它是一个一阶奇异 Lagrange 系统.

参 考 文 献

1 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社， 1993

2 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京：北京理工大学出版社， 2004

3 梅凤翔，尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量. 物理学报， 2000, 49(10): 1901-1903

4 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978

(责任编辑：周冬冬)

关于对称性理论中梅凤翔问题

丁光涛 1)

(安徽师范大学物理与电子信息学院，安徽芜湖 241000)

摘要 提出在分析力学中应区分力学量的两种时间变化率，并结合力学系统不同对称性的特点，阐明 Noether 等式中出现的 $\ddot{q}$ 不能用运动微分方程表示为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，而 Mei 对称性判据方程中出现的 $\ddot{q}$ 应当消去的缘由.

关键词 Noether 对称性， Mei 对称性，时间变化率，加速度，运动微分方程

中图分类号： O316 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2011)01-080-02

在涉及 Noether 理论的研究中，梅凤翔几次提出一个重要问题 [1-2]: Noether 等式中出现的加速度 $\ddot{q}$ 能否用运动微分方程表示为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数？这个问题不仅涉及对称性理论，也涉及分析力学其他一些重要问题. 对这个问题已有回答，即不能消去加速度. 本文从讨论分析力学中力学量的两种相互联系而又相互区别的时间变化率入手，结合 Noether 对称性和 Mei 对称性的不同特点，阐释 Noether 对称性判别式中加速度不能消去，而 Mei 对称性判别式条件中加速度应当消去的缘由.

1 力学量的两种对时间的变化率

Lagrange 力学中，力学量 P 是 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数

$$P=P(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{1}$$

一般情形下， P 对时间 t 的变化率表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\ddot{q}_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\Big)P(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{2}$$

这里 $\dot{q}_s=\mathrm{d}q_s/\mathrm{d}t$, $\ddot{q}_s=\mathrm{d}\dot{q}_s/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2q_s/\mathrm{d}t^2$, 由运动学关系确定.

如果对某力学系统，运动微分方程写成

$$\ddot{q}_s=f_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\,,\quad s=1,\cdots,n \tag{3}$$

将式 (3) 代入式 (2), 得到 P 的另一个时间变化率

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}P=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+f_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\Big)P(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{4}$$

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 和 $\bar{\mathrm{d}}P/\mathrm{d}t$ 是相互联系又相互区别的力学量 P 对时间 t 的两种变化率，后者是前者的特殊化，最后表达式为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的某个函数形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}P=Q(t,q,\dot{q}) \tag{5}$$

是系统真实运动中 P 的变化率，或者说，是在状态-时间空间中 [4], 沿系统运动轨迹的变化率；前者 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 不能表示成式 (5) 那样的函数，它的表达式 (2) 中包含加速度 $\ddot{q}$. 在分析力学中，处理的系统运动，有时是真实运动，而有时是可能的变更运动，在变更运动中表达式中 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 对 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 而言常常是"独立"变量.

举例说明这两种变化率的不同. 在由运动方程的 Lagrange 形式向 Nielsen 形式变换时，引入这样的对易关系 [5-6]

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=-\frac{\partial}{\partial q_s}L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{6}$$

这里就考虑了 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的无关性. 在从 Hamilton 原理导出运动微分方程时，处理的是可能的变更运动，只有真实运动才使 $\delta S=0$, 才有

$$E_s(L)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

$$N_s(L)=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

当物理量 $I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是系统的守恒量时，它对时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial I}{\partial q_s}+\ddot{q}_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\Big)I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \tag{9}$$

本文于 2010–08–09 收到.

1) E-mail: dgt695@sina.com

实际上应当理解成

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}I}{\mathrm{d}t}=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+f_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\Big)I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\equiv 0 \tag{10}$$

因为守恒量在系统真实运动中才是不变的.

在 Newton 力学中，处理的总是系统的真实运动，物理量对时间的变化率只考虑一种，没有混淆的可能，在涉及物理量的变化率时，不需要区分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$, 统一写成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 或在物理量上加圆点 "•" 表示；然而，在严格的分析力学推理过程中，应当区别两种时间变化率的意义，正确选择一种变化率，否则可能会出错.

2 关于 $X^{(1)}(L)$ 中加速度能否用运动微分方程消去问题

2.1 在 Noether 等式中 $\ddot{q}$ 不能消去

Noether 对称性是指 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的一种不变性 [2-3]. 这个定义很重要，说明对称性的判别条件 ——Noether 等式

$$\xi_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0 \tag{11}$$

来自于变分运算，是与变更运动相关联的，不是沿着系统真实运动路径来计算的，因此式 (11) 中 $\ddot{q}_s$ 不能代之以真实运动中的 $f_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 变换的无限小生成元 ξ_0,ξ_s, 以及规范函数 G_N 都是 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，式 (11) 中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{12}$$

当式 (11) 成立时，系统存在 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\mathrm{const.} \tag{13}$$

Noether 对称性另一判据是 Killing 方程有解

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\Big(L-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k\Big)\Big(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_s}\dot{q}_s\Big)+\\&\qquad\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big(\frac{\partial\xi_s}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big)=-\frac{\partial G_N}{\partial t}-\dot{q}_s\frac{\partial G_N}{\partial q_s}\\&\Big(L-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\Big)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}=-\frac{\partial G}{\partial\dot{q}_k}\\&\qquad(k,s=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这 $n+1$ 个方程是从 1 个 Noether 等式派生得到的，其出发点正是式 (11) 中出现的 n 个加速度 $\ddot{q}_k$ 是彼此独立的任意取值的. 从 Killing 方程解出 ξ_0,ξ_s 和 G_N, 代入式 (11) 必然成立. 如果在式 (11) 中以 $f_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 取代 $\ddot{q}_s$, 那么式 (11) 左边将构成一个 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，分解成式 (14)$n+1$ 个方程就不可能了.

2.2 在 Mei 对称性结构方程中 $\ddot{q}$ 应当消去

Mei 对称性，或者形式不变性是指微分方程中的动力学函数，如 Lagrange 函数等，在经历无限小变换后仍然能满足原来方程的一种不变性 [2-3]. 这个定义也十分重要，因为清晰地说明这种对称性是"微分方程中"的一种"不变性"，所以涉及的物理量时间变化率是沿着系统真实运动路径的变化率. 对称性的判据方程为

$$E_s\{X^{(1)}(L)\}=0 \tag{15}$$

如果存在规范函数 $G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 满足结构方程

$$\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F=0 \tag{16}$$

$$\tilde{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\Big(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\Big)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{17}$$

则这种对称性导致守恒量

$$I_F=\tilde{X}^{(1)}(L)\xi_0+\frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_F=\mathrm{const.} \tag{18}$$

式 (16)~(18) 中物理量的时间变化率都是 $\dfrac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}P$, 即其中 $\ddot{q}_s$ 已用 f_s 代替了. 式 (15) 中 $X^{(1)}(L)$ 实际上是 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数而不是 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，宜用 $\tilde{X}^{(1)}(L)$ 取代 [3], 或者在算子 E_s 作用到相应的加速度项 $\ddot{q}_k$ 时，把 $\ddot{q}_k$ 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数 [1,3].

3 小　结

本文指出在分析力学中，力学量有两种相互联系又相互区别的时间变化率，并基于这种分析和不同对称性的定义，回答了梅凤翔在 Noether 对称性研究中郑重提出的问题. 在 Noether 等式中加速度不能用运动微分方程消去，而在 Mei 对称性和 Lie 对称性问题中加速度则应由运动微分方程替换. 我们认为梅凤翔问题很重要，它的意义实际上超越了对称性理论，在研究分析力学其他相关问题时，也应对两种时间变化率有所区分，正确选择.

参　考　文　献

1 梅凤翔. 关于对称性的注释，力学与实践， 2004, 26(1): 70-71
2 梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展，力学进展， 2009, 39(1): 37-43
3 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量，北京：北京理工大学出版社， 2004
4 Rosenberg RM. Analytical Dynamics of Discrete Systems. New York: Pleum Press, 1977
5 梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学，北京：北京理工大学出版社， 1991
6 丁光涛. 高阶 Nielsen 方程. 科学通报， 1987, 32(23): 908-911

(责任编辑：刘俊丽)