

线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质及其应用

凡国龙, 梁晓庚

(中国空空导弹研究院, 河南 洛阳 471009)

摘要:研究了线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质,并基于该性质进行控制系统设计研究,给出控制器结构和 Lyapunov 函数取值估计;首先,以经典三回路为基础建立线性闭环跟踪系统微分方程;在完成系统数学模型的基础上,给出线性跟踪系统 Lyapunov 函数对时间的一阶导数为非负,二阶导数为非正,即线性跟踪系统 Lyapunov 函数最大值不是在系统的初始状态而是稳定状态这一论点;进而基于该 Lyapunov 函数性质对控制系统进行设计和 Lyapunov 函数取值进行研究;最后通过仿真验证,仿真结果表明所提出的线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质、控制器设计和 Lyapunov 函数取值估计是正确的。

关键词:线性跟踪系统; Lyapunov 函数; 幂指数收敛; 线性矩阵不等式

中图分类号: TJ765.2

文献标识码: A

文章编号: 1006-0707(2013)05-0134-03

The Nature of the Lyapunov Function and Its Application in the Linear Tracking System

FAN Guo-long, LIANG Xiao-geng

(China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009, China)

Abstract: The nature of the Lyapunov function of the linear tracking system is researched, given the structure of the controller and the estimated value of the Lyapunov function based on the nature. First, the linear differential equation of the closed-loop tracking system is established based on the classic three-loop autopilot structure; based on the Lyapunov function, given the theorem: the first derivative of a linear tracking system is non-negative, the second derivative is non-positive, and the maximum of the Lyapunov function is in steady state not in the initial state of the system. Then the control system is designed and the maximum of the Lyapunov function is evaluated based on the nature of the Lyapunov function. Finally simulation results show that the nature of the Lyapunov function of linear tracking system, the controller and the Lyapunov function value are correct.

Key words: linear tracking system; Lyapunov function; exponential convergence; linear matrix inequality

通常意思下的 Lyapunov 函数是基于受扰系统的稳定性给出的,由受扰系统状态变量和 Lyapunov 变量构成。在系统稳定性分析中外部的输入通常作为干扰,研究系统状态变量的偏差量在调节过程的收敛性,目前国内外学者通常是基于稳定系统 Lyapunov 函数性质进行控制系统分析或设计的^[2-7];而线性跟踪系统 Lyapunov 函数是由跟踪系统状态变量和 Lyapunov 函数构成,在系统跟踪设计过程中外部的输入

作为指令,研究系统状态某变量逐渐收敛跟踪输入指令。

本文针对线性跟踪系统,研究其 Lyapunov 函数性质,并基于该性质进行控制系统设计研究,给出 Lyapunov 函数取值估计。首先,以经典三回路为基础^[1]建立线性闭环跟踪系统微分方程;进而,给出线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质,即线性跟踪系统的 Lyapunov 函数最大取值不是在系统初始状态而是在系统稳定状态;基于该 Lyapunov 函数性质对控制系统

进行设计研究,通过定理给出控制器设计过程和 Lyapunov 函数取值估计研究;最后给出仿真验证,仿真结果表明所提出的线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质、控制器设计和 Lyapunov 函数取值估计是正确的。

1 控制系统数学模型及系统结构

飞行器纵向平面短周期线性化数学模型:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (1)$$

式(1)中: $\bar{x} = [\alpha \quad \omega_z]^T$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -a_{34} & 1 \\ -a_{24} & -a_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} -a_{35} \\ -a_{25} \end{bmatrix}$$

为实现指令的精确跟踪,引入过载误差积分变量,下面给出经典三回路自动驾驶仪结构原理及建模过程:

$$e = \int_0^t (n_y - n_{yc}) dt \Rightarrow \dot{e} = \frac{a_{34}}{g}v + \frac{a_{35}}{g}v - n_{yc} \quad (2)$$

由上述式(1)、式(2)建立增广状态微分方程:

$$\dot{x} = Ax + Bu + En_{yc} \quad (3)$$

式(3)中: $x = [e \quad \alpha \quad \omega_z]^T, E = [-1 \quad 0 \quad 0]^T, A, B$ 定义参见文献[2]。

引入状态反馈 $u = Kx$, 则线性闭环跟踪系统微分方程:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + En_{yc} \quad (4)$$

以经典三回路为例图 1 给出闭环跟踪系统微分方程形式下的自动驾驶仪结构。其中角速率反馈回路为解决弹体的低阻尼问题,攻角反馈回路为解决弹体的静不稳定和增加快速性问题,过载误差积分控制是为了实现过载指令的精确跟踪。

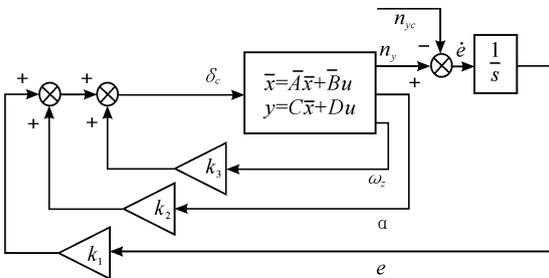


图 1 经典三回路自动驾驶仪结构

2 线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质

针对如式(4)所示的线性闭环跟踪系统,定理 1 给出线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质,并给出证明。

定理 1: 如式(3)所示的线性跟踪问题的 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T Px$, 对时间的一阶导数为非负,二阶导数为非正,即:线性跟踪问题的 Lyapunov 函数最大值不是在系统初始状态而是在系统稳定状态。

为了证明定理 1 的性质,下面不加证明引入如下定义和

定理:

定义 1^[9]: 设 A 为 n 阶复矩阵,若 A 的诸特征值的实部均为正,称为正稳定矩阵;

引理 1^[9]: n 阶矩阵 A 是正稳定的充分必要条件是存在 Hermite 正定矩阵 W 和正定矩阵 P ,使得: $A = W \cdot P$ 。

定理 2^[10]: 设 A, B 为 n 阶实对称正定矩阵,则 AB 的特征值全大于零。

定理 3^[11]: 设 A, B 都是实对称矩阵, A 的特征值全大于 a, B 的特征值全大于 b 。若 $a + b \geq 0$, 则 $A + B$ 是正定矩阵。

下面给出定理 1 的证明:

首先,由 Lyapunov 函数对时间求一阶导数并代入式(4)可得:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = x^T (A_c^T P + PA_c)x + n_{yc} E^T Px + x^T P E n_{yc} \quad (5)$$

这里 $A_c = A + BK$ 。

考虑到一阶线性定常微分方程的解:

$$x(t) = e^{A_c t} x(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} E n_{yc} d\tau \quad (6)$$

对于零初始条件,系统的解:

$$x(t) = n_{yc} [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1 A_c^{-1} E] \quad (7)$$

把式(7)代入式整理得:

$$\dot{V}(x) = n_{yc}^2 E^T \Delta E \quad (8)$$

其中:

$$\Delta = A_c^{-T} \left\{ [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1]^T (A_c^T P + PA_c) [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1] + A_c^T P [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1] + [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1]^T P A_c \right\} A_c^{-1}$$

$\dot{V}(x)$ 的正负性与 Δ 称矩阵的正定性相同。对 Δ 整理得:

$$\Delta = A_c^{-T} \left\{ [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I]^T A_c^T P [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1] + [e^{A_c t} - e^{2A_c t} 1]^T P A_c [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I] \right\} A_c^{-1}$$

由于 $(-A_c)$ 为正稳定矩阵,则由引理 1 可得 Δ 可分解成多个正定矩阵的乘积的和;进而由定理 2 可得 Δ 的特征值为大于等于零,由于 Δ 为对称矩阵,则 Δ 为正定矩阵,进而可得 $\dot{V}(x) \geq 0$ 。

即线性跟踪问题的 Lyapunov 函数对时间的一阶导数不小于零。

其次,取 Lyapunov 函数对时间的二阶导数代入式(4)整理得:

$$\begin{aligned} \ddot{V}(x) &= x^T \{ A_c^T (A_c^T P + PA_c) + (A_c^T P + PA_c) A_c \} x + \\ & x^T (2A_c^T P + PA_c) E n_{yc} + n_{yc} E^T (A_c^T P + 2PA_c) x + 2n_{yc}^2 E^T P E \end{aligned} \quad (9)$$

把式(7)代入上式整理得:

式(X)中:

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta} &= A_c^{-T} [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1]^T [A_c^T (A_c^T P + PA_c) + (A_c^T P + PA_c) A_c] \cdot \\ & [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1 A_c^{-1} + A_c^{-T} [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1]^T (2A_c^T P + PA_c) + \\ & (A_c^T P + 2PA_c) [e^{2A_c t} - e^{A_c t} 1 A_c^{-1} + 2P \end{aligned}$$

$\tilde{V}(x)$ 的正负性与对称矩阵 $\tilde{\Delta}$ 的正定性相同。

$$\tilde{\Delta} = A_c^{-T} \begin{Bmatrix} [e^{2A_c t} - e^{A_c t}]^T (P A_c A_c) [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I] + \\ [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I]^T (A_c^T A_c^T P) [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I] + \\ 2[e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I]^T A_c^T P A_c [e^{2A_c t} - e^{A_c t} + I] \end{Bmatrix} A_c^{-1}$$

由 $(-A_c)$ 的特征值实部为正,结合引理1和定理2、定理3可得 $\lambda(\tilde{\Delta}) \leq 0 \Rightarrow \tilde{V}(x) \leq 0$ 。

因此,定理1证毕!

3 控制系统设计

定理4:如果存在正定对称矩阵 $W \in R^{n \times n}$, $Z \in R^{m \times n}$,及常量 $\mu, \tau, \sigma \in R$,使得如下 LMIs:

$$\begin{cases} AW + WA^T + BZ + B^T Z^T + 2\mu W \leq 0 \\ \begin{bmatrix} 2\mu W & -E \\ -E^T & \sigma r^{-2} \end{bmatrix} \geq 0 \\ AW + WA^T + BZ + B^T Z^T + 2\mu W + \tau W \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

成立,则控制器:

$$K = ZW^{-1} \quad (11)$$

系统 Lyapunov 函数最大值出现在稳定状态,其值为 $L = \frac{\sigma}{\mu}$ 。

证明:设线性跟踪系统以指数为 $-\mu$ 收敛跟踪输入指令,则由 $AW + WA^T + BZ + B^T Z^T + 2\mu W \leq 0$ 。

设存在 τ 使得 $x^T (A_c^T P + P A_c) x \geq -2x^T \mu P x - x^T \tau P x$,整理得:

$$AW + WA^T + BZ + B^T Z^T + 2\mu W + \tau W \geq 0$$

$$\text{由 } 0 \leq \dot{V}(x) \Rightarrow x^T (A_c^T P + P A_c) x + r E^T P x + x^T P E r \geq 0$$

由 $x^T (A_c^T P + P A_c) x \leq -2x^T \mu P x \Rightarrow \dot{V}(x) \leq -2x^T \mu P x + r E^T P x + x^T P E r \leq \sigma$,由 Shur 补引理^[12]得:

$$\begin{bmatrix} 2\mu P & -PE \\ -E^T P & \sigma r^{-2} \end{bmatrix} \geq 0$$

由 $V(x)$ 以幂指数形式跟踪系统,则假设 $\dot{V}(x) = C_0 e^{-\mu t} \leq \sigma \Rightarrow C_0 \approx \sigma$,即:

$$\dot{V}(x) \approx \sigma e^{-\mu t} \Rightarrow V(x) \approx \int_0^\infty \sigma e^{-\mu t} dt = \frac{\sigma}{\mu}$$

4 控制系统仿真验证

某飞行器典型工作点以状态矩阵和控制矩阵的形式给出:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.78 & 0 \\ 0 & -0.06 & 1 \\ 0 & -7.11 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.73 \\ -0.008 \\ 13.33 \end{bmatrix}, \text{取系统希望闭环极}$$

点的负实部为 $\mu = -8$,及 $\tau = 0.0001, \sigma = 1$,根据定理4的3个矩阵不等式,求 $\min \lambda(W)$ 得到的控制器为 $K = [-24.9446 \quad -28.2807 \quad -0.4504]$ 。当输入指令 $n_{yc} = 1$ 时,图2给出法向过载响应特性,图3给出跟踪系统 Lyapunov 函数随时间的变化。

通过仿真可以得出:在动态调节过程中,线性跟踪系统 Lyapunov 函数随时间的增加而增大,当系统状态达到稳定时 Lyapunov 函数取值最大,即定理1成立;所设计的控制系统能够快速实现对指令的精确跟踪;Lyapunov 函数最大取值与 $\sigma/\mu = 0.125$ 很接近。

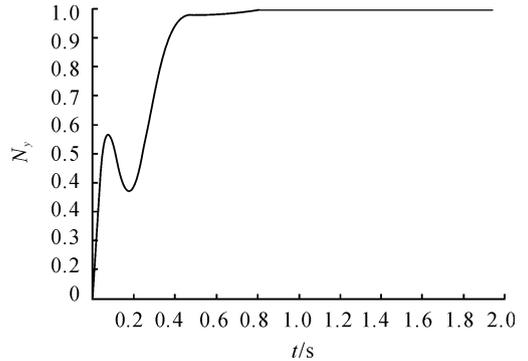


图2 法向过载响应特性

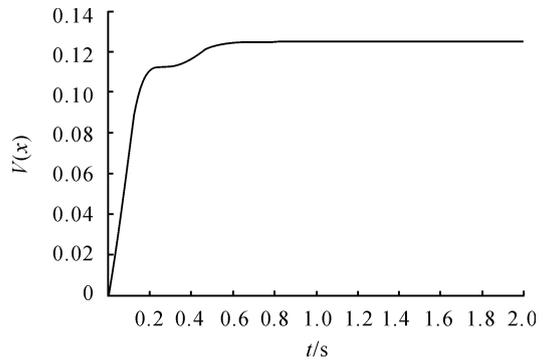


图3 线性跟踪系统 Lyapunov 函数随时间的变化

5 结束语

针对线性闭环跟踪系统,研究了 Lyapunov 函数性质,基于该 Lyapunov 函数性质对控制系统设计和 Lyapunov 函数取值估计研究。最后给出仿真验证,仿真结果表明所提出的线性跟踪系统 Lyapunov 函数性质、控制器设计和 Lyapunov 函数取值估计是正确的。

参考文献:

- [1] Curtis P. Mrazek, D. Brett Ridgely. Missile Longitudinal Autopilots; Connections Between Optimal Control and Classical Topologies [C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 15-18 August 2005-6381.
- [2] 胥彪,周获.受输入饱和约束的导弹直接侧向力/气动力复合控制[J].宇航学报,2012,33(11):1630-1635.