基于 Matlab 的理论力学计算机辅助教学 1)

敖文刚 2)　李　勤　王　歆

(重庆工商大学机械工程学院, 重庆 400067)

摘要　在传统的理论力学教学过程中，大部分运动学、动力学问题都只能进行瞬态分析，且求解过程一般又对数学功底和解题技巧有较高要求，本文通过 Matlab 可视化界面，利用 Matlab 强大的数值计算能力和图形处理技术，对运动学、动力学问题进行过程分析，并将结果以曲线、动画等直观的形式表现出来, 提高同学对力学问题的感性认识.

关键词　Matlab，计算机辅助教学，可视化用户界面，过程分析

中图分类号：TH113.1　**文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-12-300

当前理论力学教学的现状是：(1) 一般只能对运动学、动力学问题进行瞬态分析；(2) 部分运动学、动力学问题的求解对学生的数学功底和解题技巧都有较高的要求；(3) 对某些比较复杂的运动，其运动过程不容易想像. 针对以上 3 点，本文提出一种相对比较容易掌握的，能进行运动学、动力学过程分析的方法 —— 基于 Matlab 的可视化用户界面，让大部分同学能较容易学会这种过程分析的方法.

1　基于 Matlab 计算机辅助教学的思想

彭芳麟 [1] 在引入 Matlab 对运动学、动力学问题进行过程分析方面做了有益的探索；阚文彬 [2]、李新成 [3] 用 Matlab 对多个运动学问题进行了模拟. 本文应用 Matlab 的 Guide 工具箱制作友好的、可交互的可视化用户界面来完成对运动学和动力学问题的分析，图 1 是分析某运动学问题的可视化界面. 左上区域用于输入运动参数、初始条件和模拟时间，右下区域用于查询某时刻的运动变量，他们布置随所分析力学问题而改变，其他区域则是完全不变. 所以可预先制作一个模板，而在针对具体力学问题时仅需修改输入、查询区域文本框和编辑框控件的属性即可.

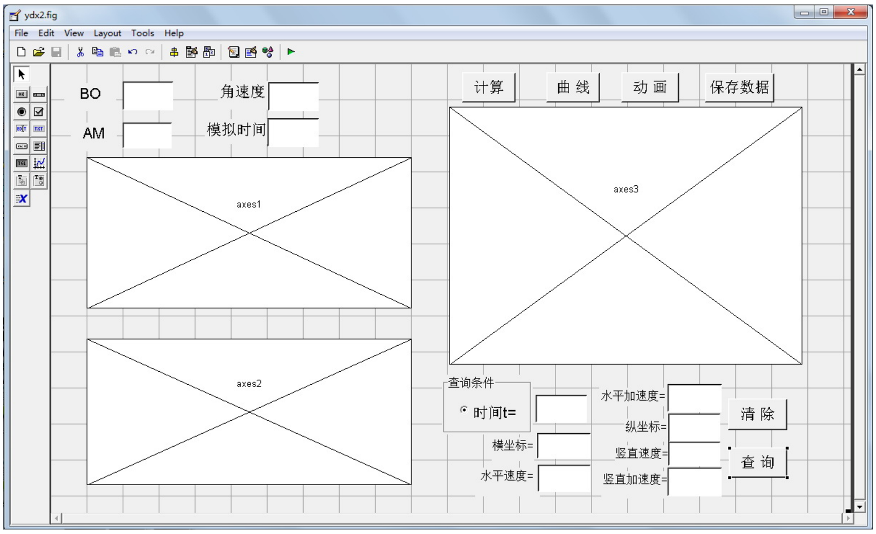

图 1　可视化用户界面示意图

示意图中 BO 代表支座 B 和支座 O 间的距离，AM 代表杆 QQ' 上 A, M 点间的距离.

用可视化用户界面来研究力学问题大致分为 4 个过程：(1) 运用力学原理对运动学、动力学问题进行分析，建立描述力学问题的微分方程组并确定其初始条件；(2) 根据第一步的分析，完成输入区域和查询区域控件的布置并编写有关按钮的回调函数；(3) 运行可视化界面可将在给定运动参数、初始条件情况下的计算结果保存为 Excel 文件，或将机构运动以曲线、动画的形式直观表达，或对某一特定时间或位置的运动变量 (位移、速度和加速度等) 进行查询；(4) 改变运动参数和初始条件，观察在不同运动参数和初始条件下，所研究对象的运动规律，直观感受运动参数、初始条件对其运

2012–06–05 收到第 1 稿，2012–09–04 收到修改稿.

1) 重庆市教委教改资助项目 (113019).

2) 敖文刚, 1976 年生, 男，重庆人，讲师，主要从事工程力学教学科研工作. E-mail: aowg@163.com

动的影响.

2 运动学分析实例 [4]

如图 2 所示，杆 QQ' 和曲柄 OA 铰接并穿过固定点 B 的套筒. 已知杆 QQ' 匀速转动，其转角 $\varphi=\omega t$ (ω 为常数)，$BO=AO=a$，$AM=b$，试分析 M 点的运动.

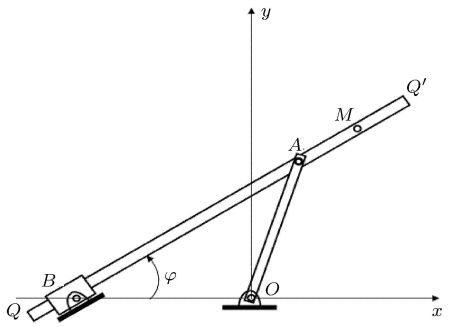

图 2 机构运动示意图

2.1 问题分析

以 O 为原点、水平向右为 X 轴、竖直向上为 Y 轴，则 M 点的坐标可以表示为如下

$$\left.\begin{aligned} x_m &= a\cos 2\omega t + b\cos\omega t \\ y_m &= a\sin 2\omega t + b\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

则 M 点的加速度为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_m &= -4a\omega^2\cos 2\omega t - b\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y}_m &= -4a\omega^2\sin 2\omega t - b\omega^2\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

定义一含有 4 个列向量的矩阵 $\boldsymbol{y}=[x_m,\dot{x}_m,y_m,\dot{y}_m]^{\rm T}$ 来保存各时间点上 4 个运动变量的计算结果. 矩阵的微分为 $\dot{\boldsymbol{y}}=[\dot{x}_m\ \ \ddot{x}_m\ \ \dot{y}_m\ \ \ddot{y}_m]^{\rm T}$，则可定义求解微分方程组的函数文件为

```
function ydot=ydx2fun(t,y,flag,a,b,omega)
ydot=[y(2);
    (-4*a*omega^2*cos(2*omega*t))-
        (b*omega^2*cos (omega*t));
    y(4);
    (-4*a*omega^2*sin(2*omega*t))-(b*omega^2*sin
        (omega*t));]
```

而当 $t=0$ 即机构位于初始位置时，运动变量的初值 $\boldsymbol{y}_0=[a+b,0,0,2a\omega+b\omega]$.

2.2 通过可视化用户界面分析问题

从式 (2) 可知，a,b,ω 为运动参数，可从左上输入区域的编辑框输入；而初始条件可以根据题意直接计算出来，无须输入. “计算” 按钮回调函数的核心是为求解运动变量微分方程组的 ode 语句，此语句具体如下：

[t,y]=ode45(‘ydx2fun’,[0:0.01:$t$final],y0,[],a, b,omega);

其中，‘ydx2fun’ 就是前面定义来求解微分方程组的函数文件；y0 为 4 个运动变量的初值；$t$final 为模拟的结束时间，从左上输入区域的编辑框输入.

本例计算了以 y_0 为初值, 0.01 s 为步长，在 0~60 s 时段内的运动变量，其结果为一个 6 001×4 矩阵，并将之赋给矩阵 $\boldsymbol{y}$. 通过点击 “保存数据” 按钮将矩阵 $\boldsymbol{y}$ 保存为 Excel 文件；通过 Plot 和 Line 语句可将此矩阵的数据可视化为曲线和动画. 通过对 M 点的位移和速度曲线观察可判断其作周期运动，周期大致为 12.57 s. 通过对动画的观察可知 M 点的运动轨迹为一条较为复杂的螺线，如图 3 所示蓝色实线，其螺线形成分为 3 段：(1) 杆 QQ' 在 0°~90° 范围转动时，M 点轨迹为 $a\rightarrow b$，在图 3 中标为线段 1；(2) 杆 QQ' 在 90°~270° 范围转动时，M 点轨迹为内圈螺线 (逆时针转动)，在图 3 中标为线段 2；(3) 杆 QQ' 在 270°~360° 范围转动时，M 点轨迹为 $b\rightarrow a$，在图 3 中标为线段 3.

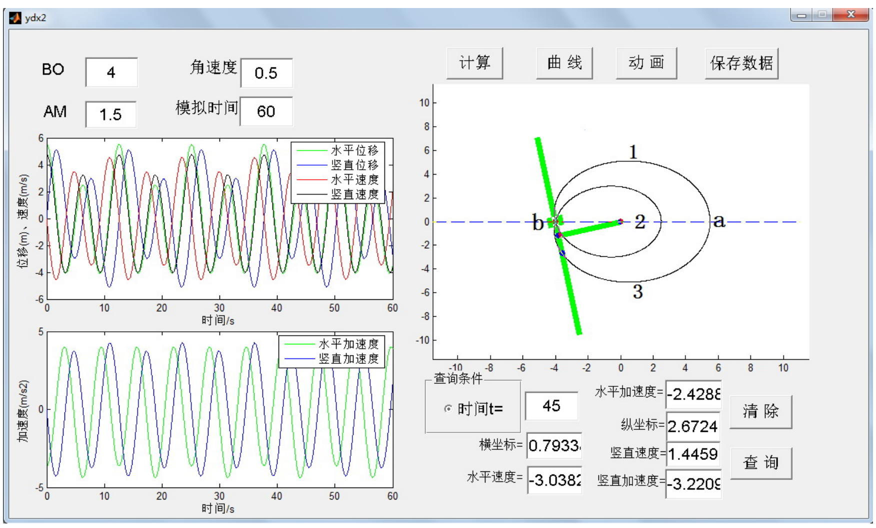

图 3 运用可视化用户界面的分析结果

3 动力学分析实例 [5]

如图 4 所示，一个单摆悬挂于可沿水平光滑轨道滑动的滑块上，滑块质量为 m_1，单摆的杆长为 l，摆锤质量为 m_2，系统在同一竖直平面内运动，试研究系统的运动.

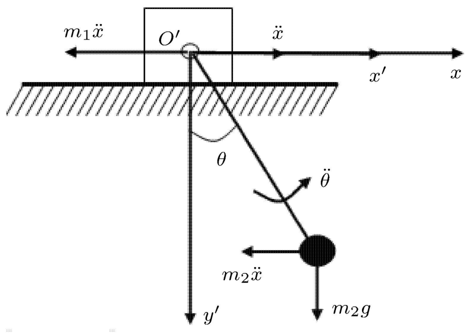

图 4 机构运动和受力示意图 (图上标注了动坐标系 $O'x'y'$)

3.1 问题分析

沿直线水平轨道建立 Ox 轴，以 x 表示滑块在轨道上的位置 (令 $x_0=0$)，以 θ 表示摆杆与竖直线的夹角，并在滑块上固结平动坐标系 $O'x'y'$. 由于系统 X 方向不受力，根据 X 方向动量守恒有

$$m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)=c \tag{3}$$

对质点系 (滑块 m_1 与小球 m_2) 运用相对动点 O' 的动量矩定理有

$$m_2l^2\ddot{\theta}=-m_2l\ddot{x}\cos\theta-m_2gl\sin\theta \tag{4}$$

设 $M=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$，将式 (3), 式 (4) 对时间求导并联合求解得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\theta}&=\frac{-M\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta-\dfrac{g}{l}\sin\theta}{1-M\cos^2\theta}\\ \ddot{x}&=\frac{Mg\cos\theta\sin\theta+Ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{1-M\cos^2\theta}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

定义一含有 4 个列向量的矩阵 $\boldsymbol{y}=[\theta,\dot{\theta},x,\dot{x}]^{\mathrm{T}}$ 来保存各时间点上 4 个运动变量的计算结果. 矩阵的微分为 $\dot{\boldsymbol{y}}=[\dot{\theta},\ddot{\theta},\dot{x},\ddot{x}]^{\mathrm{T}}$，则可定义求解微分方程组的函数文件为

```
function ydot=dlx2fun(t,y,flag,m1,m2,l)
M=m2/(m1+m2);
g=9.8;
ydot=[y(2);
      (-M*y(2) ^ 2*cos(y(1))*sin(y(1))-(g*sin(y(1))/l))/
         (1-M*cos(y(1))^2);
      y(4);
      (M*g*cos(y(1))*sin(y(1))+M*l*y(2) ^2*sin(y(1)))/
         (1-M*cos(y(1))^2);]
```

运动变量初值 $\boldsymbol{y}_0=[\theta_0,\omega_0,0,v_0]$，其中为 θ_0, ω_0, v_0 分别为摆球的初始摆角、角速度和滑块初始速度，通过从左上输入区域的编辑框输入，而滑块的初始位移设定为 $x_0=0$.

3.2 通过可视化用户界面分析问题

从式 (5) 可知，$m1, m2, l$ 为运动参数，与初始运动变量 θ_0, ω_0, v_0 一样可从左上输入区域的编辑框输入，如图 5 和图 6 所示. 在 “计算” 按钮回调函数中为求解运动变量微分方程组的 ode 语句为

```
[t,y]=ode45('dlx2fun',[0:0.01:tfinal],y0,[],m1,m2,l)
```

此条语句执行后，将会把计算结果存放到矩阵 $\boldsymbol{y}$，它是一个 5 001×4 矩阵.

如图 5 所示，当 $v_0=0$ 时滑块在 0~12.842 m 之间来回运动，而摆在 −0.8 rad~ 0.8 rad 之间摆动，周期大约为 4.78 s; 如图 6 所示，当 $v_0=0.1$ 时滑块的运动区间一直向右移动，在 45.93 s 达到最大值 20.345 m，而摆仍在 −0.8 rad~ 0.8 rad 之间摆动，周期大约为 4.82 s. 通过观察修改运动参数 (质量比 m_1/m_2、摆长 l) 后的位移、速度曲线可发现：随着质量比 m_1/m_2 增大，滑块位移、速度减小，周期变长；随着摆长 l 增大，滑块位移、速度增大，周期变长. 通过观察修

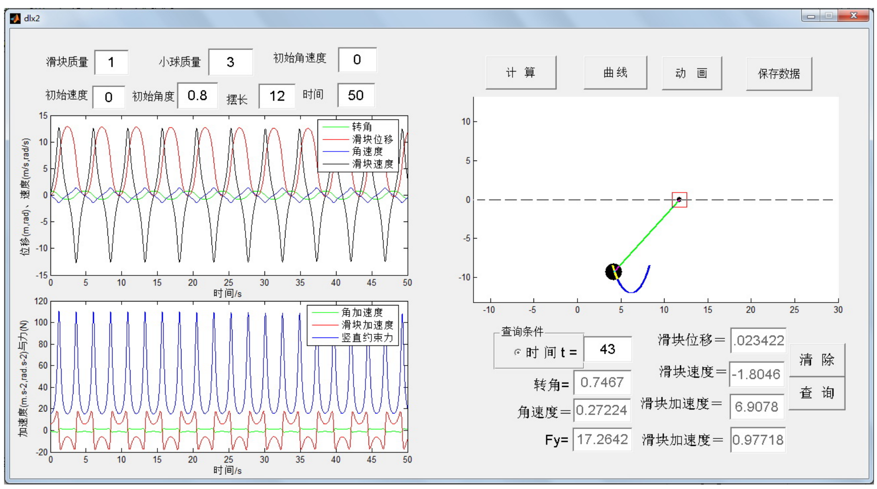

图 5 滑块初始速度 $v_0=0$ 时的分析结果

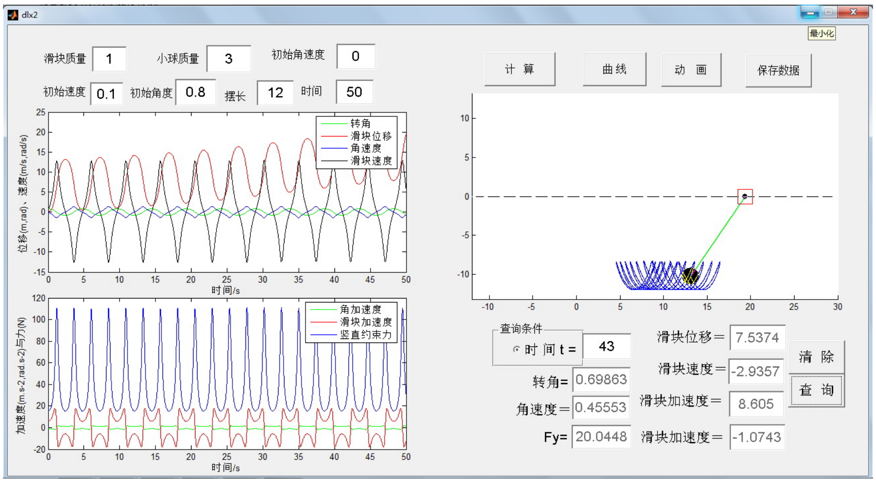

图 6 滑块初始速度 $v_0 = 0.1$ 时的分析结果

改初始条件初始角度 θ_0 后的位移、速度曲线，发现增大 θ_0 会使周期变长，滑块位移、速度增大.

4 结 论

定义求解微分方程组的函数文件与现有理论力学课程的教学内容结合紧密，实现了从瞬态分析到过程分析的自然过渡，是运用可视化用户界面来分析力学问题的核心内容. 求解微分方程组和将计算结果可视化只需调用 Matlab 的 ode, plot, line 等几条命令即可. 运用可视化用户界面分析力学问题有以下优点：(1) 可视化界面通过多个按钮的回调函数完成相应功能，将整个程序分解为了几个部分，使其程序编写、调试更容易；(2) 容易实现人机交互，通过观察不同运动参数和初始条件下研究对象的运动变化，分析运动参数和初始条件对其运动的影响；(3) 可得到某时段内每一时刻的运动变量，而不仅仅是某一瞬态的结果，实现对整个运动的过程分析，同时也降低了对学生数学功底和解题技巧的要求；(4) 实现了对结果数据的可视化，通过曲线、动画等直观的形式，使我们对某些较为复杂的运动有更为直观、清晰的认识.

参 考 文 献

1 彭芳麟, 管靖, 胡静等. 理论力学计算机模拟. 北京: 清华大学出版社, 2002

2 阚文彬, 李彤, 叶纯杰. Matlab 在运动学中的应用. 力学与实践, 2010, 32(3): 118-120

3 李新成. 摆动导杆机构的 Matlab 运动学仿真. 机械研究与应用, 2008, 21(1): 94-96

4 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学. 第 6 版. 北京：高等教育出版社, 2005

5 谢传锋. 动力学. 第 2 版. 北京：高等教育出版社, 2005

(责任编辑：胡 漫)

具有初速度的下旋球沿斜面向上的运动

景义林 1)

(安阳师范学院物理与电气工程学院，河南安阳 455000)

摘要 对具有一定初速度且向下旋转的球沿斜面向上运动的时间进行了详细的分析求解，并指出了相关参考书的一些错误与欠妥之处.

关键词 旋转球，斜面，平面平行运动

中图分类号：O313.1 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-11-267

半径为 a 的球，以初速 v_0 及初角速度 ω_0 抛掷于一倾角为 α 的斜面上，使其沿着斜面向上滚动，如 $v_0 > a\omega_0$，其中 ω_0 的方向使球有向下滚动的趋势，且摩擦因数 $\mu > \dfrac{2}{7}\tan\alpha$，试证经过 $\dfrac{5v_0 + 2a\omega_0}{5g\sin\alpha}$ 的时间，球将停止上升.

这是参考文献 [1] 即周衍柏先生编著的《理论力学教程》第三章的习题 3.24 题. 但这道题出的有点儿问题. 如图 1 所示，按题意，球初角速度的方向使球有向下滚动的趋势

2011–07–04 收到第 1 稿，2012–04–11 收到修改稿.

1) 景义林，1963 年生，男，教授, 主要研究领域是理论力学、电动力学、相对论等方面. E-mail: JYL19631018@yahoo.com.cn