如忽略截面的剪切变形，仅考虑刚体转动，令 $G \to \infty$, 简化为 Kirchhoff 杆的横向振动方程

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} = 0 \tag{25}$$

如刚体转动也同时忽略，令 $J = \rho I = 0$, 简化为欧拉－伯努利梁的三维横向振动方程

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{26}$$

5 结 论

Cosserat-Kirchhoff 弹性杆模型是处理工程中细长杆大变形的有效建模方法．文中导出弹性梁三维运动的精确动力学模型，各种近似梁模型均为精确 Cosserat 模型的特例．文中将截面法线转角对弧坐标的变化率作为弹性杆的弯扭度定义，不同于文献 [8] 定义的中心线切线转角对弧坐标的变化率．两种定义由于剪切变形而有所区别，本文的定义和结果更为合理．

参 考 文 献

1 Love AEH. A treatise on mathematical theory of elasticity. 4th edn. New York: Dover, 1927

2 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学：DNA 力学模型的理论基础. 北京：清华大学 & Springer 出版社， 2006

3 Antman SS. Nonlinear problems of elasticity. New York: Springer, 1995

4 Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. 2nd edn. New York: Van Nostrand, 1937: 410

5 Tucker RW, Wang C. An integrated model for drill-string dynamics. *J Sound and Vibration*, 1999, 224: 123-165

6 Cao DQ, Liu D, Wang CHT. Nonlinear dynamic modeling of MEMS components via the Cosserat rod element approach. *J Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15: 1334-1343

7 刘延柱，薛纭．弹性杆盘绕折叠的力学分析．力学季刊， 2008, 29(3): 343-348

8 Liu Yanzhu. On dynamics of elastic rod based on exact Cosserat model. *Chinese Physics B*, 2009, 18(1): 1-8

（责任编辑：周冬冬）

关于一阶 Lagrange 系统

—— 分析力学札记之十七

梅凤翔 1)

（北京理工大学力学系，北京 100081）

摘要 讨论一阶非奇异和奇异 Lagrange 系统的方程，以及它们与 Birkhoff 方程和广义 Hamilton 方程的关系．

关键词 一阶 Lagrange 系统，Birkhoff 系统，广义 Hamilton 系统

中图分类号： O31 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2011)01-078-03

分析力学大多研究二阶非奇异系统，即由方程可解出所有广义加速度．在自然界与工程中也有许多系统可表示为一阶方程，其个数或为偶数，或为奇数．有的一阶方程组可 Lagrange 化．可 Lagrange 化的一阶方程组称为奇异 Lagrange 系统 [1-3]，确切地说是二阶奇异系统．本文讨论一阶非奇系统和奇异系统．

1 位形空间中一阶运动方程的 Lagrange 力学逆问题

研究位形空间中的一阶方程组

$$F_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0\,,\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 分别为广义坐标和广义速度，t 为时间．如果有

$$\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}\right) \neq 0\,,\quad (k,s=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

则称方程 (1) 为一阶非奇异系统．如果有

$$\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0 \tag{3}$$

则称方程 (1) 为一阶奇异系统．

对方程组 (1), 如果满足条件

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} = -\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k} \\ &\frac{\partial F_k}{\partial q_s} = \frac{\partial F_s}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \end{aligned} \quad (s,k=1,2,\cdots,n)\right\} \tag{4}$$

则可 Lagrange 化，其 Lagrange 函数为 [4]

$$L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = -q_k\int_0^1 F_k(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

此时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv F_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

本文于 2010–05–26 收到．

1) 梅凤翔，男， 1938 年生，教授，博士生导师，从事一般力学和应用数学的教学和科研工作． E-mail: meifx@bit.edu.cn

而 Lagrange 函数可写成形式

$$L = A_s(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_s - B(t,\boldsymbol{q}) \tag{7}$$

由式 (7) 描述的系统称为一阶 Lagrange 系统.

2　一个问题

提出如下问题：能否由式 (7) 确定的一阶方程解出所有广义速度 $\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$?

式 (7) 给出的 Lagrange 方程有形式

$$\left(\frac{\partial A_s}{\partial q_k}+\frac{\partial A_k}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial B}{\partial q_s}+\frac{\partial A_s}{\partial t}=0\ \ (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

令

$$A_{sk}=\left(\frac{\partial A_s}{\partial q_k}-\frac{\partial A_k}{\partial q_s}\right) \tag{9}$$

当

$$\det(\boldsymbol{A})\neq 0 \tag{10}$$

时，才能由式 (8) 解出所有广义速度. 考虑到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的反对称性，有

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=(-1)^n\det(\boldsymbol{A}) \tag{11}$$

当 $n=2m+1$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 时，式 (11) 给出

$$\det(\boldsymbol{A})=0 \tag{12}$$

此时，不能由式 (8) 解出所有广义速度. 于是有：

命题 1　对奇数维一阶方程组 (8), 不能解出所有广义速度.

上述情形可称为一阶奇异 Lagrange 系统，否则称为一阶非奇异 Lagrange 系统.

3　一阶 Lagrange 方程与 Birkhoff 方程

如果一阶 Lagrange 方程 (8) 是偶数维的，可将其表为形式

$$\left.\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial A_\nu}{\partial a^\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\dfrac{\partial B}{\partial a^\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial t}=0\\ (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\end{array}\right\} \tag{13}$$

它们实际上就是 Birkhoff 方程，于是有

命题 2　偶数维一阶 Lagrange 系统必定是 Birkhoff 系统.

如果

$$\det\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial a^\nu}\right)\neq 0 \tag{14}$$

则由式 (13) 可解出所有 $\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 此时系统是非奇异的. 如果

$$\det\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial a^\nu}\right)=0 \tag{15}$$

则由式 (13) 解不出所有 $\dot{a}^\mu$, 此时系统是奇异的.

这样，用广义坐标和广义速度表示的奇数维一阶 Lagrange 系统必定是一阶奇异的，而偶数维的可能是奇异或非奇异的.

4　关于一阶 Lagrange 系统的积分

一阶 Lagrange 系统的积分表为

$$I=I(t,\boldsymbol{q}) \tag{16}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_k}\dot{q}_k=0 \tag{17}$$

为判断式 (16) 是否系统的积分，需由方程解出所有广义速度 $\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$, 将其代入式 (17), 验证其是否成立. 对于一阶奇异 Lagrange 系统，因为不能求出所有 $\dot{q}_k$, 因此判断这样系统的积分就出现了困难.

5　一阶 Lagrange 系统与广义 Hamilton 系统

广义 Hamilton 系统的方程可以是奇数维的或偶数维的，但是其中的变量并不是广义坐标和广义速度，而一般说是非正则变量. 因此，一般说来，广义 Hamilton 系统不是一阶 Lagrange 系统.

6　算例

例 1　Lotka 生化振子的微分方程有形式 [2]

$$\left.\begin{array}{l}F_1(t,q,\dot{q})=\dot{q}_1-\alpha_1-\beta_1\exp q_2=0\\ F_2(t,q,\dot{q})=\dot{q}_2-\alpha_2-\beta_2\exp q_1=0\end{array}\right\} \tag{18}$$

它们不是自伴随的. 将其改写为

$$\left.\begin{array}{l}\bar{F}_1=-\dot{q}_2+\alpha_2+\beta_2\exp q_1=0\\ \bar{F}_2=\dot{q}_1-\alpha_1-\beta_1\exp q_2=0\end{array}\right\} \tag{19}$$

则条件 (4) 满足. 利用式 (5) 可构造出 Lagrange 函数

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}(q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1)+\alpha_1q_2-\alpha_2q_1-\\ &\beta_2\exp q_1+\beta_1\exp q_2\end{aligned} \tag{20}$$

它是一个一阶非奇异 Lagrange 系统. 同时，也是一个 Birkhoff 系统，有

$$\left.\begin{array}{l}R_1=-\dfrac{1}{2}a^2,\quad R_2=\dfrac{1}{2}a^1\\ B=\alpha_1a^2-\alpha_2a^1-\beta_2\exp a^1+\beta_1\exp a^2\end{array}\right\} \tag{21}$$

其中

$$a^1=q_1,\quad a^2=q_2 \tag{22}$$

例 2　3 个一阶方程为

$$\left.\begin{array}{l}2\dot{q}_2-\dot{q}_3-q_2q_3=0\\ -\dot{q}_3-2\dot{q}_1-q_1q_3=0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2-q_1q_2=0\end{array}\right\} \tag{23}$$

它满足条件 (4), 利用式 (5) 可构造出 Lagrange 函数，有

$$\begin{aligned}L=&\dot{q}_1(q_2-\frac{1}{2}q_3)-\dot{q}_2(q_1+\frac{1}{2}q_3)+\\ &\frac{1}{2}\dot{q}_3(q_1+q_2)+q_1q_2q_3\end{aligned} \tag{24}$$

它是一个一阶奇异 Lagrange 系统.

参 考 文 献

1 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993

2 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004

3 梅凤翔, 尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量. 物理学报, 2000, 49(10): 1901-1903

4 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978

(责任编辑: 周冬冬)

关于对称性理论中梅凤翔问题

丁光涛 1)

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 安徽芜湖 241000)

摘要 提出在分析力学中应区分力学量的两种时间变化率, 并结合力学系统不同对称性的特点, 阐明 Noether 等式中出现的 $\ddot{q}$ 不能用运动微分方程表示为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数, 而 Mei 对称性判据方程中出现的 $\ddot{q}$ 应当消去的缘由.

关键词 Noether 对称性, Mei 对称性, 时间变化率, 加速度, 运动微分方程

中图分类号: O316 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2011)01-080-02

在涉及 Noether 理论的研究中, 梅凤翔几次提出一个重要问题 [1-2]: Noether 等式中出现的加速度 $\ddot{q}$ 能否用运动微分方程表示为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数? 这个问题不仅涉及对称性理论, 也涉及分析力学其他一些重要问题. 对这个问题已有回答, 即不能消去加速度. 本文从讨论分析力学中力学量的两种相互联系而又相互区别的时间变化率入手, 结合 Noether 对称性和 Mei 对称性的不同特点, 阐释 Noether 对称性判别式中加速度不能消去, 而 Mci 对称性判别式条件中加速度应当消去的缘由.

1 力学量的两种对时间的变化率

Lagrange 力学中, 力学量 P 是 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数

$$P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{1}$$

一般情形下, P 对时间 t 的变化率表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \ddot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\right) P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{2}$$

这里 $\dot{q}_s = \mathrm{d}q_s/\mathrm{d}t$, $\ddot{q}_s = \mathrm{d}\dot{q}_s/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 q_s/\mathrm{d}t^2$, 由运动学关系确定.

如果对某力学系统, 运动微分方程写成

$$\ddot{q}_s = f_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \quad s = 1, \cdots, n \tag{3}$$

将式 (3) 代入式 (2), 得到 P 的另一个时间变化率

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + f_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\right) P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{4}$$

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 和 $\bar{\mathrm{d}}P/\mathrm{d}t$ 是相互联系又相互区别的力学量 P 对时间 t 的两种变化率, 后者是前者的特殊化, 最后表达式为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的某个函数形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}P = Q(t, q, \dot{q}) \tag{5}$$

是系统真实运动中 P 的变化率, 或者说, 是在状态-时间空间中 [4], 沿系统运动轨迹的变化率; 前者 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 不能表示成式 (5) 那样的函数, 它的表达式 (2) 中包含加速度 $\ddot{q}$. 在分析力学中, 处理的系统运动, 有时是真实运动, 而有时是可能的变更运动, 在变更运动中表达式中 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 对 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 而言常常是 "独立" 变量.

举例说明这两种变化率的不同. 在由运动方程的 Lagrange 形式向 Nielsen 形式变换时, 引入这样的对易关系 [5-6]

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = -\frac{\partial}{\partial q_s} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{6}$$

这里就考虑了 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的无关性. 在从 Hamilton 原理导出运动微分方程时, 处理的是可能的变更运动, 只有真实运动才使 $\delta S = 0$, 才有

$$E_s(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

$$N_s(L) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

当物理量 $I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 是系统的守恒量时, 它对时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial I}{\partial q_s} + \ddot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\right) I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \tag{9}$$

本文于 2010–08–09 收到.

1) E-mail: dgt695@sina.com