10^{-2},10^{-3}$ 较为恰当. 这是由于当 $\beta_2=10^{-4}$ 时，支承已因刚性太大而变为简支端. 而如果当 $\beta_2=10^0=1$，那么由下面的计算可知梁右边的弹簧常数的取值为 $k=0.8\,\mathrm{N/m}$. 这样的刚性与一般工程上遇到的情况相比显然太小. 所以 $\beta_2=10^2$, 10^3 的情况就更不必讨论了. 因此仅讨论表 2 中 $\beta_2=10^{-2}$ 和 10^{-3} 时的情况.

表 2 梁右边的弹性支承取不同刚度时式 (6) 系数的取值 [10]

支承情况	β_2	a_1	a_2	a_3
一端简支，另一端弹性支承	10^{-4}	9.860	39.322	88.016
	10^{-3}	9.773	37.850	79.593
	10^{-2}	8.932	26.504	54.571
	1	1.716	15.549	50.005
	10^2	0.173	15.420	49.965
	10^4	0.017	15.418	49.965

仍取 $L=5\,\mathrm{m}$, $M=1\,\mathrm{kg/m}$, $E=10\times10^6\,\mathrm{Pa}$, $I=10\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4$

如令 $k=\xi\dfrac{\pi^4EI}{2L^3}$，则 $\xi=\dfrac{2}{\beta_2\pi^4}$. 如取 $\beta_2=10^{-2}$，那么 $\xi=2.053$. 此时有 $k=\xi\dfrac{\pi^4EI}{2L^3}\approx80\,\mathrm{N/m}$.

当各变量如上取值时，仿例 1 的计算步骤，可解得前三阶的近似固有频率为: $\omega_1\approx3.573\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_2\approx10.658\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_3\approx23.148\,\mathrm{rad/s}$.

而文献 [10] 给出的理论解为

$$\omega_1*=8.932\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx3.573\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_2*=26.504\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx10.602\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_3*=54.571\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx21.828\,\mathrm{rad/s}$$

可见增加位移函数的项数后，基频和第二阶频率的近似解都变好了. 然而第三阶频率近似解的误差却仍为 6.047%. 也即增加项数后，最高阶频率近似解的误差仍然大于 5%.

如取 $\beta_2=10^{-3}$，那么 $\xi=20.532$. 这时 $k=\xi\dfrac{\pi^4EI}{2L^3}\approx800\,\mathrm{N/m}$.

此时近似解为

$$\omega_1\approx3.909\,\mathrm{rad/s},\ \omega_2\approx15.146\,\mathrm{rad/s},\ \omega_3\approx47.083\,\mathrm{rad/s}$$

而文献 [10] 给出的理论解为

$$\omega_1*=9.773\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx3.909\,\mathrm{rad/s},$$

$$\omega_2*=37.850\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx15.140\,\mathrm{rad/s},$$

$$\omega_3*=79.593\sqrt{\frac{EI}{ML^4}}\approx31.837\,\mathrm{rad/s}$$

显然剪力边界条件对第三阶固有频率有着不可忽视的效应 (误差达到 47.89%).

4 结 论

在应用瑞利 – 李兹法求解细长梁的高阶固有频率时，不应该像求解梁的静变形 (和基频) 或细长压杆的临界力那样，认为剪力边界条件并不重要. 通过本文的例子，我们看到假如位移函数违反了剪力边界条件，那么 (最) 高阶频率的精度往往是并不理想的. 即使增加位移函数的项数，仍然不能改善 (最) 高阶频率解的精度.

参 考 文 献

1 沃国伟. 弹性力学. 上海：上海交通大学出版社，1998

2 张大伦, 李宗璐. 材料力学 (上册). 上海: 同济大学出版社, 1993

3 李廉焜. 结构力学 (下册). 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1996

4 王仕统. 结构稳定. 广州: 华南理工大学出版社, 1997

5 李存权. 结构稳定和稳定内力. 北京: 人民交通出版社, 2000

6 罗健豪, 罗健文. 关于瑞利 – 李兹方法边界条件的讨论. 力学与实践, 2004, 26(2): 72-74

7 陈玉骥. 能量法计算临界荷载和自振频率的一点说明. 力学与实践, 2006, 28(6): 81-82

8 范志毅, 任勇生, 刘立厚等. 力边界条件对瑞利 – 李兹法求梁固有频率的影响. 上海工程技术大学学报, 2005, 19(1): 9-11

9 唐友刚. 高等结构动力学. 天津: 天津大学出版社, 2002

10 宋殿义, 蒋志刚, 陈北雁. 弹性支承梁自振频率分析. 江苏建筑, 2005, 99(1): 30-31

(责任编辑: 胡 漫)