

计及轴向和剪切变形时压杆的 Euler 公式¹⁾

薛 纭^{*,2)} 李燕芬[†]

^{*}(上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418)

[†](上海第二工业大学城市建设与环境工程学院, 上海 201209)

摘要 依据平面截面假定, 在计及拉 / 压和剪切变形的情况下研究压杆的稳定性. 利用线性化扰动方程, 导出了压杆的挠曲线方程; 根据各种端部约束的边界条件及其积分常数存在非零解的条件, 得到了 Euler 临界载荷计算公式. 结果表明, 拉 / 压和剪切变形对稳定性的影响取决于它们的柔度差.

关键词 压杆稳定性, Euler 公式, 弹性细杆精确模型, 平面截面假定

中图分类号: O34 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2011)01-082-03

细长弹性杆平衡的稳定性是衡量压杆承载能力的重要指标. 近期, 因弹性细杆被作为 DNA 的力学模型而再次受到关注^[1], 在基本概念, 理论推导和平衡形式以及稳定性等方面又有新的认识^[2-5]. 根据 Kirchhoff 方程, 用统一的方法导出在不同支座约束下细长压杆稳定的临界载荷^[5], 即 Euler 公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad \text{或} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1)$$

式(1)是在平面截面假定, 忽略了拉 / 压和截面剪切变形的前提下导出的, 对于常用的金属材料已有足够的精度. 本文在平面截面假定下, 导出计及杆的拉 / 压和截面的剪切变形时细长压杆的临界载荷, 并与式(1)进行比较, 分析拉 / 压和剪切变形对稳定性的影响.

1 弹性细杆精确模型的平衡微分方程

设 $O-XY$ 为惯性参照系, 考察压杆在坐标平面内的平面弯曲. 在横截面的形心 P 建立 $P-XY$ 坐标系, 此坐标系绕过 P 点且与 $P-XY$ 平面垂直的轴转过 β 角为截面的主轴坐标系 $P-xy$, 单位基矢量为 e_i , ($i = 1, 2$), e_2 为截面的外法矢, 沿 y 轴正向, 如图 1 所示. 存在拉 / 压和剪切变形时有如下的变形几何关系^[5]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, 在 $O-XY$ 中的坐标阵为 $\mathbf{r} = (X \ Y)^T$, “ $'$ ” 撇号表示对原始弧坐标 s 的导数; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为截面的平移应变矢量, 即截面形心的应变矢量; 弹性杆轴线的弧坐标在变形后为 \bar{s} ; 存在如下关系

$$\bar{s} = s + \int_0^s \boldsymbol{\varepsilon}_2 ds \quad (3)$$

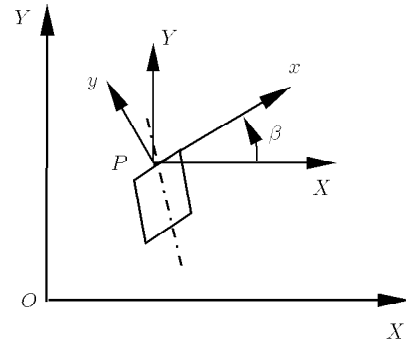


图 1 截面的位置和姿态

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i$. 设截面的主矢 \mathbf{F} 和平移应变矢 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 主矩 \mathbf{M} 和弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 满足线弹性本构关系, 在主轴坐标系下表为

$$\mathbf{F}_i = K_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{M} = B \boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

其中, K_1 和 K_2 分别为截面的抗剪刚度和抗拉 / 压刚度, B 为截面的抗弯刚度, $\boldsymbol{\omega} = \beta'$ 为截面关于 s 的弯扭度^[6]. 式(4)中假定弹性杆是直的且无原始变形. 弹性细杆存在拉 / 压和剪切变形时的平衡微分方程为^[1,6]

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + (\mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \quad (5)$$

式中, \mathbf{F}_0 为作用于杆端的压力, 在 $O-XY$ 中的坐标阵为 $\mathbf{F}_0 = (F_{0X} \ -F_{0Y})^T$, 这里 F_{0X} 为横向力, F_{0Y} 为轴向压力. 式(5)和式(2)给出如下投影式

$$\beta'' + f(F_{0Y}\beta - F_{0X}) = 0 \quad (6)$$

$$X' = -Bf\beta + \frac{F_{0X}}{K_1}, \quad Y' = 1 - \frac{F_{0Y}}{K_2} \quad (7)$$

推导中注意到 F_{0X} 与 β, β' 为同阶微量, 并略去了二阶以上微量, 得

$$f = \frac{1}{B} \left[1 + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) F_{0Y} \right] \quad (8)$$

设 $fF_{0Y} > 0$, 并令 $fF_{0Y} = k^2$, 式(6)的通解为

$$\beta = C_1 \sin ks + C_2 \cos ks + \frac{F_{0X}}{F_{0Y}} \quad (9)$$

2010-02-24 收到第 1 稿, 2010-04-30 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10972143)和上海应用技术学院科学技术发展基金(KJ2008-10)资助项目.

2) 薛纭, 博士, 教授, 主要研究方向为弹性细杆的非线性动力学、分析力学等. E-mail: xueylyf@citiz.net

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{fB}{k}(C_1 \cos ks - C_2 \sin ks) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{F_{0Y}}\right)F_{0X}s + C_3 \\
 Y &= \left(1 - \frac{F_{0Y}}{K_3}\right)s + C_4
 \end{aligned} \quad (10)$$

由边界条件 $Y|_{s=0} = 0$ 知 $C_4 = 0$.

2 不同端部约束下的 Euler 临界载荷

显然, $\beta = 0$ 为方程 (9) 的特解, 此时 $F_{0X} = 0$, 对应于杆的直线平衡状态, 式 (9) 和式 (10) 即为此特解的线性化扰动方程. 以下分别讨论各种边界条件下的临界载荷.

2.1 两端铰支

铰支端无弯矩

$$\beta'|_{s=0} = 0, C_1 = 0; \beta'|_{s=L} = 0, C_2 k \sin kL = 0$$

铰支端无挠度

$$X|_{s=0} = 0, -\frac{fB}{k}C_1 + C_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 X|_{s=L} = 0, &\quad \frac{fB}{k}(C_1 \cos kL - C_2 \sin kL) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{F_{0Y}}\right)F_{0X}L + C_3 = 0
 \end{aligned}$$

导出 $\sin kL = 0$, 其最小非零解为 $kL = \pi$. 由此, 两端铰支时的临界载荷由下式给出

$$F_{0Y} + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)F_{0Y}^2 = \frac{\pi^2 B}{L^2} \quad (11)$$

由铰支座的力矩平衡方程给出 $F_{0X} = 0$. 截面的姿态和挠曲线方程为

$$\beta = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{L}s\right), \quad X = -\frac{fB}{k}C_2 \sin\frac{\pi}{L}s \quad (12)$$

2.2 两端固定

固定端截面转角为零

$$\beta|_{s=0} = 0, \quad C_2 + \frac{F_{0X}}{F_{0Y}} = 0$$

$$\beta|_{s=L} = 0, \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + \frac{F_{0X}}{F_{0Y}} = 0$$

固定端挠度为零

$$X|_{s=0} = 0, \quad \frac{fB}{k}C_1 + C_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 X|_{s=L} = 0, &\quad \frac{fB}{k}(C_1 \cos kL - C_2 \sin kL) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{F_{0Y}}\right)F_{0X}L + C_3 = 0
 \end{aligned}$$

因 $F_{0X} = 0$, 由上面 4 个式子得出

$$\sin kL = 0, \quad \cos kL = 1 \quad (13)$$

式 (13) 给出最小非零解为 $kL = 2\pi$. 于是, 两端固定时稳定的临界载荷满足

$$F_{0Y} + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)F_{0Y}^2 = \frac{4\pi^2 B}{L^2} \quad (14)$$

2.3 一端铰支一端固定

固定端转角为零

$$\beta|_{s=0} = 0, \quad C_2 + \frac{F_{0X}}{F_{0Y}} = 0$$

固定端挠度为零

$$X|_{s=0} = 0, \quad \frac{fB}{k}C_1 + C_3 = 0$$

铰支端弯矩为零

$$\beta'|_{s=L} = 0, \quad C_1 k \cos kL - C_2 k \sin kL = 0$$

铰支端挠度为零

$$\begin{aligned}
 X|_{s=L} = 0, &\quad \frac{fB}{k}(C_1 \cos kL - C_2 \sin kL) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{F_{0Y}}\right)F_{0X}L + C_3 = 0
 \end{aligned}$$

上述 4 个方程关于 C_1, C_2, C_3, F_{0X} 存在非零解的条件是其系数矩阵的行列式为零, 导出

$$\tan kL = \eta kL \quad (15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 k &= \sqrt{\frac{F_{0Y}}{B} \left[1 + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)F_{0Y}\right]} \\
 \eta &= \frac{1 - \frac{F_{0Y}}{K_2}}{1 + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)F_{0Y}}
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在给定弹性杆的几何和物理参数的情况下, 可以通过数值方法从式 (15) 求出一端铰支一端固定时的临界载荷. 从整体力矩平衡条件

$$B\beta'|_{s=0} + F_{0X}Y|_{s=L} = 0$$

$$BC_1 k + F_h \left[\left(1 - \frac{F_{0Y}}{K_2}\right)L \right] = 0$$

可求出作用于杆端的横向约束力.

2.4 一端固定一端自由

固定端转角为零: $\beta|_{s=0} = 0, C_2 + \frac{F_{0X}}{F_{0Y}} = 0$

固定端挠度为零: $X|_{s=0} = 0, \frac{fB}{k}C_1 + C_3 = 0$

自由端弯矩为零: $\beta'|_{s=L} = 0, C_1 k \cos kL = 0$

自由端横向载荷为零: $F_X|_{s=L} = 0, F_{0X} = 0$

上述方程关于 C_1, C_2, C_3 存在非零解条件是 $\cos kL = 0$, 其最小非零解为 $kL = \frac{\pi}{2}$, 即

$$F_{0Y} + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)F_{0Y}^2 = \frac{\pi^2 B}{4L^2} \quad (17)$$

式(11), 式(14)和式(17)可统一写成

$$F_{0Y} + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) F_{0Y}^2 = \frac{\pi^2 B}{(\mu L)^2} \quad (18)$$

其中 μ 为与杆端约束类型有关的因数, 对于两端铰支、两端固定和一端固定一端自由, 依次取值为 1, 1/2 和 2. 若将一端铰支一端固定时的临界力表示成式(18)形式, 则 μ 与梁的刚度有关. 式(18)可以用临界应力 σ_{cr} 表达

$$\sigma_{cr} + \left(\frac{1}{\nu G} - \frac{1}{E} \right) \sigma_{cr}^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (19)$$

其中, G, E 分别为材料的剪切和拉/压弹性模量, ν 为与截面的形状有关的剪切系数. 只有当 $E \gg G$, 且弹性极限较高时, 式(19)给出的临界应力才明显小于式(1). 对式(18)或式(19)作如下讨论:

(1) 当刚度 $K_1 \rightarrow \infty, K_2 \rightarrow \infty$ 时, 式(18)蜕化为 Euler 载荷式(1). 所以式(1)是当 $(1/K_1 - 1/K_2)$ 为小量时的近似.

(2) 式(18)是关于 F_{0Y} 的二次方程, 存在正负两个根, 正根对应着压力临界值, 而负根则对应着拉力的临界值, 似有悖常理. 事实上, 平面截面假定也是对弹性杆的一个简化模型, 按此模型, 过大的拉力也不能使“杆”保持稳定的直线平衡状态. 应根据实际情况决定取舍.

(3) 对于 Q235 钢, $G = 80 \text{ GPa}, E = 200 \text{ GPa}$, 圆截面杆的剪切系数 $\nu = 15/17$, 从而 $[1/(\nu G) - 1/E] =$

$9.58 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$, 可见对此材料, 含此因子的项是完全可以忽略的.

3 结 语

经典的 Euler 公式仅适合可忽略弹性杆的拉/压和截面的剪切变形的情形, 即 $(1/K_1 - 1/K_2)$ 为小量的情形, 常用的金属材料属于这一情形; 拉/压和剪切变形对稳定域的影响取决于柔度差 $(1/K_1 - 1/K_2)$. 临界载荷表达式(18)是关于轴向载荷 F_{0Y} 的二次函数, 应根据弹性杆的实际情况决定根的取舍.

参 考 文 献

- 1 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学——DNA 力学模型的理论基础. 北京: 清华大学出版社 & Springer, 2006
- 2 刘延柱. 压杆失稳与 Liapunov 稳定性. 力学与实践, 2002, 24(4): 56-59
- 3 冯贤柱. 细长压杆临界压力欧拉公式的统一推导. 力学与实践, 2003, 25(4): 65-67
- 4 薛纭, 陈立群. 再论压杆失稳与 Lyapunov 稳定性. 力学与实践, 2004, 26(5): 71-72
- 5 薛纭, 贺向阳. Kirchhoff 方程与压杆的临界载荷. 力学与实践, 2009, 31(1): 83-85
- 6 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 超细长弹性杆精确模型的运动学问题. 力学季刊, 2009, 30(1): 116-120

(责任编辑: 周冬冬)

扭转振动实验仪与单自由度系统振动实验

李明成¹⁾ 陈建平 陶秋帆

(南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

摘要 介绍了扭转振动实验仪的构造、原理和特点, 以及据此开设的单自由度系统振动实验. 该仪器的研制为理论力学课程振动实验提供了必要条件. 十多年的教学实践表明, 单自由度系统振动实验有助于加深学生对单自由度系统振动概念的理解, 培养学生的实践能力, 教学效果明显.

关键词 理论力学, 单自由度系统振动, 仪器研制, 振动实验

中图分类号: O32, TH113.1 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2011)01-084-03

机械振动是日常生活和工程实际中的重要力学现象. 单自由度系统的振动反映了振动的一些最基本、最重要的特性, 是研究复杂振动问题的基础, 同时工程上许多振动系统

都可以简化为单自由度振动系统, 因此研究单自由度系统的振动特性具有重要的意义.

为了使学生更好地理解单自由度系统振动的概念和特性, 加强学生的实践能力, 作者研制了扭转振动实验仪, 并在理论力学课程中开设了单自由度系统振动实验, 收到了很好的教学效果.

1 扭转振动实验仪的构造和原理

图 1 为扭转振动实验仪实物图, 与一般的单自由度振动实验仪器不同, 该仪器的主体部分是一个扭转振动系统, 应用该仪器可以测定系统的固有频率、阻尼系数、强迫振动的响应幅值和相位差, 从而绘制系统的幅频特性和相频特性曲线.

2010-03-16 收到第 1 稿, 2010-04-20 收到修改稿.

1) 李明成, 副教授, 主要研究方向为振动理论. E-mail: limc@nuaa.edu.cn