

关于摩擦碰撞的 Kane 难题

刘延柱¹⁾

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

摘要 物体之间的摩擦斜碰撞可导致机械能增大与物理规律相悖的 Kane 难题来源于 Whittaker 假定的缺陷. 本文以刚性小球对固定平面的斜碰撞为例, 叙述 Kane 难题的提出, 难题的产生原因, 以及为解决此难题对于摩擦碰撞规律的几种修正方案.

关键词 经典力学, 斜碰撞, 摩擦碰撞, Whittaker 假定

中图分类号: O313 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2012)01-091-04

引言

碰撞和摩擦均属于经典力学范畴, 但作为两种概念的综合, 即有摩擦的斜碰撞问题却是一个尚未得到解决的难题.

在理论力学课程中, 一般仅将刚性球的正碰撞列入教学内容. 碰撞中的物体被简化为带有局部变形的准刚体. 短暂的碰撞过程被划分为变形阶段和恢复阶段, 碰撞物体从相互接近到相互分离, 法向相对速度发生改变, 但碰撞冲量始终指向分离方向. 由于描述碰撞过程的动力学方程数目不足以确定碰撞冲量和碰撞后速度等未知变量, 必须增加物理条件才能使方程组封闭有解. Newton(1686) 最早提出将碰撞前后的法向速度之比定义为恢复因数 e ($0 \leq e \leq 1$), 作为对正碰撞问题的补充条件. Poisson(1817) 则将恢复阶段和压缩阶段的冲量之比作为恢复因数 e 的动力学定义. 利用动量定理可以证明两种定义的一致性.

至于物体的斜碰撞, 教材中一般只提及接触点无摩擦的理想约束情形^[1]. 但有摩擦的斜碰撞实际上并不少见, 如乒乓球或台球运动. 对于有摩擦的斜碰撞, 必须再增加与切向冲量有关的物理条件. Whittaker(1904) 和 Routh(1905)^[2-3] 提出将 Coulomb 摩擦定律作为联系法向和切向冲量之间的物理条件, 即切向冲量等于法向冲量乘以 Coulomb 摩擦因数 f (图 1). 切向冲量的方向规定为沿碰撞前切向滑动速度的逆向.

这种貌似合理的假定虽然长期以来被普遍接受, 但在某些情况下, 根据 Whittaker 假定导致不合理的计算结果. 1984 年 Kane 在关于双摆末端与平面碰撞的算例中发现, 利用 Whittaker 假定的计算结果导致碰撞后双摆的总机械能大于碰撞前, 明显与能量守恒的物理规律相悖^[4]. Kane 难题的出现使经典的碰撞问题重新引起关注. 物体在极短暂的碰撞过程中的相对运动规律, 以及如何更合理地确定切向冲量成为新的研究课题, 如 Keller(1986), Brach(1989), Smith(1991) 等人的工作^[5-8]. 本文以刚性小球对固定平面



图 1 E.T. Whittaker(1873~1956 年)

的斜碰撞为例, 叙述 Kane 难题的提出, 难题的产生原因, 以及为解决此难题对于摩擦碰撞规律的几种修正方案.

1 Whittaker 假定

设质量为 m 半径为 r 的刚性小球以速度 v_0 和角速度 ω_0 沿与垂直轴夹角为 α 的方向与固定平面碰撞 (图 2). 以 $\gamma = \omega_0 r / v_0$ 表示碰撞前转动引起的切向速度与质心速度之比, γ 的正负号对应于不同的转动方向. 小球的质心速度 v 在水平轴 x 和垂直轴 y 上的投影以及绕质心转动的角速度 ω 在碰撞前的值分别为

$$v_x^- = v_0 \sin \alpha, \quad v_y^- = -v_0 \cos \alpha, \quad \omega^- = \frac{\gamma v_0}{r} \quad (1)$$

设恢复因数为 e , 碰撞后法向速度改变方向, 其大小为

$$v_y^+ = e v_0 \cos \alpha \quad (2)$$

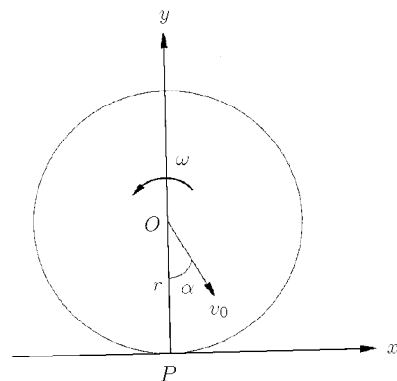


图 2 小球与固定平面碰撞

本文于 2011-09-22 收到.

1) 刘延柱, 教授, 主要研究方向为一般力学. E-mail: liuyzhc@gmail.com

设 $F_y(t)$ 为法向碰撞力, t_c 为碰撞持续时间, 法向碰撞冲量 I_y 为

$$I_y = \int_0^{t_c} F_y(\tau) d\tau \quad (3)$$

将式 (1),(2),(3) 代入动量定理, 导出

$$I_y = m(v_y^+ - v_y^-) = (1+e)mv_0 \cos \alpha \quad (4)$$

刚体在接触点 P 处的滑动速度 v_P 为

$$v_P = v + \omega \times r \quad (5)$$

其中 $r = \overrightarrow{OP}$. 将式 (1) 代入上式计算碰撞前的滑动速度 $v_{P_x}^-$

$$v_{P_x}^- = v_x^- + \omega^- r = v_0(\sin \alpha + \gamma) \quad (6)$$

根据 Whittaker 假定, 切向冲量 I_x 等于法向冲量 I_y 乘以 Coulomb 动摩擦因数 f , 与 $v_{P_x}^-$ 的方向相逆.

$$I_x = -fI_y(v_{P_x}^-/|v_{P_x}^-|) = -f(1+e)mv_0 \cos \alpha (v_{P_x}^-/|v_{P_x}^-|) \quad (7)$$

利用积分形式的动量定理和对质心 O 的动量矩定理可以确定碰撞后的质心速度 v_x^+ 和角速度 ω^+

$$m(v_x^+ - v_x^-) = I_x \quad (8a)$$

$$J(\omega^+ - \omega^-) = rI_x \quad (8b)$$

将小球的中心转动惯量 $J = 2mr^2/5$ 代入, 得到

$$v_x^+ = v_0[\sin \alpha \mp f(1+e) \cos \alpha] \quad (9a)$$

$$\omega^+ = \frac{v_0}{r} \left[\gamma \mp \frac{5}{2} f(1+e) \cos \alpha \right] \quad (9b)$$

其中正负号取决于碰撞前滑动速度 $v_{P_x}^-$ 的方向. 如 $v_{P_x}^- > 0$, 滑动速度与质心速度方向一致, 碰撞后的滑动速度 $v_{P_x}^+$ 为

$$v_{P_x}^+ = v_x^+ + \omega^+ r = v_0 \left[\sin \alpha + \gamma - \frac{7f}{2}(1+e) \cos \alpha \right] \quad (10)$$

如碰撞过程中 $v_{P_x}^+$ 始终保持与碰撞前滑动速度 $v_{P_x}^-$ 一致, 则切向冲量向后的方向不变. 但如摩擦冲量足够强劲使得 $v_{P_x}^+$ 从正值变为负值, 即以下条件满足时

$$f(1+e) \cos \alpha > \frac{2}{7}(\sin \alpha + \gamma) \quad (11)$$

则碰撞后小球反向滑动, 切向冲量随之改变方向. 滑动速度等于零是一种极特殊情况, 上式中的动摩擦因数 f 若改为静摩擦因数 f_0 且得到满足, 则小球保持在接触点处的无滑动状态, 碰撞后沿法线 y 轴方向运动.

还可能发生另一种情况, 即小球在碰撞前朝相反方向强烈旋转, $\gamma < -\sin \alpha$, 则 $v_{P_x}^- < 0$, 碰撞前小球的滑动速度就与质心速度方向相反, 产生向前的切向冲量. 如摩擦冲量足够强劲也可能使 $v_{P_x}^+$ 变号成为正值, 使切向冲量 I_x 改为向后. 上述切向滑动可能改变方向的两种可能性未能在 Whittaker 假定中得到反映.

2 Kane 难题

1984 年 Kane 和 Levinson 在其动力学著作中利用 Whittaker 假定计算了双摆末端与平面碰撞的算例^[4]. 从中发现, 对于某些参数组合得出碰撞后总机械能增加的不合理计算结果. 以上述小球碰撞问题为例, 碰撞前后小球的动能 T^- 和 T^+ 分别为

$$\left. \begin{aligned} T^- &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J(\omega^-)^2 \\ T^+ &= \frac{1}{2}m[(v_x^+)^2 + (v_y^+)^2] + \frac{1}{2}J(\omega^+)^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式 (2),(9) 代入上式, 以 $\Delta T = T^+ - T^-$ 与平动动能 $T_0 = mv_0^2/2$ 之比表示碰撞后小球的能量变化, 得到

$$\frac{\Delta T}{T_0} = [\sin \alpha \mp f(1+e) \cos \alpha]^2 + \left[e^2 + \frac{5f^2}{2}(1+e)^2 \right] \cos^2 \alpha - 1 \mp 2f\gamma(1+e) \cos \alpha \quad (13)$$

$\Delta T/T_0$ 的正负号与 α, e, f, γ 等参数有关, 也与 $v_{P_x}^-$ 与 v_x^- 方向一致或相反有关. 设 $\alpha = 30^\circ, e = 0.7, f = 0.4$, 先考虑 $v_{P_x}^-$ 与 v_x^- 方向一致情形, 上式最后一项取负号, 导出

$$\left. \begin{aligned} \gamma > 0.20 : \quad \Delta T/T_0 < 0 \\ \gamma < 0.20 : \quad \Delta T/T_0 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

再讨论 $v_{P_x}^-$ 与 v_x^- 方向相反情形, 式 (13) 的最后一项取正号, 导出

$$\left. \begin{aligned} \gamma < -0.20 : \quad \Delta T/T_0 < 0 \\ \gamma > -0.20 : \quad \Delta T/T_0 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

因此碰撞后小球能量可能减少, 也可能增加, 取决于包括刚体碰撞前角速度在内的参数组合. 以碰撞前的平动刚体为例, 令 $\gamma = 0$, 算出 $v_x^+ = -0.089v_0, v_y^+ = 0.606v_0, \omega^+ = -1.47v_0/r, \Delta T/T_0 = 0.23 > 0$, 即平动刚体碰撞后的能量增大. 此结果明显与能量守恒的物理规律相悖.

3 修改方案之一

多数文献将 Kane 难题的发生归咎于滑动速度的方向改变. 如小球在碰撞过程中从向前滑动改为向后倒退, 而 Whittaker 假定不改变碰撞冲量向后的作用方向, 则碰撞冲量从作负功变为作正功, 导致总机械能增加. 1986 年 Keller 提出将碰撞过程划分为滑动方向改变前和改变后两个阶段, 令切向冲量在不同阶段内随滑动速度改变方向, 分段应用 Whittaker 假定, 似应更符合实际的碰撞过程^[5].

设 $t = t'$ 为切向滑动速度为零的时刻, 即切向运动可能改变方向的时刻. 碰撞过程以 t' 为分界点划分为 $(0, t')$ 和 (t', t_c) 两个阶段, 法向冲量 I_y 相应地分解为 I_y' 和 I_y'' 两部分

$$I_y = \int_0^{t'} F_y(\tau) d\tau, \quad I_y'' = \int_{t'}^{t_c} F_y(\tau) d\tau \quad (16)$$

各阶段的切向冲量由 Whittaker 假定确定, 沿各阶段切向速度的反方向. 仅考虑 $v_{P_x}^- > 0$ 情形, 导出

$$I'_x = -fI'_y, \quad I''_x = fI''_y = f(I_y - I'_y) \quad (17)$$

仍以上述小球碰撞问题为例, 设 v_x 和 ω 在 $t = t'$ 时刻的值为 v'_x 和 ω' , 在 $(0, t')$ 阶段利用积分形式的沿 x 轴的动量定理和相对质心的动量矩定理列出

$$m(v'_x - v_x^-) = -fI'_y \quad (18a)$$

$$J(\omega' - \omega^-) = -frI'_y \quad (18b)$$

解出

$$v'_x = v_0 \sin \alpha - \frac{f}{m} I'_y, \quad \omega' = \frac{\gamma v_0}{r} - \frac{5f}{2mr} I'_y \quad (19)$$

利用 $t = t'$ 时刻的切向速度 v'_{P_x} 为零的条件

$$v'_{P_x} = v'_x + \omega' r = 0 \quad (20)$$

将式 (19) 代入此条件, 导出

$$I'_y = \left(\frac{2}{7f} \right) m v_0 (\gamma + \sin \alpha) \quad (21)$$

在 (t', t_c) 阶段, 设滑动速度和冲量 I''_x 改变方向, 即 $v_{P_x}(t) < 0$ ($t' \leq t \leq t_c$). 将式 (3), (18), (20) 等代入动量定理和相对质心的动量矩定理, 冲量 I''_y 的方向沿 x 轴的正向

$$m(v_x^+ - v'_x) = fI''_y \quad (22a)$$

$$J(\omega^+ - \omega') = frI''_y \quad (22b)$$

将式 (4), (17) 代入, 解出

$$\left. \begin{aligned} v_x^+ &= v_0 \left[f(1+e) \cos \alpha - \frac{4}{7}(\gamma + \sin \alpha) \right] \\ \omega^+ &= \frac{\gamma v_0}{r} + \frac{5}{2} \left[f(1+e) \cos \alpha - \frac{4}{7}(\gamma + \sin \alpha) \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

设刚体碰撞前平动, 令 $\gamma = 0$, 利用上述数据计算得到 $v_x^+ = 0.30v_0$, $\omega^+ = 0.76v_0/r$, 能量变化 $\Delta T/T_0 = -0.67 < 0$. 虽未出现机械能增大, 但算出的碰撞后滑动速度 $v'_{P_x} = 1.06v_0 > 0$. 即改变方向的碰撞冲量使刚体沿原方向继续滑动, 与滑动速度改变方向的假设, 即 (t', t_c) 阶段内 $v_{P_x}(t) < 0$ 的前提产生矛盾. 其结果不可信.

4 修改方案之二

1991 年 Smith 采用另一种方式考虑滑动速度变向的影响^[7], 他提出将碰撞前后滑动速度的代数和与绝对值之和之比对切向冲量进行修正. 定义修正系数 η

$$\eta = \frac{v_x^+ |v_x^+| + v_x^- |v_x^-|}{(v_x^+)^2 + (v_x^-)^2} \quad (24)$$

将式 (7) 乘以 η 后得到修正后的切向冲量 I_x

$$I_x = -\eta f(1+e) m v_0 \cos \alpha \quad (25)$$

如滑动方向不变, v_x^+ 与 v_x^- 同号, 则 $\eta = 1$, 上式与通常的 Whittaker 假定式 (7) 一致. 如滑动方向改变, v_x^+ 与 v_x^- 异号, 则 $\eta < 1$, 切向冲量 I_x 减小. 将式 (25) 代入动量定理和动量矩定理 (8), 导出

$$v_x^+ = v_0 [\sin \alpha - \eta f(1+e) \cos \alpha] \quad (26a)$$

$$\omega^+ = \frac{v_0}{r} \left[\gamma - \frac{5\eta f}{2} (1+e) \cos \alpha \right] \quad (26b)$$

对于滑动方向改变情形, 当相对滑动从沿 x 轴正方向变为为负方向的 v_x^+ 时, 令 $v_x^+ = -|v_x^+|$, 引入变量 $\xi = |v_x^+|/v_0$, 将式 (24) 代入式 (26a), 展开后化简为

$$\xi^2 + [f(1+e) \cos \alpha] \xi + [\sin \alpha - f(1+e) \cos \alpha] \sin \alpha = 0 \quad (27)$$

利用上述数据从代数方程 (27) 解出 $\xi = 0.0726$, 对应于 $v_x^+ = -0.0726v_0$, $\eta = 0.96$, 代入式 (26b), 得到 $\omega^+ = (\gamma - 1.41)v_0/r$. 对于平动刚体的 $\gamma = 0$ 情形, 利用式 (12) 算出 $\Delta T/T_0 = -0.38 < 0$, 即碰撞后的机械能减小. 但对于碰撞前以较大角速度逆向转动的刚体, 例如 $\omega^- = -0.5v_0/r$, 即 $\gamma = -0.5$, 仍得到机械能增大的 $\Delta T/T_0 = 0.31 > 0$. 可见即使修改方案对个别情况能避免 Kane 难题, 仍不能保证在任何情况下不出问题.

5 难题的产生原因

Whittaker 假定仅根据刚体在碰撞前后法向速度的变化, 利用简单的 Coulomb 摩擦定律计算切向碰撞冲量, 而忽视了刚体在碰撞前后包括转动运动和切向运动在内的总体运动状态的综合影响, 是产生 Kane 难题的根本原因. 切向碰撞冲量对刚体的作用结果不仅改变刚体的质心速度, 而且改变刚体绕质心转动的角速度. 碰撞后的动能增量 ΔT 由平动动能增量 ΔT_1 和转动动能增量 ΔT_2 组成, 其计算公式为^[1]

$$\begin{cases} \Delta T_1 = \frac{1}{2} m [(v^+)^2 - (v^-)^2] = I_x \left(\frac{v^+ + v^-}{2} \right) \\ \Delta T_2 = \frac{1}{2} J [(\omega^+)^2 - (\omega^-)^2] = I_x r \left(\frac{\omega^+ + \omega^-}{2} \right) \end{cases}$$

平动刚体碰撞后, 其平动动能增量 ΔT_1 因切向冲量的阻尼作用而小于零, 但也使转动动能增量 ΔT_2 从无到有地出现, 导致总能量增大.

类似现象也发生在碰撞前的刚体朝相反方向强烈旋转的情形. 由于滑动速度 v_P 和质心速度 v 方向相反, 与滑动速度 v_P 相逆的切向碰撞冲量使绕质心的转动减速, 同时使质心运动加速. 如碰撞前刚体朝相反方向的旋转不够强烈, 未能改变滑动速度 v_P 的方向, 则 v_P 与 v 方向一致, 切向碰撞冲量使质心运动减速, 同时使绕质心的转动加速. 这两种情况均出现切向碰撞冲量作正功的现象, 当正功超过了负功时总能量自然增大.

6 结束语

Kane 难题的出现揭示了关于摩擦碰撞的 Whittaker 假定的缺陷. 切向碰撞冲量不能仅由法向冲量和摩擦系数确定, 而应考虑刚体碰撞前后总体运动状态的综合影响. 除文中叙述的对 Whittaker 假定所做的几种修改方案以外, 还有形式更复杂的方案被提出. 但任何方案均为某种假定, 要使方案被接受, 至少应该避免出现机械能增加的 Kane 难题. 文中的 Smith 方案可使 Kane 算例的机械能增量为负值, 但也不能保证在其它情况下避免机械能增大. 由此可见, 作为经典力学组成部分的碰撞问题仍是一个未能完全解决的困难问题, 对于摩擦碰撞问题的认识还有待继续探索和研究.

参 考 文 献

1 刘延柱, 朱本华, 杨海兴. 理论力学 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2009

- 2 Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge: Cambridge University Press, 1904
- 3 Routh EJ. Dynamics of a System of Rigid Bodies. London, Macmillan, 1905
- 4 Kane TR, Levinson DA. Dynamics, Theory and Applications. New York: McGraw-Hill, 1985 (中译本: T.R. 凯恩, D.A. 列文松著. 贾书惠, 薛克宗译. 动力学理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 1988)
- 5 Keller JB. Impact with friction. *ASME, J Applied Mechanics*, 1986, 53: 1-4
- 6 Brach RM. Rigid body collisions. *ASME, J Applied Mechanics*, 1989, 56: 133-138
- 7 Smith CE. Predicting rebounds using rigid-body dynamics. *ASME, J Applied Mechanics*, 1991, 58: 754-758
- 8 刘延柱. 刚性椭圆对固定面的三维摩擦碰撞. *力学学报*, 1997, 29(6): 726-732

(责任编辑: 刘俊丽)

关于 Newton 力学和 Lagrange 力学的守恒量¹⁾

薛 纭²⁾

(上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418)

摘要 试图阐明 Newton 力学和 Lagrange 力学在寻求守恒量方法上的异同. 用两个例子说明动量或动量矩守恒与循环积分在方法和结果上的差异. 分析表明, Noether 对称性是在更高的层次上揭示守恒规律. 对同一力学系统, 不同的方法得到的结果有重合也有区别, 可取其所长联合使用.

关键词 动量守恒, 动量矩守恒, 循环积分, 对称性

中图分类号: O316, O313 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2012)01-094-03

力学系统的守恒量在理论分析、方程简化和数值计算中都具有重要意义, 一直受到人们的关注. Newton 力学方法、分析力学方法和对称性方法是目前寻找守恒量的 3 种途径^[1-3], 文献 [1] 对此有精辟的阐述和分析. 就守恒量的存在条件而言, Newton 力学是考察力的作用和运动状态; Lagrange 力学是关注保守系统的 Lagrange 函数中是否存在循环坐标或显含时间; 而 Noether 对称性方法则转而寻找满足对称性条件的无限小变换.

本文具体讨论 Newton 力学和 Lagrange 力学寻求守恒量方法上的异同. 一般认为循环积分包含动量和动量矩守恒, 似乎具有普遍意义. 事实上循环积分与动量和动量矩守恒并非完全等同 (图 1). 而 Noether 对称性是在更高的层次

动量或动量矩守恒

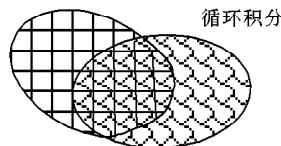


图 1 动量或动量矩守恒和循环积分存在异同

上揭示守恒规律.

1 Lagrange 力学的守恒量

以保守系统为例. 在很多情况下 Lagrange 力学的循环积分表达了 Newton 力学的动量或动量矩守恒. 然而, 由于 Lagrange 力学由 D'Alembert 原理和虚功原理导出, 其守恒量的存在与否必定与所选取的广义坐标和力的虚功有关. 当沿某一坐标轴有虚功为零的力存在, 且 Lagrange 函数不含此广义坐标时, 所导出的循环积分就不是 Newton 力学表达的动量或动量矩守恒. 含有纯滚动轮的多自由度系统就可能属于这种情况 (图 2~ 图 3).

以文献 [4] 中的滚环-单摆系统为例: 设质量为 m 半径为 r 的细圆环在圆心 A 上铰接一长度为 l 质量亦为 m 的单摆 B , 圆环在水平面上作纯滚动^[4], 如图 2 所示.

2011-07-12 收到第 1 稿, 2011-07-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10972143).

2) 薛纭, 博士, 教授, 主要研究方向为弹性细杆的非线性动力学, 分析力学等. E-mail: xueylyf@citiz.net; xy@sit.edu.cn