

# 响应面法在结构参数灵敏度及可靠性分析中的应用<sup>1)</sup>

陈学前<sup>2)</sup> 肖世富 刘信恩

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川绵阳 621900)

**摘要** 采用 Box-Behnken 矩阵设计方法进行试验设计, 并根据设计点的响应, 利用最小二乘回归法建立响应面函数. 将响应面函数中参数的梯度信息与其分散程度结合, 得到各参数的灵敏度系数, 再归一化灵敏度系数得到概率灵敏度; 将响应面模型与一次二阶矩法相结合计算结构的可靠度. 针对一个具体算例, 分别采用基于响应面法与基于 ANSYS 的 Monte Carlo 法计算了结构的灵敏度及可靠度值, 结果的一致性验证了该方法的有效性.

**关键词** 响应面法, 概率灵敏度, 可靠性

中图分类号: O313, TU311.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2012)03-032-04

DOI: 10.6052/1000-0879-11-440

## AN APPLICATION OF RESPONSE SURFACE METHOD TO STRUCTURAL PARAMETER SENSITIVITY AND RELIABILITY ANALYSIS<sup>1)</sup>

CHEN Xueqian<sup>2)</sup> XIAO Shifu LIU Xin'en

(Institute of Systems Engineering, CAEP, Sichun Mianyang 621900, China)

**Abstract** It is often necessary to study parameter sensitivity and structural reliability. The test design points of input-variables are obtained by the Box-Behnken matrix method in this paper. According to the responses of specimens, the coefficients of the response surface function are identified by a least-squares regression. The steps of calculating probability sensitivity are as follows, firstly, computing the gradients of input-variables respectively, secondly, multiplying the gradient and the related range, and finally normalizing the above quantities. The structural reliability is analyzed by combining the response surface model and the first-order second-moment method. The sensitivity and the reliability of an example are analyzed by the response surface method and the Monte Carlo method in ANSYS. The results of two methods are consistent, which shows that the method in the paper is valid and feasible.

**Key words** response surface method, probability sensitivity, reliability

传统的工程结构设计通常是基于确定性概念, 即用某种均值参数系统代替原结构系统, 并进行确定性计算分析来指导结构设计修改. 为了弥补结构中不确定性因素带来的不安全性, 专家们在确定性模型中引入了安全系数, 这是一种较粗糙的评价结构安全程度的方法<sup>[1]</sup>. 随着现代模型验证与确认 (verification and validation, V&V) 的发展, 考虑参数不确定性如何能使结构设计及可靠性评估更为合

理<sup>[2-3]</sup>. 考虑参数不确定性的结构与可靠性分析首先需要对参数进行灵敏度分析, 因为参数灵敏度分析对工程结构的设计、优化、诊断维修等均有重大意义<sup>[4]</sup>. 对于工程结构的可靠性和参数灵敏度分析, 目前的方法主要有两类: 一类是统计的方法<sup>[5-6]</sup>, 即为 Monte-Carlo(MC) 随机有限元法. 该法的精度高, 但是由于该方法需要反复进行大量的模拟计算, 针对大型复杂结构计算量过于庞大、费

2011-11-14 收到第 1 稿, 2012-03-31 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金委员会—中国工程物理研究院联合基金 NSAF(10876100), 中国工程物理研究院重点基金 (2010A0203007, 2011A0203010) 资助.

2) 陈学前, 1975 生, 男, 硕士, 副研究员, 主要从事结构动力学研究. E-mail: chenxq@caep.ac.cn

时；另一类是基于快速响应模型的可靠度分析方法<sup>[7]</sup>，如神经网络、快速响应面法等，该方法通过快速的响应模型计算代替真实结构的计算，从而大大节约了有限元计算量，但其可靠性及灵敏度分析精度取决于代理模型的泛化能力和拟合精度。

本文拟采用响应面法并结合有限元法对一个阻尼圆板考虑其组成材料具有不确定性时的基频进行可靠性分析，同时分析各不确定参数的概率灵敏度，定量分析各参数对基频的影响程度。最后利用 ANSYS 提供的 MC 分析方法计算的可靠度值和灵敏度分析结果来验证响应面法在结构可靠性分析中的应用的可行性和有效性。

## 1 响应面法

响应面法的基本思想是假设随机输入变量对结构响应变量的影响可用数学函数来表达，通过确定性有限元方法在随机输入变量空间构造有限样本点，用二次多项式拟合这些样本点，得到响应面函数。二次多项式可以表示为

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

式中， $a_0, b_i$  及  $c_{ij}$  为待定系数，需根据试验样本点的计算结果对其进行识别。

响应面法包括试验设计和回归分析两部分内容，试验设计用来确定抽样点在输入变量抽样空间的位置，要求抽样点数量少但又能有效包含抽样空间的信息以保证响应面的精度。针对响应面法常用的试验设计方法有中心复合设计法（又称 CCD 方法）和 Box-Behnken 矩阵设计方法（又称 BBM 法）。本文采用试验设计方法为 BBM 法，该方法的设计点由设计参数的中心点和边界点组成。

在试验样本点确定后，通过有限元分析获得样本数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。将设计参数与特征量的样本数据代入式 (1)，采用最小二乘法可估计式 (1) 中多项式系数  $a_0, b_i$  及  $c_{ij}$ 。

通常响应面的精度可根据下式判断

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2)$$

式中， $\tilde{y}_i$  为响应面模型的计算值， $y_i$  为真值（有限元分析的计算结果）， $\bar{y}$  为真值的平均值。 $R^2$  值越接近

1，则得到的回归模型就越接近实际情况。经检验，若响应面模型精度符合要求，则可利用其进行下一步工作；不符合，应增加样本点，重新试验设计。

## 2 基于响应面法的概率灵敏度分析

灵敏度分析对结构的可靠性优化设计有重要的作用，传统的确定灵敏度通常只是局部梯度信息，通常做法是将其中一个输入变量改变一个小量，其它输入变量保持不变，此时输出变量的改变量与该输入变量的改变量之比即为该输入变量的灵敏度系数。这种灵敏度分析方法忽略了变量之间的相互作用，且没有考虑输入变量的实际变化范围对输出量的影响。工程实际中，各输入变量的变化范围是不同的，因此，灵敏度分析有必要将梯度信息与输入变量的分散程度综合考虑。概率灵敏度分析则考虑了二者的综合影响，根据响应面函数，其定义如下

$$S_i = \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i^+ - x_i^-) \right| / \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \cdot (x_i^+ - x_i^-) \right| \quad (3)$$

式中， $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  分别是不确定参数的均值， $x_i^+$ 、 $x_i^-$  分别是第  $i$  个不确定参数的上下限，在实际操作中一般可取为  $\bar{x}_i \pm 3\sigma$ 。

## 3 基于响应面法的可靠性分析

将前面构造的响应面函数作为可靠性分析中的响应面模型。针对结构强度与刚度可靠性，其功能函数分别为

$$G(x_i) = Y - \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4a)$$

$$G(x_i) = \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) - Y \quad (4b)$$

其中  $Y$  为给定的结构响应阈值，若  $G(x_i) > 0$  则认为结构可靠，若  $G(x_i) < 0$  则结构失效，按均值一次二阶矩法<sup>[1]</sup>可求得结构系统的可靠度指标  $\beta$  为

$$\beta = \frac{G(\bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial G}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n} \right)^2 \sigma_i^2}} \quad (5)$$

其中  $\bar{x}_i$  为各个材料参数的均值， $\sigma_i^2$  为各个材料参数的方差。

## 4 应用研究

设计一个含约束阻尼的 5 层阻尼圆板，圆板半

径为 200mm, 圆板周边固支, 其中 1, 3, 5 层为铝, 2, 4 层为黏弹阻尼材料. 圆板断面的局部示意图如图 1 所示 (尺寸单位为 mm). 问题中的不确定参数为铝材和黏弹阻尼材料的弹性模量和泊松比  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$ , 假定它们均服从正态分布, 其均值和标准差分别为  $E_1 = (70 \pm 3) \text{ GPa}, E_2 = (40 \pm 6) \text{ GPa}, \mu_1 = 0.3 \pm 0.02, \mu_2 = 0.4 \pm 0.03$ . 试验设计的样本点一般在  $(\mu - f\sigma, \mu + f\sigma)$  内选取, 其中  $f$  的取值通常在 1~3 之间, 本文分别取  $f$  为 1, 2, 3. 当  $f$  取定时, 对于每个因素取  $\mu$  和  $\mu \pm f\sigma$  3 个值, 这样该问题便成为一个四因素三水平的问题. 根据 MATLAB 提供的 Box-Behnken 矩阵设计方法进行试验设计, 得到 27 个试验设计点, 由于有 3 个重复的中心点, 故在 ANSYS 中只需要进行 25 次确定性的模态计算, 分析得到阻尼圆板的基频样本值. 再根据式 (1) 给出响应面函数形式, 对样本进行拟合分析, 得到各项次的系数如表 1 所示.

根据表 1 中各数据, 结合各样本数据及联合公

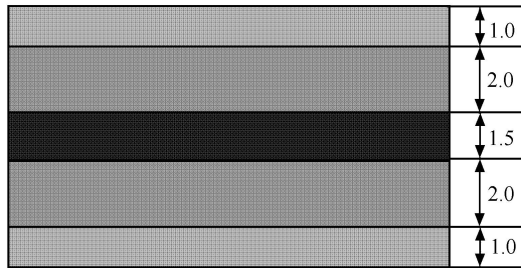


图 1 圆板断面局部示意图

表 1 不同  $f$  值下圆板基频响应面函数的回归系数

参数项	$f = 1$	$f = 2$	$f = 3$
$a_0$ (常数项)	$1.201 \times 10^{-8}$	$1.222 \times 10^{-8}$	$1.2578 \times 10^{-8}$
$E_1$	$2.797 \times 10^{-6}$	$2.758 \times 10^{-6}$	$2.6852 \times 10^{-6}$
$E_2$	$3.182 \times 10^{-3}$	$3.231 \times 10^{-3}$	$3.3202 \times 10^{-3}$
$\mu_1$	$2.435 \times 10^{-9}$	$2.465 \times 10^{-9}$	$2.5180 \times 10^{-9}$
$\mu_2$	$1.580 \times 10^{-9}$	$1.611 \times 10^{-9}$	$1.6669 \times 10^{-9}$
$E_1 E_2$	$2.793 \times 10^{-12}$	$2.801 \times 10^{-12}$	$2.8134 \times 10^{-12}$
$E_1 \mu_1$	$8.695 \times 10^{-8}$	$8.965 \times 10^{-8}$	$9.4672 \times 10^{-8}$
$E_1 \mu_2$	$-5.105 \times 10^{-7}$	$-5.008 \times 10^{-7}$	$-4.8353 \times 10^{-7}$
$E_2 \mu_1$	$3.347 \times 10^{-4}$	$3.322 \times 10^{-4}$	$3.2726 \times 10^{-4}$
$E_2 \mu_2$	$-4.378 \times 10^{-4}$	$-4.474 \times 10^{-4}$	$-4.6419 \times 10^{-4}$
$\mu_1 \mu_2$	$6.314 \times 10^{-12}$	$3.398 \times 10^{-12}$	$-2.1368 \times 10^{-12}$
$E_1^2$	$-1.665 \times 10^{-14}$	$-1.637 \times 10^{-14}$	$-1.5866 \times 10^{-14}$
$E_2^2$	$-1.784 \times 10^{-8}$	$-1.813 \times 10^{-8}$	$-1.8661 \times 10^{-8}$
$\mu_1^2$	$3.827 \times 10^{-10}$	$3.914 \times 10^{-10}$	$4.0604 \times 10^{-10}$
$\mu_2^2$	$-6.519 \times 10^{-10}$	$-6.395 \times 10^{-10}$	$-6.1767 \times 10^{-10}$

式 (2), 计算  $f = 1, 2, 3$  时  $R^2$  值分别为 0.9999, 0.9998, 0.9996, 说明所建立的响应面的精度很好, 可利用其进行灵敏度及可靠度计算.

将表 1 中数据代入式 (3), 计算  $f$  取不同值时各不确定参数  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$  的概率灵敏度系数如表 2 所示. 由于要考察结构的基频可靠性, 基频是刚度的反映, 故将表 1 中数据代入式 (4b) 与式 (5), 再根据基频阈值 180Hz, 可得  $f$  取不同值时结构的可靠度指标, 又因为参数都视为正态分布, 可根据公式  $P_r = \Phi(\beta)$  计算结构的可靠度如表 3 所示 ( $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数).

表 2 参数概率灵敏度的计算结果

		$E_1/\%$	$E_2/\%$	$\mu_1/\%$	$\mu_2/\%$
响应面法	$f = 1$	8.303	77.937	2.698	11.062
	$f = 2$	8.316	78.102	2.684	10.898
	$f = 3$	8.328	78.402	2.661	10.609
MC 法		8.305	79.654	0.756	11.284

表 3 结构可靠度计算结果

	响应面法			MC 法
	$f = 1$	$f = 2$	$f = 3$	
可靠度/%	98.66	98.65	98.62	97.68

商用有限元软件 ANSYS 是工程中常用的计算软件, 其中的概率分析模块具有进行结构可靠性和灵敏度分析的功能. 对于结构简单的问题可以利用 MC 法来检验方法的正确性. 针对前面所给定的结构, 结构中不确定参数分布和阈值都取一样, 基于 ANSYS 概率模块采用直接 MC 抽样 5000 次, 最终计算得到结构参数概率灵敏度系数和可靠度分别见表 2 和表 3.

通过表 2 可以看出, 阻尼材料的弹性模量对圆板的基频影响最大, 其次是阻尼材料的泊松比, 铝板的泊松比对圆板的基频影响最小. 不同  $f$  取值时, 利用响应面法计算参数的灵敏度系数差别很小, 都比较接近 MC 法的计算结果. 由于工程中更关心灵敏度系数最大的参数, 此时,  $f = 3$  响应面法的计算结果与 MC 法的结果更接近, 因此, 工程中利用响应面法计算参数灵敏度时, 建议  $f$  取 3.

表 3 表明, 不同  $f$  取值时, 利用响应面法计算结构可靠度差别很小, 都比较接近 MC 法的计算结果, 其中,  $f = 3$  时的结果与 MC 法的结果更接近, 故工程中利用响应面法计算结构可靠度时, 建议  $f$  取 3. 针对本文的结构与参数分布, 通过响应面法得

到结构的可靠度比 MC 法的结果略大 (约大 1%), 略偏危险, 虽然针对不同结构与参数分布, 可能得到偏保守的结果, 这也说明利用响应面法计算的可靠度只可作为结构安全的初步评估, 最终的评估还需要结合其他方法使用。

总的来说, 两种方法计算得到的结构可靠度和参数概率灵敏度系数结果比较接近, 说明基于响应面法计算结构的可靠性及参数的概率灵敏度系数是可行的。

## 5 结 论

本文探讨了响应面方法在结构可靠性及参数灵敏度分析中的应用和可行性。将响应面函数中参数的梯度信息与参数的分散程度结合, 得到各参数的灵敏度系数, 再归一化灵敏度系数得到概率灵敏度; 将响应面模型与一次二阶矩法相结合计算结构的可靠度。通过与 ANSYS 提供的 MC 法进行程序验证, 结果表明基于响应面法的灵敏度及可靠度分析与 MC 分析结果的差别比较小, 表明本文所提的方法是可行的。由于该方法计算速度快, 计算量小, 精度较高, 故在复杂结构的可靠性与参数灵敏度分析具有一定的应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 王善, 何健. 导弹结构可靠性. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2002. 1-10
- 2 Ladeveze P, Puel G, Deraemaeker A, et al. Validation of structural dynamics model with uncertainties. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 1639-1675
- 3 Moens D, Vandepitte D. A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, 194: 1527-1555
- 4 Wen YK. Reliability and performance-based design. *Struct Safety*, 2001, 23: 407-428
- 5 Yang ZJ, Su XT. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46: 3222-3234
- 6 王东, 陈建康, 王启智等. Monte-Carlo 随机有限元结构可靠度分析新方法. 四川大学学报, 2008, 40(3): 20-26 (Wang Dong, Chen Jiankang, Wang Qizhi, et al. The new method of structural reliability analysis by Monte-Carlo stochastic finite element. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2008, 40(3): 20-26 (in Chinese))
- 7 李强, 郭云健, 李鹏辉等. 一种基于响应面法的火炮身管设计参数灵敏度分析计算方法. 火炮发射与控制学报, 2010, 3(1): 56-59 (Li Qiang, Guo Yunjian, Li Penghui, et al. A sensitivity analysis calculation method of gun barrel design parameter based on response surface method. *Journal of Gun Launch & Control*, 2010, 3(1): 56-59(in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

(上接第 31 页)

(4) 随着翼缘宽度的增加, 或者压杆跨度的减小, 即随着跨宽比 (若上下翼缘等宽, 跨宽比为  $l/(2B_1)$  或  $l/(2B_2)$ ; 若上下翼缘不等宽, 跨宽比为  $l/(B_1 + B_2)$ ) 的减小, 修正系数逐渐减小. 当跨宽比小于 4 时, 采用欧拉公式计算临界荷载, 将产生较大的误差. 故欧拉公式仅适用于大跨宽比的压杆。

(5) 若上下翼缘总面积不变, 改变上下翼缘宽度的比值, 临界荷载修正系数的变化很小, 这说明, 不管上下翼缘是否等宽, 只要总面积相同, 则临界荷载几乎相同。

## 参 考 文 献

- 1 龙驭球, 包世华. 结构力学 (II). 北京: 高等教育出版社, 2006
- 2 程翔云. 梁桥理论与计算. 北京: 人民交通出版社, 1990
- 3 Vlasov VZ. Thin-Walled Elastic Beams. Washington DC: National Science Foundation, 1961
- 4 Timoshenko SP, Gere JM. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill, 1961
- 5 吴秀水, 辛克贵, 姜美兰. 横向荷载作用下薄壁杆件稳定分析的有限杆元法. 工程力学, 2001, 18(1): 47-55 (Wu Xiushui, Xin Kegui, Jiang Meilan. Ateral buckling analysis of thin-

- walled members by finite member element method. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(1): 47-55 (in Chinese))
- 6 王银辉, 吴剑敏, 刘东. 变截面空心薄壁墩的稳定计算. 公路, 2004, (1): 74-77 (Wang Yinghui, Wu Jianming, Liu Dong. Stability calculation of non-prismatic thin-walled box piers. *Highway*, 2004, (1): 74-77 (in Chinese))
- 7 魏德敏, 陈宇清. 薄壁曲梁的稳定极限承载力. 力学与实践, 2006, 28(1): 19-22 (Wei Demin, Chen Yuqing. Ultimate bearing capacity of thin-walled curved beams. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(1): 19-22 (in Chinese))
- 8 张永健. 考虑剪力滞效应的薄壁结构特性分析. [博士论文]. 西安: 长安大学, 2007
- 9 郑昌坝, 张洪海, 林志祥. 工字型截面悬臂钢梁的稳定性研究. 力学与实践, 2007, 29(6): 56-59 (Zheng Changba, Zhang Honghai, Lin Zhixiang. On stability of I-section steel beam cantilevers. *Mechanics in Engineering*, 2007, 29(6): 56-59 (in Chinese))
- 10 胡启平, 董宝锋, 吕铭. 基于哈密顿理论的薄壁杆件稳定性分析. 四川建筑科学研究, 2011, 37(4): 26-29 (Hu Qiping, Dong Baofeng, Lü Ming. Analysis for stability of thin-walled bar using Hamiltonian theory. *Sichuan Building Science*, 2011, 37(4): 26-29 (in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)