$$
\left.\begin{aligned}
&(1+a^1)\dot{a}^1=\varPhi_1+a^1a^3-a^4\\
&(1+a^1)\dot{a}^2=a^1\varPhi_1+a^4-a^1a^3\\
&(1+a^1)\dot{a}^3=\varPhi_2-a^4\varPhi_1+a^4(a^4-a^1a^3)-\\
&\qquad a^1(a^1-a^2-a^3a^4)\\
&(1+a^1)\dot{a}^4=\varPhi_2+a^1-a^2-a^3a^4
\end{aligned}\right\}\tag{18}
$$

为找到 Еругин 函数，可提出补充需要：要求方程 (18) 的零解 $a^\mu=0$ $(\mu=1,2,3,4)$ 是稳定的，并且要满足条件

$$
\varPhi_1\,|_{a^1+a^2=0}=0\,,\quad \varPhi_2\,|_{a^3+a^1a^4=0}=0\tag{19}
$$

取 Ляпунов 函数为

$$
V=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}(a^\mu)^2\tag{20}
$$

按方程 (19) 求对时间的导数，得

$$
\dot{V}=\frac{1}{1+a^1}\Big[\varPhi_1(a^1+a^1a^2-a^3a^4)+\varPhi_2(a^3+a^4)\Big]\tag{21}
$$

选 Еругин 函数为

$$
\left.\begin{aligned}
&\varPhi_1=(1+a^1)(a^3+a^4)(a^1+a^2)(a^3+a^1a^4)\\
&\varPhi_2=-(1+a^1)(a^1+a^1a^2-a^3a^4)\cdot\\
&\qquad (a^3+a^1a^4)(a^1+a^2)
\end{aligned}\right\}\tag{22}
$$

则有 $\dot{V}=0$.

由 Ляпунов 定理知，零解是稳定的，并且式 (22) 也满足式 (19).

上面 3 例涉及 Lagrange 系统和 Birkhoff 系统的动力学逆问题中的 Еругин 函数的选取问题，对其他约束力学系统也适用.

4 结 论

理论力学中的质点动力学第一类问题的解大多是唯一的. 实际上，这相当于给定积分为通积分，而 Еругин 函数取为零的情形，如例 1. 对一般情形，如例 2 和例 3，需引入 Еругин 函数，而 Еругин 函数是不能任意选取的.

参 考 文 献

1 Галиуллин АС. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986

2 梅凤翔. 动力学逆问题. 北京：国防工业出版社，2009

3 Еругин НП. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеюших заданную интегральную кривую, ПММ, 1952, 16(6): 659-670

4 梅凤翔, 史荣昌，张永发等. Birkhoff 系统动力学. 北京：北京理工大学出版社, 1996

定常完整约束系统动力学方程的伪线性形式1)

王怀磊 *,2) 苏振超 †

*(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京 210016)

†(商丘工学院建筑工程系, 商丘 476800)

摘要 对定常完整约束系统，从动力学普遍方程出发，推导出一种用矩阵表示的伪线性形式的动力学方程. 该方程只需写出质点系位置矢径与外力矢量的广义坐标表达式即可直接计算相关系数矩阵，从而得到系统的动力学方程. 该方程形式简洁，计算格式整齐，适于用计算机代数语言的程式化实现，为力学系统的计算机辅助建模提供了一种途径. 方法的正确性通过两个简单算例进行了验证.

关键词 定常完整约束，动力学方程，伪线性，矩阵

中图分类号：O316 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-12-032

引 言

如何建立力学系统的动力学方程是动力学中最古老且最基本的问题之一. 自从 17 世纪牛顿发现动力学基本定律以来，经过 18, 19 世纪欧拉，达朗贝尔，拉格朗日，哈密顿，高斯等著名数学力学家的努力，现已发展出多种经典的动力学建模方法，如动力学普遍方程，第二类拉格朗日方程 [1-2]，哈密尔顿原理，高斯原理，Kane 方程 [3] 等. 这些方法基本上可以分为两类，一类是典型的分析力学方法，需要通过计算系统的某种动力学函数而得到系统的动力学方程，如拉格朗日方程，哈密尔顿原理；另一类方法虽也源于动力学普遍方程，但其最终形式具有矢量力学的特点，如 Kane 方程等. 本文从虚位移形式的动力学普遍方程出发，针对定常完整约

2012–01–17 收到第 1 稿，2012–07–26 收到修改稿.

1) 江苏高校优势学科建设工程资助项目.

2) E-mail: whlay@nuaa.edu.cn

束系统推导出一种用矩阵表示的伪线性形式的动力学方程，这种方法无需计算系统的动力学函数，只需写出质点系位置矢径与外力矢量的广义坐标表达式，即可计算方程中的各系数矩阵，从而得到系统的动力学方程. 相比 Kane 方法，本文所提出的方法在处理完整系统时更加简洁方便.

1 动力学方程的推导

假设一受到定常、完整约束的质点系，其自由度数为 N，质点个数为 n (n 可为无穷大)，用广义坐标表示的质点 m_i 的矢径为 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_N)$，理想约束反力为 $\boldsymbol{F}_{N_i}$，非理想约束反力及主动力为 $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则根据动力学普遍方程有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{N_i}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1}$$

下面分别对式 (1) 两项进行简化.

首先对惯性力虚功进行简化

$$\delta W_{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\Big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{k=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\\&\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k\Big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\\&\sum_{k=1}^{N}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\Big)\ddot{q}_k\Big]+\\&\sum_{k=1}^{N}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k\Big]=\\&\boldsymbol{M}_j\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}j}\dot{\boldsymbol{q}}\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{q}=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_N]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{M}_j=\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\quad\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\quad\cdots\quad\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}j}=\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\quad\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\quad\cdots\quad\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right] \tag{6}$$

$$j=1,2,\cdots,N$$

将式 (3) 代入式 (2)，则惯性力虚功简化为

$$\delta W_{\mathrm{I}}=-\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{M}_j\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}j}\dot{\boldsymbol{q}}\right)\delta q_j \tag{7}$$

其次对主动力虚功 (含非理想约束反力) 进行简化

$$\delta W_{\mathrm{F}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\Big(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\Big)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}j}\delta q_j \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}j}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 即为对应于广义坐标 q_j 的广义力.

将式 (2) 与式 (8) 代入式 (1) 可得

$$\delta W_{\mathrm{I}}+\delta W_{\mathrm{F}}=-\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{M}_j\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}j}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}j}\right)\delta q_j=0 \tag{9}$$

由于系统为完整系统，因此其广义虚位移前的各项系数皆应为零，即

$$\boldsymbol{M}_j\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}j}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}j}=0,\quad j=1,\,2,\cdots,N \tag{10}$$

当 j 从 1 到 N 变化时，式 (10) 可写成如下矩阵形式的动力学方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}} \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\\ \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N} & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\end{bmatrix}_{N\times N} \tag{12}$$

$$
\boldsymbol{Q}_{\rm v}=\begin{bmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \cdots\cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_N}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\\
\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \cdots\cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_N}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N} & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N} & \cdots\cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_N}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}
\end{bmatrix}_{N\times N} \tag{13}
$$

$$
\boldsymbol{Q}_{\rm f}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{14}
$$

显然，式 (14) 中的 $\boldsymbol{Q}_f$ 也即分析力学中所定义的广义力. 注意到方程 (11) 虽然表面看起来是广义坐标的线性微分方程，但由于其系数矩阵一般并非常数矩阵，而含有广义坐标参数，因此该方程是动力学方程的伪线性矩阵形式.

由式 (12)~(14) 可以看出，动力学方程 (11) 中各系数矩阵中的元素仅与质点系的位置矢径及外力矢量有关，只要写出位置矢径和外力矢量的广义坐标表达式，即可代入矩阵进行求导和代数运算得到具体元素的广义坐标表达式，最后再将所得各系数矩阵代入方程 (11) 即得到系统的动力学方程. 同时可以看出，这种方程不仅形式简洁，而且计算格式整齐，矩阵中各元素对广义坐标的求导顺序与矩阵的行列下标一致，非常适合用计算机代数语言进行实现. 对于一个具体系统而言，只需输入质点系的各广义坐标表达式和外力矢量，后面的数学方程推导过程则完全可由符号运算程序实现. 因此，这种矩阵形式的动力学方程为复杂系统动力学的计算机辅助建模提供了一种有效的途径，也为计算动力学软件的开发提供了理论支撑，因此具有潜在的工程应用价值.

2 算 例

为验证本文所得到结果的正确性，选取以下两个简单力学模型，采用伪线性形式的动力学方程建立其数学模型.

算例 1 设铅垂面 Oxy 内一质量为 m 的滑块套在一作定轴转动的长度为 l 的杆上，物块距离转轴的距离为 ρ，外力偶矩为 T_θ，杆的转角为 θ，不计杆的质量，如图 1 所示. 试建立其动力学方程.

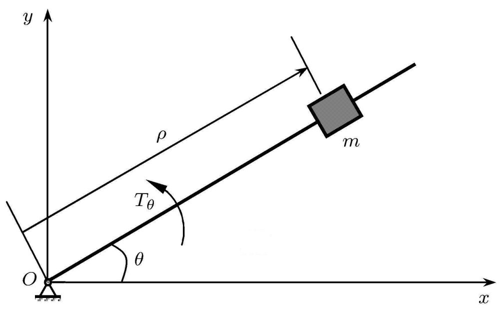

图 1

显然，系统的广义坐标为 $q_1=\rho$，$q_2=\theta$，则质点个数 $n=1$，系统自由度 $N=2$，质点位置矢径的广义坐标表达式及其导数分别为

$$
\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}\rho\cos\theta & \rho\sin\theta\end{bmatrix}^{\rm T}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{r}}_1=\begin{bmatrix}\dot\rho\cos\theta-\rho\dot\theta\sin\theta & \dot\rho\sin\theta+\rho\dot\theta\cos\theta\end{bmatrix}^{\rm T}
$$

外力矢量则为 $\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0 & -mg\end{bmatrix}^{\rm T}$

根据式 (12)~(14) 计算可得

$$
\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1} & m_1\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1}\\ m_1\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2} & m_1\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2}\end{bmatrix}= \begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & m\rho^2\end{bmatrix} \tag{15}
$$

$$
\boldsymbol{Q}_{\rm v}=\begin{bmatrix} m_1\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_1}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1} & m_1\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_1}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1}\\ m_1\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_1}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2} & m_1\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_1}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2}\end{bmatrix}= \begin{bmatrix} 0 & -m\rho\dot\theta\\ m\rho\dot\theta & m\rho\dot\rho\end{bmatrix} \tag{16}
$$

$$
\boldsymbol{Q}_{\rm f}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_1} & \boldsymbol{F}_1\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial q_2}\end{bmatrix}^{\rm T}= \begin{bmatrix}-mg\sin\theta & -mg\rho\cos\theta+T_\theta\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{17}
$$

由式 (11) 得到系统的运动微分方程

$$
\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & m\rho^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot\rho\\ \ddot\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -m\rho\dot\theta\\ m\rho\dot\theta & m\rho\dot\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\rho\\ \dot\theta\end{bmatrix}= \begin{bmatrix}-mg\sin\theta\\ -mg\rho\cos\theta+T_\theta\end{bmatrix} \tag{18}
$$

算例 2 如果算例 1 中杆为质量为 m_1 的均质杆，其相对于转轴 O 的转动惯量为 J_o，杆的质量为 m_1，滑块的质量为 m_2，其他条件完全相同，如图 2 所示，试建立该系统的动力学方程.

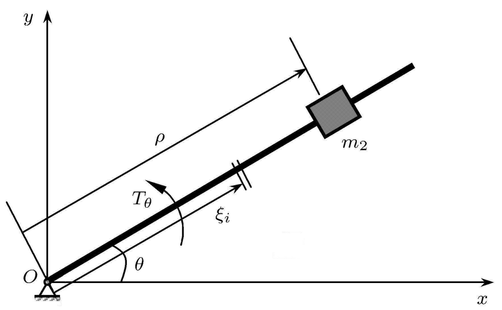

图 2

此时广义坐标仍为 $q_1=\rho$ 和 $q_2=\theta$，且 $N=2$，但此时杆为分布质量体系，因此 $n=\infty$. 令 $\boldsymbol{r}_1$ 表示滑块的矢径，$\boldsymbol{r}_i$ $(i=2,3,\cdots)$ 表示杆上距离转轴为 ξ_i 的微元的矢径，则

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}\rho\cos\theta & \rho\sin\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1=\begin{bmatrix}\dot\rho\cos\theta-\rho\dot\theta\sin\theta & \dot\rho\sin\theta+\rho\dot\theta\cos\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{r}_i=\begin{bmatrix}\xi_i\cos\theta & \xi_i\sin\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\begin{bmatrix}-\xi_i\dot\theta\sin\theta & \xi_i\dot\theta\cos\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad i=2,\ 3,\cdots$$

外力矢量则为

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0 & -m_2 g\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{bmatrix}0 & -m_1 g\dfrac{\mathrm{d}\xi}{l}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ i=2,3,\cdots$$

根据式 (12)~(14) 可得到

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}m_2 & 0\\ 0 & J_o+m_2\rho^2\end{bmatrix}\tag{19}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} & \sum\limits_{i=1}^{\infty}m_i\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0 & -m_2\rho\dot\theta\\ m_2\rho\dot\theta & m_2\rho\dot\rho\end{bmatrix}\tag{20}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \sum\limits_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-m_2 g\sin\theta & -\dfrac{1}{2}m_1 gl\cos\theta-m_2 g\rho\cos\theta+T_\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{21}$$

由式 (11) 得到系统的运动微分方程

$$\begin{bmatrix}m_2 & 0\\ 0 & J_o+m_2\rho^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot\rho\\ \ddot\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -m_2\rho\dot\theta\\ m_2\rho\dot\theta & m_2\rho\dot\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\rho\\ \dot\theta\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-m_2 g\sin\theta\\ -\dfrac{1}{2}m_1 gl\cos\theta-m_2 g\rho\cos\theta+T_\theta\end{bmatrix}\tag{22}$$

在以上两个例子中，如果进一步进行运动学分析，并与所得矩阵形式动力学方程中各项进行比较，可以发现矩阵形式动力学方程广义坐标二阶导数项包含的是相对惯性力及切向牵连惯性力信息，而一阶导数项包含的是法向牵连惯性力及柯氏惯性力的信息，因此伪线性矩阵形式的动力学方程事实上已经将不同性质的惯性力进行了分离，在某种程度上反应了系统的物理意义. 可以断定，这种物理意义也是具有一定普遍性的，说明矩阵形式动力学方程虽来源于分析力学方法，但也体现出某种程度牛顿力学的特点.

3 结 论

对定常完整约束系统，从虚位移形式的动力学普遍方程出发，推导出一种用矩阵形式表示的动力学方程. 这种方程在形式上是线性的，但由于系数矩阵一般含有系统变量，因此本质上是非线性系统的伪线性表达式. 此外，这种伪线性形式的方程不需要计算系统的动力学函数，而仅仅利用质点系位置矢径与外力矢量的广义坐标及即可直接计算方程中的各系数矩阵，从而得到系统的动力学方程，为定常完整力学系统的动力学建模提供了一种新的方法. 又由于该方程系数矩阵中各元素的表达式格式整齐，因此也适于用计算机代数语言 (如 Maple) 进行程式化推导，为复杂力学系统的计算机辅助建模提供了一种途径. 方程的正确性通过两个算例进行了验证，所得结果也表明伪线性矩阵形式的动力学方程的二阶导数项与一阶导数项含有不同的惯性力，即在普遍意义已将系统不同物理意义的惯性力进行了分离，体现出矩阵形式动力学方程虽来源于分析力学方法，但也有某种程度牛顿力学的特点.

参 考 文 献

1 官飞，李苹，罗远祥. 理论力学 (第 4 版). 北京：高等教育出版社，1995

2 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (第 7 版). 北京：高等教育出版社，2010

3 刘延柱. 高等动力学. 北京：高等教育出版社，2000

(责任编辑：胡　漫)