

无滑动的纯滚动时, $\omega_1 = \omega_2 = v/R$, 代入式 (2) 导出

$$F_{x1} = F_{x2} = m_1 \dot{v} \quad (3)$$

代入式 (1a) 导出

$$F = m_* \dot{v}, \quad m_* = m + 2m_1 \quad (4)$$

其中, m_* 可作为计算车子加速度的等效质量, 在总质量 m 上附加的 $2m_1$ 体现车轮旋转的惯性效应.

设质心 O_c 距地面的高度为 h , O 点与 P_1 和 P_2 的距离为 l_1 和 l_2 , 列写车体对质心 O_c 的动量矩定理

$$J_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \dot{\omega}_2 = -[F - (F_{x1} + F_{x2})]h + F_{y2}l_2 - F_{y1}l_1 \quad (5)$$

利用前面给出的关系式导出

$$F_{y1} = \frac{1}{l} [mgl_2 - (mh + 2m_1R)\dot{v}] \quad (6a)$$

$$F_{y2} = \frac{1}{l} [mgl_1 + (mh + 2m_1R)\dot{v}] \quad (6b)$$

可见加速的结果引起后轮的支承力增大, 前轮的支承力减小. 当加速度过大, 达到临界值 \dot{v}_{cr} 时

$$\dot{v}_{cr} = \left(\frac{ml_2}{mh + 2m_1R} \right) g \quad (7)$$

前轮支承力为零而解除地面约束, 后轮的约束力达到极限值 mg . 如再增加加速度, 车体就有向后翻倒的危险. 不过情况还不至于太糟, 因为加速过程中驾车人和车体连成一体, 驾车人的主观控制作用足以防止倾翻发生.

但在双足收起的惯性滑行阶段, 情况就危险多了. 令式 (1a) 中 $F = 0$, $\dot{v} = -|\dot{v}|$, 导出

$$F_{x1} = F_{x2} = \frac{1}{2} m |\dot{v}| \quad (8)$$

代入式 (2), 得到

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \frac{m |\dot{v}|}{2m_1R} \quad (9)$$

轮子在接触点 P_1 和 P_2 处产生的线加速度为 $\dot{v}_{P1} = \dot{v}_{P2} = m |\dot{v}|/2m_1 > |\dot{v}|$. 表明在惯性滑行阶段, 前后轮均出现滑动. 代入方程 (5), 解出

$$F_{y1} = \frac{m}{l} [gl_2 + (h - R) |\dot{v}|] \quad (10a)$$

$$F_{y2} = \frac{m}{l} [gl_1 - (h - R) |\dot{v}|] \quad (10b)$$

减速的结果使前轮的支承力增大, 后轮的支承力减小. 也存在减速度的临界值 $|\dot{v}_{cr}|$

$$|\dot{v}_{cr}| = \left(\frac{l_1}{h - R} \right) g \quad (11)$$

当减速度达到临界值 $|\dot{v}_{cr}|$ 时, 后轮支承力为零而解除地面约束, 前轮的约束力达到极限值 mg . 如再增加减速度, 车体即向前倾翻. 要避免这种危险, 必须尽量降低重心离轮心的高度 $(h - R)$, 加大重心与前轮的距离 l_1 . 至于 Fliz 车的侧向稳定性, 则和一般自行车没什么不同, 也是依靠前叉转轴与地面交点落在接触点前方的脚轮效应^[3].

Fliz 车提供了一种健康环保的全新驾车体验和出行方式. 这一发明已经入围本年度英国工业设计领域的詹姆斯·戴森奖 (James Dyson Award) 的提名. 不过批评者却认为这种车不稳定和不安全, 直行都累死人, 更何谈爬坡上山, 因此难以推广使用. 尽管负面评论不少, 但考虑到自行车一百多年来结构没多大变化的事实, Fliz 车的出现何尝不是一种打破常规的新创意呢.

参 考 文 献

- 1 Prigg M. The 'Flintstones' bicycle with no pedals or saddle. <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2199151/>, 6th Sept. 2012
- 2 刘延柱. 趣谈自行车运动. 力学与实践, 2008, 30(3): 100-111
- 3 刘延柱. 关于自行车的稳定性. 力学与实践, 2012, 34(2): 90-93

太极图的力学美

蒋持平¹⁾ 严 鹏

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘要 证明任意平面图形有两个“惯性矩旋心”, 它们位于惯性矩较大的主形心轴上, 与形心等距, 特殊情况下与形心重合. 以惯性矩旋心为原点的坐标轴旋转时, 图形的惯性矩守恒. 太极图阴阳两图形的“惯性矩旋心”都是一静一动, 两图静旋心位于太极中心, 两图动旋心在阴阳转化时作中心对

称运动. 从力学视角, 静旋心的安详守恒之美与动旋心的变化律动之美相反相成, 赋予太极图“漏宇宙万物演化之玄机”的神秘美.

关键词 太极图, 截面几何性质, 坐标旋转, 惯性矩旋心, 力学美

本文于 2012-06-27 收到.

1) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn

动静无端画一圈,分明擘破又浑全.

日池漏得先天意,钻入书窗个个圆.

宋代朱继芳的诗《太极图》点出了太极图的双圆(弧)构图特征及其所“漏”阴阳轮转,万物循环生化之玄机.

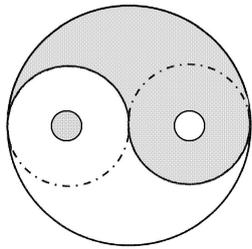
太极图作为中华传统文化的瑰宝,深刻地影响了中华民族的思维方式、思想文化观念和人文性格.从中医、气功、武术到道士的道袍和算命先生的卦摊,从孔庙到道教楼观台、三茅宫、白云观……处处可以见到太极图.

太极图也在世界异国文化中闪亮,出现在韩国和蒙古国国旗图案、新加坡和爱尔兰空军机徽、玻尔勋章族徽……中.

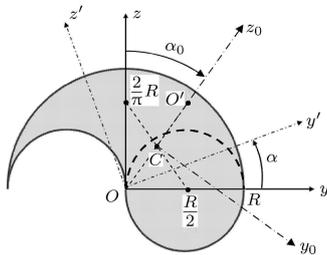
研究太极图的文献汗牛充栋. 本文将从力学的新视角, 探寻太极图这样简洁的双圆(弧)组成的图形, 为什么既安详又有神秘的不息运动感和韵律美.

先看第8届全国周培源大学生力学竞赛的太极图赛题^[1]: 图1(a)为阴阳鱼太极图, 要求证明图1(b)的太极鱼在所示坐标轴旋转时惯性矩守恒, 即

$$I_y = I_z = I_{y'} = I_{z'} = \text{常数} \quad (1)$$



(a) 阴阳鱼太极图



(b) 太极鱼图形

图 1

性质(1)不难利用材料力学的截面几何性质的知识证明. 深层次的问题是: 这样的优雅的坐标旋转时惯性矩守恒的性质, 究竟为神秘的太极鱼所独有, 还是任意平面图形的普遍性质? 它能不能为太极图安详中的神秘动感和韵律美研究提供一个新的力学视角?

为了回答第一个问题, 研究图2所示面积为A的任意形状的截面.

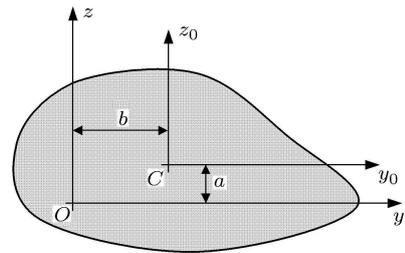


图 2

根据材料力学, 任意平面图形都存在主形心坐标系 Cy_0z_0 , 图形对主形心轴 y_0 和 z_0 的惯性积为 0

$$I_{y_0z_0} = 0 \quad (2)$$

一般情形下, 图形对两个主形心轴的惯性矩不相等. 不失一般性, 设对 z_0 轴的惯性矩较大

$$I_{z_0} > I_{y_0} \quad (3)$$

考虑坐标系平移, 根据平行移轴定理

$$I_y = I_{y_0} + a^2A \quad (4)$$

$$I_z = I_{z_0} + b^2A \quad (5)$$

$$I_{yz} = I_{y_0z_0} + abA \quad (6)$$

式中 A 为图形面积, a 和 b 分别是形心在新坐标系 Oyz 的坐标. 坐标系 Oyz 旋转时图形惯性矩守恒的条件是

$$I_{yz} = 0 \quad (7)$$

$$I_y = I_z \quad (8)$$

注意到式(2)和式(6), 条件(7)要求 a 和 b 至少有一个为 0, 即坐标系 Oyz 的原点 O 必须位于 Cy_0 轴或 Cz_0 轴.

注意到式(3)~(5), 条件(8)有两个解

$$a = \pm [I_{z_0} - I_{y_0}] / A]^{1/2}, \quad b = 0 \quad (9)$$

当 $I_{z_0} = I_{y_0}$ 时, 解答(9)成为

$$a = 0, \quad b = 0$$

本文将式(9)表示的两个坐标点称为平面图形的“惯性矩旋心”, 得出以下结论:

任意平面图形都有两个“惯性矩旋心”, 它们位于惯性矩较大的主形心轴上, 且与形心等距. 以惯性矩旋心为原点的坐标轴旋转时, 图形的惯性矩守恒. 特殊情形下, 两个惯性矩旋心与形心三心重合.

根据上述研究, 图1(b)的太极鱼还有一个惯性矩旋心. 事实上, 应用负面积法, 不难确定太极鱼的形心位于坐标点 $C(R/4, R/\pi)$, 连接 OC 并延长一倍, 即得到另一个惯性矩旋心坐标 $O'(R/2, 2R/\pi)$.

利用惯性矩旋心的概念, 能够简捷确定某些实际重要的主形心轴的位置. 如图1(b)太极鱼的惯性矩较大的主形心

轴 Cz_0 沿旋心与形心的连线 OC , Cz_0 与 Cz 轴的夹角 α_0 容易计算

$$\tan(\alpha_0) = \pi/4, \quad \alpha_0 = 38.15^\circ$$

另一主形心轴 Cy_0 与 Cz_0 垂直.

上述研究结果完美回答了第一个问题, 并发现了一个有趣的截面几何性质: 惯性矩旋心. 下一个的问题是: 太极图安详中的动感和韵律美与惯性矩旋心有关吗?

见图 1(a), 太极图中心 O 是阴鱼、阳鱼和整个图的一个公共旋心. 阴阳轮转, 图 1(a) 阴鱼的阳鱼眼生长, 鱼眼半径 r 从 0 变大, 最大可以达到 $R/2$; 完全对称地, 阳鱼的阴鱼眼的半径 r 也从 0 变化到 $R/2$. 容易证明, 在变化过程中, 阴阳两部分图形都始终有一个惯性矩旋心位于太极图中心 O , 同时阴阳两部分图形的惯性矩始终不变. 可见太极图中心 O 是变化中的阴阳两图形共同的不动旋心, 赋予太极图的安详守恒之美.

再看图 1(b) 阴图的另一个旋心 O' . 当阴鱼的阳鱼眼的半径为 r 时, 阴图的旋心 O' 的坐标为 $(\frac{R^2 - 8r^2}{2R}, \frac{2R}{\pi})$.

这表明当阴鱼的阳鱼眼半径 r 从 0 连续变化到 $R/2$ 时, 旋心 O' 的坐标从 $(R/2, 2R/\pi)$ 连续移动到 $(-R/2, 2R/\pi)$. 在 $(-R/2, 2R/\pi)$ 的极限情形, 阴鱼的头全部转化为阳, 头部变成尾, 阳鱼的头全部转化为阴并与阴鱼结合, 成为阴鱼的头 (见图 1(a) 虚线). 阳鱼也同时掉头, 并且阳图的动旋心始终位于阴图动旋心 O' 的中心对称位置. 可见在太极图阴阳轮转时, 阴阳两图的动旋心对称律动, 赋予太极图的变化律动之美.

从力学视角, 静旋心的安详守恒之美与动旋心的变化律动之美相反相成, 赋予太极图“漏宇宙万物演化玄机”的神秘美. 科学不仅自身能给予我们美的享受, 也有助于我们更深层次和更完整地领略人文艺术宗教之美.

参 考 文 献

- 1 清华大学命题组. 第八届全国周培源大学生力学竞赛试题. 力学与实践, 2011, 33(3): 102-103

“一夜连枷响到明”——打连枷的力学

周 靖¹⁾

(淮阴师范学院物理与电子电气工程学院, 江苏淮安 223300)

摘要 简要介绍了中国传统手工脱粒农具——连枷的结构与脱粒原理, 通过对连枷运动过程的分析, 指出了连枷使用的基本要点, 解释了操作者持柄双手为什么不受连枷拍打时产生的冲击力作用, 并对清代宫廷画作《耕织图》中所绘的连枷结构提出了质疑.

关键词 连枷, 铰链机构, 动量定理, 拍打

1 连枷——中国的传统手工脱粒农具

压膝霜稻报丰年, 镰响枷鸣野日天.

辅郡不知为水耨, 楚农新教命家田.

这是我国北宋 (960~1127) 时期的著名诗人宋祁 (998~1061) 所作《湖上见担稻者》的诗^[1]. 在这首诗中, 诗人不仅用“压膝霜稻报丰年”之诗句, 吟诵了当年许州地区的水稻丰收景象; 而且还用“镰响枷鸣野日天”道出了其时的水稻收割工具与连枷脱粒方式.

新筑场泥镜面平, 家家打稻趁霜晴;

笑歌声里轻雷动, 一夜连枷响到明.

这是南宋著名诗人范成大 (1126~1193) 所作的《四时田园杂兴》诗中一首^[2]. 诗人以轻快流畅的诗句, 真实描绘

了秋收时节, 农民们用连枷打稻时的欢快劳动场景.

霜时天气佳, 风劲木叶脱.

持穗及此时, 连枷声乱发.

黄鸡啄遗粒, 乌鸟喜聒聒.

归家抖尘埃, 夜屋烧梢柚.

这是我国南宋时期的著名诗人楼璠 (1090~1162) 所作的《耕图二十一首·持穗》^[3] 诗. 诗中不仅提到了当时的打稻 (脱粒) 过程叫做“持穗”, 而且还把它与脱粒工具——连枷联系在一起. 楼璠的《耕图二十一首》与他所作的《织图二十四首》, 被后人统称为《耕织图》. 此后, 历朝历代的帝王以皇室的名义摹绘“耕织图”或修订“耕织图”成为惯例, 以示重视农桑^[4]. 因此, 用连枷击打谷物脱粒遂成为《耕织图》中的一幅劳动场景. 如明代农学家邝璠编撰的《便民图纂》中的“打稻图”^[5]、清康熙帝玄烨的《御制耕织图诗》^[6]、雍正帝胤禛的《雍正像耕织图册》^[4] 中都绘有一幅用连枷脱粒的“持穗”图.

雉雏高飞夏风暖, 行割黄云随手断.

疏茎短若牛尾垂, 去冬无雪不相疑.

场头负归日色白, 穗落连枷声拍拍.

本文于 2012-01-16 收到.

1) E-mail: zhoujing5283@163.com