

第四,项目实施过程中注意一定的时效性.不少学生直到期末交稿的截止日期前才开始谋篇布稿,这就很难提高论文的质量.在前期要求学生提交研究方案,并定期进行检查,可促进他们研究活动的时间紧迫感.

第五,研究项目要有灵活性.如果校方的一些科技节之类的活动正好一起举办,可鼓励学生把两者结合起来进行课题实践,但课程论文仍应该保持完整的要求,保证考核评价的公正性.

以课题研究为导向的教学方法突出学生学习的主体性,学生按照自己的想法和知识,将力学知识的学习扩展到应用

力学解决实际问题.这种思路符合高校学生独立自主探索学习的心理需求,因此不论对应用型本科院校或者是研究型院校,都值得借鉴.

## 参考文献

- 1 孙立红,吴云鹏,刘宝良.深化材料力学教学改革提升学生专业素养.高等教育研究,2008,(9):54-55
- 2 马崇武,车京兰.对材料力学教学改革的研究.高等理科教育,2004,(6):76-78
- 3 谢仲贤,邱铁平.转变“工程力学”教学方法的探讨.力学与实践,2000,24(4):55-57

(责任编辑:刘俊丽)

# 特征值和特征向量知识在力学中的三处应用

谢根全<sup>\*1)</sup> 陈孝珍<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(湖南科技大学土木工程学院工程力学系,湖南湘潭 411201)

<sup>†</sup>(南阳理工学院土木工程系,河南南阳 473004)

**摘要** 特征值和特征向量是线性代数中的重要内容之一,在力学中有3处要运用这些知识,第一处是运用在求主应力和主方向中,第二处运用在求结构的动力学问题的固有频率和振型中,第三处是运用在求结构屈曲临界力中.

**关键词** 特征值,特征向量,结构动力学,主应力,主方向,屈曲临界力

中图分类号:G642.0 文献标识码:A

文章编号:1000-0879(2012)06-076-01

DOI: 10.6052/1000-0879-11-034

## 引言

力学对数学有很大的依赖性,没有学好数学想要成为力学家是很难想象的.甚至可以说没有学好数学就无法学好工科的其他课程.所以,作者要求自己大学一年级的学生一定要学好数学.像线性代数、微积分、空间解析几何等知识在力学中无处不有.下面以特征值和特征向量知识在力学中的运用为例做一介绍.

### 1 特征值和特征向量知识在求主应力和主方向中的运用

某一点的应力状态由6个应力分量决定,可以写成应力矩阵的形式<sup>[1]</sup>

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

如果能将式(1)中的非对角线元素变为0,这时剪应力为0,

根据主应力的定理:某一个面上只有正应力而无剪应力时,这个正应力为主应力.式(1)为实对称矩阵,总是可以对角化,也就是说通过初等变换可以把应力矩阵变为如下对角线矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)中的非对角线元素为剪应力,这时剪应力为0.因此,式(2)中的对角线元素分别为第一、第二和第三主应力.求主应力就变为求下列特征值方程的特征值

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

3个特征值对应的特征向量是3个主平面的法线方向,而根据不同的特征值对应的特征向量正交可知3个主应力的方向是相互正交的.

### 2 特征值和特征向量知识在求结构动力学问题中的运用

无阻尼多自由度系统的动力学微分方程总是可以写成<sup>[2]</sup>

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (4)$$

其中, $M$ 为系统质量矩阵, $K$ 为系统刚度矩阵, $x$ 为位移列向量.

2011-01-23 收到第1稿,2011-03-06 收到修改稿.

1) E-mail: xiaoyuanxixiong0@163.com

求解式 (4) 的广义特征值方程为

$$|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = 0 \quad (5)$$

系统的固有频率  $\omega_i^2 = \lambda_i$ , 每一个特征值对应一个特征向量, 对特征向量进行归一化就得到每一固有频率对应的振型. 如果系统刚度矩阵线性相关, 则系统存在刚体运动, 存在固有频率为零的情况.

### 3 特征值和特征向量知识在求结构临界屈曲力中的运用

结构屈曲的特征方程为

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{K}_\sigma)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{K}$  为系统刚度矩阵,  $\mathbf{K}_\sigma$  为系统几何刚度矩阵,  $\mathbf{x}$  为位移列向量. 最小特征值  $\lambda_{\min}$  (载荷因子), 即为屈曲临界载荷的表征. 不同的特征值对应不同的特征向量  $\mathbf{x}_i$ , 这个特征向量也可叫屈曲模式.

### 4 结论

在教学实践中, 作者给学生上《弹性力学》课时, 发现很多同学在学了材料力学后, 很难记住材料力学中求二维问题的主应力公式, 但是如果知道了求主应力就是求应力矩阵的特征值问题时, 他们就能很快求出主应力和主应力的方向. 即使记忆力好的学生, 他们也许在一两年内还记得材料力学中计算主应力的公式, 但是, 若干年后, 再问他们, 还能记得这些公式的学生应该所剩无几了. 在学习和教学的过程中, 对知识点进行总结, 要学会从全局出发, 对知识进行串联、串讲.

### 参 考 文 献

- 1 王敏中, 王炜, 武际可. 弹性力学教程. 北京: 北京大学出版社, 2002
- 2 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981

(责任编辑: 刘俊丽)

\*\*\*\*\*  
\* 新书架 \*  
\* \*\*\*\*\*

## 《音乐中的科学》前言

武际可

英国著名学者约翰·布莱金 (1928~1999) 说: “人类组织声音, 声音也组织人类”. 这话的意思是, 音乐和人类社会有着共生共存的关系, 也就是说, 音乐有助于规范人类的社会行为, 改变生产与生活方式, 强化、提升和净化人类经验和情感. 我国春秋战国时期的著作《周礼》则说: “凡音者, 生人心者也, 情动于中, 故形于声; 声成文, 谓之音.” 还说: “是故审声以知音, 审音以知乐, 审乐以知政, 而治道备矣.” 贝多芬说: “领悟音乐的人, 能从一切世俗的烦恼中超脱出来.” 可见中外古今对音乐都是很重视的. 音乐不仅可以陶冶性情, 还可以和谐社会, 实在是善莫大焉.

说实在的, 音乐是科学同艺术结合的产物. 在人类世代追求音乐发展中出过许多伟大的演奏家、歌唱家、作曲家和乐队指挥家. 当人们享受他们的音乐、歌唱、演奏的同时, 别忘记, 在他们背后还有许多科学家, 来揭示声音、音乐和各种乐器的奥秘; 在他们的背后有一串伟人的名字: 毕达哥拉斯、管子、伽利略、牛顿、伯努利、达朗贝尔、沈括、亥姆霍兹、朱载堉、韦伯等等.

音乐背后的科学问题, 首先是力学问题. 因为声音的产生和传播本身就是一个典型的力学问题, 乐器的研制和改进, 无论是管乐器还是弦乐器, 抑或是其他乐器, 都离不开深入的力学知识. 进一步说, 音乐不仅与力学有关, 它是与力学、数学、物理、生理学、心理学、电子学、计算机科学等多学科密切交叉的艺术领域. 不仅如此, 就是到今天来说, 也不能说在音乐和音响背后的科学道理都完全清楚了. 特别是对于研制新的音响设备中, 对于歌唱的计算机模拟中, 还存在许多困难问题等待研究解决.

本书并不是一本音乐艺术的专著, 也不是一本讲述音乐背后的科学原理的严肃的专门学术著作. 因为笔者既不是音乐家, 也够不上一个合格的音乐声学家. 不过笔者由于对音乐的业余爱好, 以及喜爱对音乐背后的科学道理的探求和思索, 写成了这二十多篇科普文章, 如果对于喜爱音乐而又喜爱科学的青少年朋友能够有一点启示, 产生进一步追根问底的兴趣, 笔者就很满足了. 这些文章中有一部分在科学网上笔者的博客上发表过. 有少数几篇在笔者以前的科普小册子《拉家常说力学》中刊出过, 因为也是关于音乐的, 经过一些补充, 又收入本书了.

因为笔者不是这两方面的内行, 所以说几句外行话, 或者说错, 也是难免的, 敬请读者批评指正.