建筑结构框架梁的非线性规划解

陈 波 1)
(兰州交通大学土木工程学院，兰州 730070)

摘要　针对钢筋混凝土框架梁，将非线性优化设计问题转化为几何规划问题，并导出了钢筋混凝土框架梁截面优化设计的计算公式. 算例结果分析表明，方法具有较好的实用价值.

关键词　钢筋混凝土，非线性，几何规划，优化设计，框架梁

中图分类号：TU328　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-0879(2011)04-051-04

SOLUTION OF NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEM FOR FRAME BEAM OF BUILDING STRUCTURES

CHEN Bo1)
(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract　The problem of the nonlinear optimal design is reduced into a geometrical programming problem for the reinforced concrete frame beam, and the related formulas for the cross-section optimization design of reinforced concrete frame beams are derived. The numerical example shows that it is practical.

Key words　reinforced concrete, nonlinear, geometrical programming, optimization design, frame beam

钢筋混凝土框架梁是建筑结构的基本构件，其截面设计首先是根据变形要求的高跨比限值假定截面高度，根据构造要求确定截面宽度，然后再根据正截面的抗弯承载力和斜截面的抗剪承载力配置纵筋和箍筋. 可见，整个设计过程并没有考虑梁的造价问题，设计结果常常很不经济. 因此，许多学者提出了各种各样的以造价为目标函数的优化设计方法[1-3]. 归纳起来，大多数方法的优化结果并没有直接给出梁截面高度和截面宽度的计算公式，而是以耗时的迭代过程来确定优化设计变量. 因此，找到一种简单的优化设计方法，显得十分必要.

钢筋混凝土框架梁的优化设计是一个多变量多约束的非线性规划问题. 本文以造价最低为优化模型，去掉消极约束，将非线性的优化问题转化为具有不同设防水平的几何规划问题. 通过几何规划解，给出了框架梁截面高度和截面宽度的优化设计计算公式. 利用本文方法，通过若干次试算即可得到优化设计变量的最优解. 需要指出的是本文仅讨论均布载荷作用的一般梁优化问题，其他情况方法相同，这里不再赘述. 文末给出的实际算例计算结果表明，本文方法具有一定的实用价值.

1　优化设计目标函数

在设计钢筋混凝土框架梁截面时，跨度和设计荷载均为已知，需要确定的是截面尺寸 $b \times h$，以及纵筋和箍筋用量. 因此，优化设计变量选为截面有效高度 h_0，截面宽度 b，纵向受拉钢筋面积 A_s 以及单位长度箍筋面积 $\overline{A_\mathrm{sv}} = A_\mathrm{sv}/s$，$s$ 为箍筋间距. 当目标函数选为梁单位长度的造价时，费用主要由混凝土费用、纵筋和箍筋费用以及模板费用组成. 由于模板为非一次性用材，可不考虑其对造价的影响，则目标函数 C 为

$$C = C_\mathrm{c} b(h_0+a_0)+C_\mathrm{s} A_\mathrm{s}+2C_\mathrm{sv}\overline{A_\mathrm{sv}}(b+h+\delta-4a_0) \quad (1)$$

式中，C_c 为单位体积混凝土的造价 (CNY/m^3)；C_s 为单位体积纵向受力钢筋的造价 (CNY/m^3)；C_sv 为

2011–01–25 收到第 1 稿，2011–04–18 收到修改稿.
1) E-mail: cbcb169@yahoo.com.cn

单位体积箍筋的造价 (CNY/m^3); δ 为箍筋弯钩长度; a_0 为混凝土保护层厚度.

由构造要求, 取 $h_0+a_0\approx h_0$, $b+h+\delta-4a_0\approx 1.4h_0$, 则式 (1) 可简化为

$$C=C_{\rm c}bh_0+C_{\rm s}A_{\rm s}+2.8C_{\rm sv}\overline{A_{\rm sv}}h_0 \tag{2}$$

钢筋混凝土梁应满足正截面弯矩 M 的抗弯承载力和斜截面剪力 V 的抗剪承载力要求, 由此可得

$$A_{\rm s}=\frac{\alpha_1 f_{\rm c}bh_0}{f_{\rm y}}\Big[1-\sqrt{1-\frac{2M}{\alpha_1 f_{\rm c}bh_0^2}}\Big] \tag{3}$$

$$\overline{A_{\rm sv}}=\frac{V-0.7f_{\rm t}bh_0}{1.25f_{\rm yv}h_0} \tag{4}$$

式中, α_1 为等效系数; $f_{\rm t}, f_{\rm c}$ 分别为混凝土抗拉和抗压强度设计值; $f_{\rm y}, f_{\rm yv}$ 分别为纵筋和箍筋的抗拉强度设计值. 将式 (3) 和式 (4) 代入式 (2) 中, 并去掉正截面抗弯承载力计算中的消极约束 [4], 即 $\rho>\rho_{\min}$ 以及 $\xi<\xi_b$ 后, 原问题可转化为标准的几何规划问题 [5].

2 几何规划的最优解

去掉消极约束的几何规划问题有两种情况:

(1) 当 $V\geq 1.0f_{\rm t}bh_0$ 时, 求 b 和 h_0, 使得

$$C=mbh_0-nx\to\min \tag{5}$$

约束条件为

$$\left.\begin{aligned}&b^{-2}h_0^{-2}x^{-2}+kb^{-1}h_0^{-2}\leq 1\\&fb^{-1}h_0^{-1}\leq 1\\&rb^{-1}h_0\leq 1\\&b,h_0,x\geq 0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中, $f=4V/(\beta_{\rm c}f_{\rm c})$, $r^{-1}=3.0-\lambda$, $n=C_{\rm s}f_{\rm c}/(C_{\rm c}f_{\rm y})$, $k=2M/f_{\rm c}$, $m=1+C_{\rm s}f_{\rm c}/(C_{\rm c}f_{\rm y})+1.96C_{\rm sv}f_{\rm t}/(C_{\rm c}f_{\rm yv})$, $x=\sqrt{b^2h_0^2-kb}$, $\beta_{\rm c}$ 为混凝土强度影响系数, λ 为设防变量.

可见, 上述几何规划问题有 3 个变量 b, h_0 和 x, 存在两个困难度, 其对偶问题可写成

$$\begin{aligned}d(\phi)=\sigma\{&(m/\phi_{01})^{\phi_{01}}(n/\phi_{02})^{\phi_{02}}[(\phi_{11}+\phi_{12})/\phi_{11}]^{\phi_{11}}\cdot\\&[k(\phi_{11}+\phi_{12})/\phi_{12}]^{\phi_{12}}f^{\phi_{12}}r^{\phi_{31}}\}^{\sigma}\end{aligned}$$

约束为

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{01}-\phi_{02}=\sigma\\&\phi_{01}-2\phi_{11}-\phi_{12}-\phi_{21}-\phi_{31}=0\\&\phi_{01}-2\phi_{11}-2\phi_{12}-\phi_{21}+\phi_{31}=0\\&-\phi_{02}+2\phi_{11}=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 ϕ_{ij} 为对偶变量, 应满足

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{11}+\phi_{12}>0\\&\phi_{21}>0\\&\phi_{31}>0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

因为原问题大于零, 所以取 $\sigma=+1$, 解方程组 (7), 得

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{01}=1+\phi_{11}\\&\phi_{02}=2\phi_{11}\\&\phi_{12}=2\phi_{31}\\&\phi_{21}=1-3\phi_{31}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

设 $g=m/n$, 将对偶函数两边取对数, 分别对 ϕ_{11}, ϕ_{31} 求偏导后, 并令偏导数为零, 可得

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{11}=\frac{1+g\sqrt{f^{3/2}/(f^{3/2}-kr^{1/2})}}{2[g^2f^{3/2}/(f^{3/2}-kr^{1/2})-1]}\\&\phi_{31}=\frac{kr^{1/2}}{2(f^{3/2}kr^{1/2})}\phi_{11}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

当能满足 $0<\phi_{31}<1/3$ 时, 原问题才有最优解. 最优解时的 C 值设为 C_0, 则

$$C_0=d(\phi_{01},\phi_{02},\phi_{11},\phi_{12},\phi_{21},\phi_{31}) \tag{11}$$

原变量 b, h_0 和对偶变量的关系为

$$\left.\begin{aligned}&mbh_0=\phi_{01}C_0\\&rb^{-1}h_0=1\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

解上述方程组, 可得具有设防水平 λ 的最优解为

$$\left.\begin{aligned}&b=\sqrt{r\phi_{01}C_0/m}\\&h_0=\sqrt{\phi_{01}C_0/(mr)}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

通过数值分析表明, 式 (10) 只适用于特殊情况, 即剪力相对于弯矩较大时才有解 (13), 一般情况下, 去掉消极约束 $fb^{-1}h_0^{-1}\leq 1$, 问题变成求 b 和 h_0, 使得

$$C=mbh_0-nx\to\min \tag{14}$$

约束为

$$\left.\begin{aligned} & b^{-2}h_0^{-2}x^{-2}+kb^{-1}h_0^{-2}\le 1 \\ & rb^{-1}h_0\le 1 \\ & b,h_0,x\ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式 (15) 的规划解为

$$\phi_{11}=\frac{1-2g^2/3+2g\sqrt{g^2-3/4}/3}{2(g^2-1)} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} & \phi_{01}=1+2\phi_{11}\,,\quad \phi_{02}=2\phi_{11} \\ & \phi_{12}=2/3\,,\quad \phi_{21}=1/3 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

极小化时的 C 值为 C_0, 因为

$$d(\phi)=\sigma\{(m/\phi_{01})^{\phi_{01}}(n/\phi_{02})^{-\phi_{02}}[(\phi_{11}+\phi_{12})/\phi_{11}]^{\phi_{11}}\cdot [k(\phi_{11}+\phi_{12})/\phi_{12}]^{\phi_{12}}r^{\phi_{12}}\}^{\sigma}$$

则有

$$C_0=d(\phi_{01},\phi_{02},\phi_{11},\phi_{12},\phi_{21}) \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} & b=\sqrt{r\phi_{01}C_0/m} \\ & h_0=\sqrt{\phi_{01}C_0/(mr)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

式 (19) 与式 (13) 形式相同，但 ϕ_{01} 和 C_0 需分别按式 (17), 式 (18) 和式 (9), 式 (11) 计算.

由于 b/h_0 是在某范围内变化的未知量，使得优化问题含有部分模糊约束性质，通过转换 b/h_0 为 λ, 并给 λ 赋予有限个不同的离散值 ($\lambda\in[0,1]$), 从而消除了模糊性质，使 λ 具有了工程上的设防水平概念．若依次取 λ 为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_s,\lambda_i\in[0,1]$, 可得 s 个具有不同设防水平的优化设计方案，从中可选出最优解 b^* 和 h_0^*, 亦即 b^* 和 h^*.

(2) 当 $V\le 1.0f_tbh_0$ 时，求 b 和 h_0, 使得

$$C=m'bh_0-n'x\to\min \tag{20}$$

约束条件为

$$\left.\begin{aligned} & b^{-2}h_0^{-2}x^{-2}+kb^{-1}h_0^{-2}\le 1 \\ & rb^{-1}h_0\le 1 \\ & b,h_0,x\ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中

$$n'=C_\mathrm{s}f_\mathrm{c}/(C_\mathrm{c}f_\mathrm{y})$$

$$m'=1+C_\mathrm{s}f_\mathrm{c}/(C_\mathrm{c}f_\mathrm{y})+0.488C_\mathrm{sv}f_\mathrm{t}/(C_\mathrm{c}f_\mathrm{yv})$$

上述几何规划解为

$$\left.\begin{aligned} & b=\sqrt{r\phi_{01}C_0/m'} \\ & h_0=\sqrt{\phi_{01}C_0/(m'r)} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中，ϕ_{11},ϕ_{01},C_0 分别按式 (16)、式 (17) 和式 (18) 计算，只需将式中 m 和 n 用 m' 和 n' 代换即可.

3 算　例

某一净跨为 3.76 m 的钢筋混凝土矩形截面简支梁，原设计截面为 200 mm× 500 mm, 主筋为 $2\underline{\phi}25+2\underline{\phi}18$, 箍筋为双肢 $\phi8@130$, 现求造价为最小的优化设计．该梁承受的均布载荷设计值为 93 kN/m(包括自重), 混凝土强度等级为 $C20(f_\mathrm{t}=1.1\,\mathrm{N/mm^2}$, $f_\mathrm{c}=9.6\,\mathrm{N/mm^2}$ 混凝土的单价设为 $330\,\mathrm{CNY/m^3}$; 箍筋采用 I 级钢筋 $f_\mathrm{yv}=210\,\mathrm{N/mm^2}$, 单价取为 $33\,500\,\mathrm{CNY/m^3}$; 纵向受力钢筋采用 II 级钢筋 $f_\mathrm{y}=300\,\mathrm{N/mm^2}$, 单价取为 $33\,000\,\mathrm{CNY/m^3}$.

求得弯矩 $M=164.35\,\mathrm{kN\cdot m}$, 剪力 $V=174.8\,\mathrm{kN}$, 属于 $V\ge 1.0f_tbh_0$ 情况．取 $\lambda=0^+$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 可得一组解 b 和 h_0, 如表 1 所示．本组解考虑了目标函数所具有的模糊性质，并与模糊约束条件取一致的设防水平，分析表明可不必如此.

表 1　b 和 h_0 的解值

λ	0^+	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
b/mm	199.9	210.2	227.0	235.4	251.6	270.6
h_0/mm	599.8	588.4	577.1	565.6	533.6	541.2

最优解 $b^*=199.9\,\mathrm{mm}$, $h_0^*=599.8\,\mathrm{mm}$, 取整后 $b=200\,\mathrm{mm}$, $h=600\,\mathrm{mm}$, 计算纵向受拉钢筋 $A_\mathrm{s}=1\,001.84\,\mathrm{mm^2}$, 选用 $2\underline{\phi}16+2\underline{\phi}20$ ($A_\mathrm{s}=1\,030\,\mathrm{mm^2}$), 计算箍筋用量 $A_\mathrm{sv}/s=0.48$, 选用双肢 $\phi6@110(A_\mathrm{sv}/s=0.518>0.48)$. 利用本文优化设计方法的最优设计比原设计降低造价约为 15.3%.

4 结　论

本文根据优化设计理论, 将具有非线性性质的优化问题转化成为几何规划问题．通过几何规划解，导出了钢筋混凝土框架梁截面高度 h 和截面宽度 b 的优化设计计算公式．大量的实际算例计算结果分析表明：

(1) 梁的截面尺寸优化主要取决于设计弯矩和材料的造价；

(2) 设计剪力对截面尺寸的选取影响较小，只有当设计剪力与设计弯矩相比较大，即按式 (10) 计算

出的 ϕ_{31} 能满足 $0 < \phi_{31} < 1/3$ 时，剪力的影响才不可忽略.

本文建立的优化设计方法所得出的计算公式概念简单，便于计算，对实际设计有一定的参考价值.

参 考 文 献

1 贺普生，孙焕纯. 钢筋混凝土梁的 (0,1) 规划优化设计. 计算结构力学及其应用， 1993, 10(4): 464-472 (He Pusheng, Sun Huanchun. Zero-one programming for the optimum design. *Computational Structural Mechanics And Applications*, 1993, 10(4): 464-472 (in Chinese))

2 俞铭华, 李庆贞. 钢筋混凝土连续梁离散变量优化设计. 华东船舶工业学院学报， 2000, 14(5): 5-9(Yu Minghua, Li Qingzhen. Discrete variable optimum design of reinforced concrete continuous beams. *Journal of East China Shipbuilding Institute*, 2000, 14(5): 5-9 (in Chinese))

3 申建红，刘瑛，宗力. 钢筋混凝土框架梁截面的优化确定. 青岛建筑工程学院学报， 2003, 24(3): 9-12 (Shen Jianhong, Liu Ying, Zong Li. Optimization design of cross section of RC frame beam. *Journal of Qingdao Institute of Architecture and Engineering*, 2003, 24(3): 9-12(in Chinese))

4 霍达, 王锡铁, 王志忠. 实用钢筋混凝土结构优化设计. 哈尔滨建筑工程学院学报， 1986, 19(2): 104-117(Huo Da, Wang Xitie, Wang Zhizhong. Practical optimization design of reinforced concrete structure. *Journal of Harbin Architecture and Civil Engineering Institute*, 1986, 19(2): 104-117(in Chinese))

5 罗伯特 ·M· 斯塔克，罗伯特 ·L· 尼克尔斯. 设计数学基础. 北京：人民交通出版社， 1980 (Robert M Stark, Robert L Nicholls. Mathematical Foundations for Design. Beijing: China Communications Press, 1980 (in Chinese))

(责任编辑：刘希国)

(上接第 93 页)

三等奖获得者

吴居洋	吴俊慧	吴坤强	吴灵艳	吴梦林	吴排青	吴青青	吴全龙	吴伟智	吴文霞	吴小元	吴晓风
吴新海	吴振兴	伍宜昌	席椿富	夏 磊	夏飞龙	夏锦林	夏晓东	向学坤	项乃亮	项延峰	肖 洁
肖 顺	肖 骁	肖志颖	谢 涛	谢晨月	谢国涛	谢劲松	谢理斌	熊 武	熊学强	修哈宁	徐 锋
徐 虎	徐 凯	徐 龙	徐 伟	徐 祥	徐 阳	徐怀银	徐健程	徐君仁	徐沛力	徐世平	徐新明
徐延举	徐宇哲	徐云雷	徐章雄	徐智敏	许 骏	许 贇	许广灿	许力蒲	许立言	许庆林	许万里
许文艺	许潇楠	许叶亮	许云鸽	许展鹏	宣卫强	薛高云	薛荣军	薛志全	闫飞越	闫玉平	严慧芳
严克非	严姗姗	严书峰	严中奇	晏 涛	阳小泉	杨 丹	杨 刚	杨 光	杨 晶	杨 伟	杨 翔
杨 俣	杨 震	杨安民	杨栋梁	杨广超	杨明梦	杨清亮	杨盛牧	杨诗雨	杨万科	杨未柱	杨曦中
杨晓畅	杨育伟	杨跃威	杨增鲲	杨志海	杨子云	尧 锋	姚 琪	姚碧波	叶会林	叶云龙	叶照严
叶志伟	叶智航	移峥峰	易显水	殷 实	殷想想	尹 玲	尹华博	由天宇	于发杨	于桂亮	于润清
于文慧	余 觉	余豪丰	喻志然	袁 钎	袁 松	袁达平	袁道云	袁永强	曾垂远	曾 伍	翟 昆
翟建勋	湛海群	张 备	张 超	张 驰	张 汉	张 号	张 浩	张 骥	张 健	张 进	张 静
张 凯	张 克	张 龙	张 磐	张 棚	张 鹏	张 强	张 硕	张 翔	张 早	张本传	张超杰
张晨亮	张东焜	张国凯	张慧楠	张建欣	张金豹	张靖驰	张居金	张立业	张林海	张敏捷	张首沫
张帅重	张惟政	张文杰	张夏阳	张向向	张孝天	张兴玉	张雄辉	张雪峰	张雪健	张艳娟	张翌欣
张永龙	张永梅	张雨航	张玉勤	张玉雪	张云超	张振凯	张志刚	张志清	张智慧	张宗增	章 强
章丹颂	赵 迪	赵 皓	赵 荔	赵 曦	赵春浩	赵德云	赵黄达	赵牧野	赵仕威	赵首帅	赵树萍
赵伟程	赵晓辉	赵亚飞	赵玉伟	赵云龙	赵泽锋	赵智勇	赵紫汪	甄亭亭	郑 健	郑 南	郑佳丽
郑建朋	郑丽文	郑伶俊	郑壹泷	郑宜生	支 杰	钟 炀	钟梦星	钟湘生	钟勇锋	钟有悦	周 陈
周 欢	周 龙	周 娜	周 强	周 威	周海辉	周洪斌	周洪喜	周建华	周开方	周牡丹	周盛泽
周士雄	周思清	周伟达	周显东	周学波	周亦秋	周泽阳	周张侠	周志坚	朱 丽	朱 琪	朱 强
朱 希	朱 祥	朱才文	朱程鹏	朱国栋	朱坤庆	朱亦弘	朱云鹏	朱正庚	朱志东	祝 双	庄 昀
庄海亮	卓俊维	卓明昭	邹 超	邹 君	邹慧辉	邹征夏	左浩然				