

图1 截面形状与尺寸

表1 节点编号及坐标

坐标	节点编号								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	4	3.966	3.864	3.826	3.464	0	-1	-1	4
y_i	0	0.522	1.035	1.531	2	2	1	0	0

按照上述原理及计算公式, 编制了计算程序. 计算结果分别为 $A = 9.205$, $S_x = 8.728$, $S_y = 14.195$, $x_c = 1.542$, $y_c = 0.948$, $I_x = 11.208$, $I_y = 38.680$, $I_p = 49.889$, $I_{xy} = 13.853$.

利用该方法对文献 [3] 所给任意直边多边形截面进行了计算, 均得到精确的结果.

参 考 文 献

- 1 同济大学数学教研室. 高等数学 (下册). 北京: 高等教育出版社, 2002, 172-173
- 2 刘子顺, 乐美峰. 利用边界积分法计算截面图形的几何性质. 力学与实践, 1995, 17(4): 68-70
- 3 皮萨连科, 亚科索列夫, 马特维也夫著. 材料力学手册. 北京: 中国建筑科学出版社, 1981, 7-105

(责任编辑: 刘俊丽)

小变形轴力杆件的变形位移方程¹⁾

苏少卿^{*,†,2)} 王肖钧^{*,3)}

^{*}(中国科学技术大学工程科学学院, 合肥 230026)

[†](安徽建筑工业学院土木工程学院, 合肥 230022)

摘要 从杆件变形量的定义出发, 利用两点间距离公式, 导出了小变形轴力杆件的变形位移方程. 此方程形式简洁, 计算方便, 对线性和非线性材料的小变形问题都可应用, 也不必区分静定结构和超静定结构, 还可以方便地处理支座沉陷问题, 因而广泛适用于桁架结构的受力分析.

关键词 桁架, 轴力杆件, 小变形, 位移, 支座沉陷, 非线性材料

中图分类号: TU323.4 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2011)04-074-03

人们已经使用多种方法对桁架结构的计算作了大量探讨^[1-5]. 这些方法的特点在文献 [1-5] 中互有介绍与总结, 但都有改进的必要. 本着简化推导过程、明确适用条件、扩大适用范围等原则, 本文推导了小变形轴力杆件的变形位移方程.

1 变形位移方程

1.1 完整的推导

不失一般性, 先讨论三维空间桁架. 考虑在结构坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中长 l 的任意一根杆件 (图 1), 设其端点为

$i(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ 和 $j(x_1^j, x_2^j, x_3^j)$. 视其轴线为由点 i 指向点 j 的有向线段, 记轴线的单位方向矢量为: $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $n_k = (x_k^j - x_k^i)/l$ ($k = 1, 2, 3$). 设桁架受力变形后两结点的新位置分别为 $i'(x_1^{i'}, x_2^{i'}, x_3^{i'})$ 和 $j'(x_1^{j'}, x_2^{j'}, x_3^{j'})$, 则结点位移矢量分别是 $\mathbf{d}_i = (d_1^i, d_2^i, d_3^i)$ 和 $\mathbf{d}_j = (d_1^j, d_2^j, d_3^j)$, 其中 $d_k^m = x_k^m - x_k^m$ ($k = 1, 2, 3; m = i, j$), 结点间相对位移 $\mathbf{d} = (d_1^j - d_1^i, d_2^j - d_2^i, d_3^j - d_3^i)$.

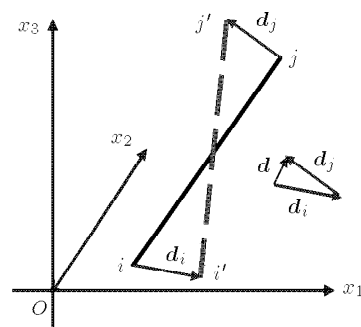


图1 桁架中的杆件变形

2010-05-04 收到第1稿, 2010-06-28 收到修改稿.

1) 安徽省高等学校省级教学研究项目资助 (2008jyxm324).

2) 苏少卿, 副教授, 主要研究方向为计算力学. E-mail: herdheart@aiai.edu.cn

3) 王肖钧, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为冲击力学数值方法. E-mail: xjwang@ustc.edu.cn

用两点间距离公式计算变形后的杆件长度

$$l' = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k^{j'} - x_k^{i'})^2} = l \sqrt{\sum_{k=1}^3 (n_k + d_k/l)^2}$$

l' 为结点相对位移的非线性函数。本文不考虑大变形情况，则可引用小变形假定将其线性化， $l' \approx l + \sum_{k=1}^3 n_k d_k$ ，据定义^[6]得杆件变形量

$$\Delta l = l' - l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad (1)$$

即：轴力杆件的变形量等于轴线的单位方向矢量和结点间相对位移矢量的点积。

以上推导过程很容易退化到平面问题和一维问题。因而式(1)从一维问题到三维问题都通用，它就是杆件变形量和结点(相对)位移的关系，可称之为轴力杆的“变形位移方程”。

从杆件变形后长度的计算过程中可以看出：式(1)中的等号并不表示数学意义的相等，而只是表示“在小变形假定下，可以认为是相等的”。这揭示了小变形假定的重要性，同时也限定了式(1)所示的变形位移方程只适用于小变形问题。

推导过程中并没有涉及材料特性，因此，变形位移方程对线性材料和非线性材料都是适用的。

直接将相对位移矢量 \mathbf{d} 投影到轴线方向 \mathbf{n} 上，就得到杆件的变形量 $\Delta l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ ，而且不会出现“近似等于”符号。此法对小变形情形确实可用，但不能揭示小变形假定的重要性。事实上，桁架变形后杆件的轴线方向发生了变化，只有在小变形假定下，才能(近似地)认为它仍然是 \mathbf{n} 。

桁架杆件轴力的大小为 $F_N = \sigma A$ ，在平截面假定下，横截面 A 上应力 σ 均匀分布，应变 $\varepsilon = \Delta l/l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}/l$ ，引入材料的应力-应变关系 $\sigma = f(\varepsilon)$ 就有

$$F_N = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}/l)A \quad (2)$$

在线弹性范围内，据胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$ ，有

$$F_N = \frac{EA}{l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad (3)$$

1.2 桁架分析的途径

由截面法得杆件 ij 的端点 i 受到的外力为 $-F_N \mathbf{n}$ ，杆件对结点 i 的作用力为 $F_N \mathbf{n}$ ；同理，杆件对结点 j 的作用力为 $-F_N \mathbf{n}$ 。考虑桁架中任意一个结点 P ，设从点 P 出发(P 为起点)的杆件有 I 根，同时有 J 根杆件指向点 P (P 为终点)，桁架在点 P 受到的载荷为 \mathbf{F}_P ，则点 P 的平衡方程为

$$\mathbf{F}_P = \sum_J (F_N \mathbf{n})_j - \sum_I (F_N \mathbf{n})_i \quad (4)$$

在桁架的所有结点上都可以列出矢量方程(4)。在有约束的结点上，桁架在约束方向上的载荷即约束反力是未知的，可以有意识地忽略约束方向上的平衡方程，从而得到桁

架各结点非约束自由度上的平衡方程组。代入已知位移(可以不为零，对应于有支座沉陷的情形)后，所得方程组只包含各结点非约束自由度上的位移和已知的外载荷，求解之后，即可得知桁架结构所有结点的位移，并进而求出杆件内力。最后用约束方向上的平衡方程求解约束反力。

正因为求解位移的过程不涉及约束反力，这里不必区分静定结构和超静定结构。

实际上矢量方程(4)可以用于处理斜向约束(约束方向不与任一坐标轴平行)的情形。

1.3 小规模手工求解与大规模机器求解

桁架结点总数很少时可手工求解。但实际工程中的普通桁架、网架、网壳结构的结点较多，必须用计算机求解。方程(4)对通过点 P 的杆件只用到其一个结点的力，这在计算过程中是不经济的。因为加(减)运算的顺序是不重要的，可以依次考虑各杆件对其两个结点的影响，而不是一次性完整地列出某点的平衡方程，这样，在考虑了所有杆件之后，各结点的平衡方程也就完全列出了。

式(4)表明任一结点 P 的平衡一般只涉及到少数结点的位移值，因而，最终的方程组的系数矩阵是稀疏的。对于线弹性材料，式(3)表明杆件内力是结点位移的线性函数，最终得到的是线性代数方程组。

2 算例

例1 图2所示正方形平面桁架结构，边长为 a ，各杆件横截面面积 A ，材料弹性模量 E ，力 \mathbf{F} 沿对角线 AC 作用，计算 A, C 两点距离改变^[6]。

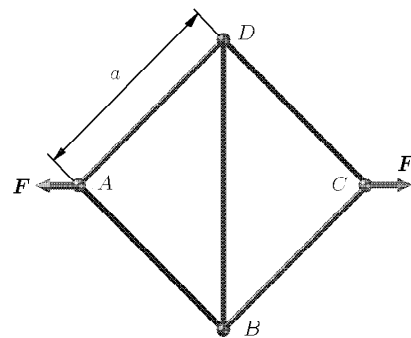


图2 正方形桁架

解 以 AC 为 x 轴， BD 为 y 轴。由于对称，设点 C 位移 $(u, 0)$ ，点 B 位移 $(0, v)$ ，则点 A 位移 $(-u, 0)$ ，点 D 位移 $(0, -v)$ 。各杆件轴线单位方向矢量计算过程从略。

考虑点 C 平衡，由式(4)

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} (1, -1) \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) \begin{Bmatrix} u \\ -v \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

考虑点 D 平衡, 由式 (4)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= -\frac{EA\sqrt{2}}{a} (1, -1) \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \\ &\frac{EA\sqrt{2}}{a} (1, 1) \cdot \begin{Bmatrix} u \\ -v \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \\ &\frac{EA}{\sqrt{2}a} (0, 1) \begin{Bmatrix} 0 \\ -2v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

解得 $u = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{Fa}{EA}$, 从而

$$\Delta_{AC} = 2u = \frac{(2 + \sqrt{2}) Fa}{EA}$$

当然也可以只列出 C 点 x 方向和 D 点 y 方向的平衡方程. 因为这里的对称线就是约束, 约束方向的平衡方程无助于求解位移分量, 在求解位移的过程中可以不列.

例 2 图 3 所示平面桁架杆件用幂强化材料制造, 其应力与应变关系为 $\sigma = K\varepsilon^{1/2}$ (K 为常数), 横截面积均为 A , 结点 A, C 为铰支座, 求集中力 F 作用点的位移 [7].

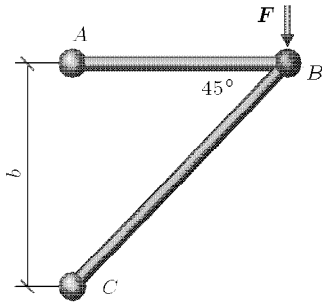


图 3 幂强化材料桁架

解 设 B 点位移 (u, v) . 题中应力与应变都应该理解为绝对值. 这里必须假定材料拉压同性, 以拉应力为正

$$\sigma = \pm K|\varepsilon|^{1/2} = K \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|}}$$

有

$$F_N = KA \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|}}$$

$l_{AB} = b, \mathbf{n}_{AB} = (1, 0), \mathbf{d}_{AB} = (u, 0), l_{CB} = \sqrt{2}b,$
 $\mathbf{n}_{CB} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \mathbf{d}_{CB} = (u, v).$

据点 B 平衡, 由式 (4)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} = KA \frac{u}{\sqrt{|u|b}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + KA \frac{\sqrt{2}(u+v)/2}{\sqrt{|(u+v)b|}} \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

由第 2 式知 $u + v$ 为负数, 再由第 1 式知 u 值为正. 因而

$$\left. \begin{aligned} \frac{KA}{\sqrt{b}} \sqrt{u} &= \frac{KA}{2\sqrt{b}} \sqrt{-(u+v)} \\ -\frac{KA}{2\sqrt{b}} \sqrt{-(u+v)} &= -F \end{aligned} \right\}$$

解得 $u = \frac{F^2 b}{K^2 A^2}$, 向右; $v = -\frac{5F^2 b}{K^2 A^2}$, 向下.

例 3 空间 4 根杆铰结于点 A , 如图 4, 结点 B, C, D, E 处均为球形铰支座. 杆长 $l = 5$, 抗拉刚度 EA , 杆重不计. ABD 为水平面, ACE 为垂直面. 点 A 的力 F 与垂直杆 AE 夹 45° 角, 力 F 作用线与 AE 决定的平面平行于垂直平面 BCD . 求各杆的内力和结点 A 的位移 [4].

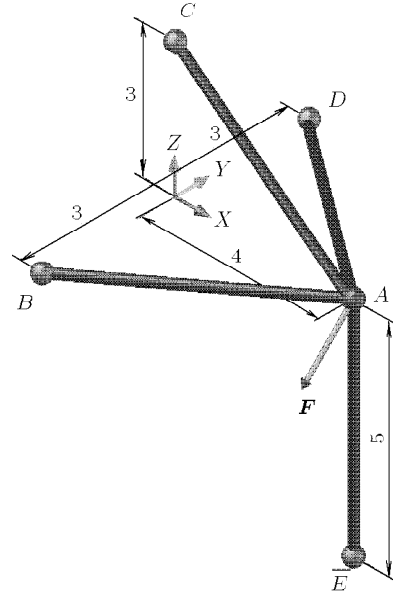


图 4 空间桁架

解 如图, 各点坐标: $A(4, 0, 0), B(0, -3, 0), C(0, 0, 3), D(0, 3, 0), E(4, 0, -5)$. 设点 A 位移 (u, v, w) . $\mathbf{n}_{BA} = (0.8, 0.6, 0), \mathbf{n}_{CA} = (0.8, 0, -0.6), \mathbf{n}_{DA} = (0.8, -0.6, 0), \mathbf{n}_{EA} = (0, 0, 1)$.

按式 (4) 考虑点 A 平衡

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 F \\ -\sqrt{2}/2 F \end{Bmatrix} &= \frac{EA}{l} (0.8u + 0.6v) \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\frac{EA}{l} w \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{l} (0.8u - 0.6w) \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{Bmatrix} + \\ &\frac{EA}{l} (0.8u - 0.6v) \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

解得 $(u, v, w) = (-0.143, -0.982, -0.570)Fl/EA$, 进而求得 $F_{BA} = -0.703F, F_{CA} = 0.228F, F_{DA} = 0.475F, F_{EA} = -0.570F$.

3 结 论

本文只用两点间距离公式, 就从杆件变形量的定义中导出了变形位移方程. 其概念清楚, 方法简单, 突出了小变形

假定的意义。该方法对线性和非线性材料的静定结构和超静定结构的小变形问题都可应用，还能方便地处理支座沉陷和斜向支承问题。

本文方法规律性强，既便于手工求解又便于电算应用，有明显的优越性。

参 考 文 献

- 1 张效松. 简单平面桁架结点位移确定的一种方法. 力学与实践, 1998, 20(1): 54-55
- 2 冯贤桂. 结点位移计算的一种简单方法. 力学与实践, 2002,

24(1): 49-50

- 3 周道祥. 解析法解杆系拉(压)超静定问题. 力学与实践, 2004, 26(2): 66-67
- 4 朱伊德, 薛纭. 空间桁架的单位向量法. 力学与实践, 2008, 30(1): 84-86
- 5 常学平, 王维, 蒋平等. 拉、压静不定问题变形几何分析中存在的问题. 力学与实践, 2008, 30(2): 89-90
- 6 刘鸿文. 材料力学(I)第4版. 北京: 高等教育出版社, 2004, 1: 33,62
- 7 杨伯源, 李和平, 刘一华. 材料力学(I). 北京: 机械工业出版社, 2002. 190

(责任编辑: 周冬冬)

山东省结构设计竞赛一等奖模型设计分析¹⁾

张 佳²⁾ 吴立香 彭扬波 曲淑英³⁾ 侯兴民

(烟台大学土木工程学院, 烟台 264005)

摘要 以山东省高校第三届结构设计大赛获奖作品为模型, 介绍了从模型、加载装置设计、加工、分析及静动加载的全过程, 最后通过理论分析, 验证了结构的强度及稳定性. 设计大赛对开拓学生的视野, 拓宽大学生创新平台, 引领大学生创新实践思维助益良多, 值得推广.

关键词 结构设计竞赛, 内力与变形分析, 有限元软件, 创新实践

中图分类号: TU323 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2011)04-077-03

2009年中国石油大学举办了山东省第三届结构设计竞赛, 我们参加了这次竞赛并取得了 一等奖、省级最佳选型与制作奖的好成绩(全体还获得二等奖、三等奖、省级最佳结构分析奖、优秀组织奖). 参加比赛期间, 通过完整地参与结构模型、加载装置的设计、制作、加载至破坏的全过程, 深刻领会到了结构选型、受力体系、计算建模、节点连接, 基础处理, 材料合理利用等多门课程的知识, 对开发我们的创新思维、锻炼动手实践能力也有很多的体会, 这种学习方式是课堂教学和课内实践教学环节无法得到的. 同时竞赛过程中, 通过团队交流、兄弟院校间的交流, 不断修改和优化模型, 培养了团队意识和协作能力, 收获颇丰.

1 基本要求

模型设计的要求是在水平动载荷作用下既要满足结构刚

度与变形要求, 又要尽可能地减少材料用量. 在承受 10 kg 的砝码的同时启动动载装置, 振幅是 10 mm、频率为 2 Hz、加速度为 6.4 mm/s².

材料: 木板厚 1 mm, 宽 55 mm; 木条规格: 2 mm × 2 mm, 2 mm × 4 mm, 2 mm × 6 mm, 2 mm × 8 mm; 弹性模量 104 MPa, 抗拉强度 30 MPa, 比重 0.5.

2 模型设计

根据结构在动载荷作用下要求稳定性高、重量轻的原则, 采用空间三角形模型. 由于结构的设计高度是固定的, 整个体型的选型问题即变为 3 根柱的倾角的确定问题. 通过分析、计算、测试最终选出了最优的角度.

将模型主体设计为桁架体系, 在模型的每个侧面上布置了两道 X 型斜撑. 在每侧的桁架平面内再添加小型斜撑, 构成小三角形, 以增强其稳定性. 整个桁架体系有效宽度较大, 桁架斜杆可有效传递剪力, 且变形小, 材料强度得以充分发挥. 图 1, 图 2 分别为动加载装置图和模型图.

3 模型制作

在保证强度足够、重量最轻的前提下, 将立柱选为 T 字型截面, 采用 1 mm 厚的木板粘接而成. 横梁采用 2 mm × 4 mm 木块, 设置在距结构模型底面 12 cm 处, 将结构连接成一个整体, 提高了模型的抗侧移能力. 斜撑与立柱的交界处先采用榫接相互卡住, 再用胶水将其牢牢粘住, 提高了整个模型的刚度以及抗扭转能力.

本文于 2010-- 收到第 1 稿, 2011-01-04 收到修改稿.

1) 山东省高等学校教学改革研究项目(2009188), 山东省研究生教育创新计划项目(SDYX11194)和烟台大学大学生科技创新基金(101102)资助项目.

2) 张佳, 1985 年生, 女, 烟台大学土木工程学院学生. E-mail: zhangjia.lily0535@yahoo.com.cn

3) 曲淑英, 1963 年生, 女, 教授, 研究方向为结构动力分析. E-mail: qsy_qu@163.com