

大型圆形贮液池力学分析中的重心插值拟谱法

赵晓伟¹⁾ 王兆清 陈世英

(山东建筑大学工程结构现代分析与设计研究所, 济南 250101)

摘要 针对传统大型圆形贮液池力学分析方法计算复杂、精度不高的问题, 用拟谱法对圆形贮液池的线弹性静力问题进行了研究. 采用重心 Lagrange 插值多项式建立未知函数的微分矩阵, 将池壁的控制方程表示为代数方程组. 通过求解代数方程组, 求得池壁各个离散点挠度, 进而采用微分矩阵直接求得池壁内力. 算例表明, 该方法原理简单, 易于程序实现和数值计算精度高.

关键词 拟谱法, 微分矩阵, 配点法, 重心 Lagrange 插值

中图分类号: TU311.41 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2010)02-035-04

BARYCENTRIC INTERPOLATION PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR ANALYZING CIRCULAR CONCRETE TANKS WITHOUT PRESTRESSING

ZHAO Xiaowei¹⁾ WANG Zhaoqing CHEN Shiying

(Institute of Modern Analysis & Design for Engineering Structures, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract Traditional analyses of circular concrete tanks without prestressing suffer from some drawbacks, such as complicated computation and unsatisfactory accuracy. In this paper, a pseudospectral method based on barycentric Lagrange interpolation for linear elastic static analysis of tank is proposed. The differentiation matrix for the unknown function is constructed by using barycentric Lagrange interpolation. The governing equations of equilibrium, in terms of stress resultants and couples, are put into a generalized displacement form by the use of strain-displacement relationships and constitutive equations. The governing equation of tank wall can be expressed as a set of algebraic equations by the pseudospectral method. With boundary conditions, the algebraic equation system is solved to obtain the deflections at discrete points. The principle of this method is simple and ease to program. The accuracy and the numerical stability are good.

Key words pseudospectral method, differentiation matrix, collocation method, barycentric Lagrange interpolation

引 言

大型贮液池是石油、化工、水处理等工程中常见的构筑物, 主要用于贮存油、水等各种液体. 对于大、中型池, 一般采用圆形池, 其形状由圆柱壳、扁球壳、圆板等规则结构组成. 在实际工程设计计算中, 根据板壳的控制微分方程, 用解析法辅以力法或变位法来求贮液池的内力; 但计算过程繁琐, 不易编制程序, 无法满足大型贮液池优化设计的需要. 有限元法要对求解区域划分单元, 计算精度依赖于单元

大小, 且计算量大, 需要大量内力重分析, 计算精度和效率都大受影响^[1]. 微分求积法^[2]也曾用来求解这一类问题, 其基本原理是用未知函数在区间上所有离散点函数值的加权和来逼近该函数在某一离散点的偏导数或者积分, 该方法中权系数的确定通常是根椐 Lagrange 多项式在网点处的导数值给出; 但是这种方法的局限性是离散点不能取得太多, 否则 Lagrange 多项式表示的曲线随多项式次数的升高而出现 Runge 现象, 从而导致计算不稳定性^[3].

2008-06-11 收到第 1 稿, 2009-11-10 收到修改稿.

1) 赵晓伟, 女, 讲师, 主要研究方向为数值计算. E-mail: ytzxw@sda.edu.cn

在过去二十多年中,谱方法在计算流体力学、双曲型守恒律和偏微分方程数值解等多个领域都得到了很好的应用,并不断发展.拟谱法^[4,5]是根据谱方法发展出来的一种配点型方法, Chebyshev 配点法是拟谱法中最常见的一种,其未知函数通过 Chebyshev 多项式展开进行近似,其优点是在较少数量节点的情况下,能产生高精度的计算解.本文所用的重心插值配点法也是拟谱法的一种,除了具有 Chebyshev 配点法的上述优点外,还具有极好数值稳定性^[3]和极高近似精度^[6],同时重心 Lagrange 插值公式具有紧凑的各阶导数的计算公式^[7].

配点法的基本思想是把函数在给定网格点处的各阶导数近似表达为定义域上各网点函数值的线性组合,从而使包含解函数的各阶导数的微分方程(组)转化为以网点函数值为未知数的代数方程组.求解这个代数方程组,可得网点的函数值,从而得到能满足工程应用需要的微分方程的数值解.

本文根据大型贮液池特有的力学结构特性,采用重心 Lagrange 插值多项式建立未知函数的微分矩阵.采用重心插值拟谱法将壳体弹性曲面的控制方程表示为代数方程组.通过求解代数方程组,求取壳体各个离散点的挠度,进而利用微分矩阵求得壳体上各点较精确的内力和弯矩值.

1 基于重心插值的微分矩阵

考虑在区间 $[0, L]$ 上可微的一微函数 $g(x)$, 选择配置点 $x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{n-1} \right] L$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 并以节点函数值 $g(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) 作为基本未知量, 且令 $g(x_j) = v_j$. 在全域内采用重心 Lagrange 插值逼近 $g(x)$, 则有^[8]

$$g(x) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{x-x_j} v_j / \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{x-x_j} \quad (1)$$

其中 m_j 为重心权

$$m_j = 1 / \prod_{j \neq k} (x_j - x_k), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

对 $g(x)$ 求 n 阶导数, 即

$$g^{(n)}(x_i) = \sum_{j=1}^N d_{ij}^{(n)} g(x_j) \quad (3)$$

可以推得 $g(x)$ 求 n 次导数的微分矩阵 D_N

$$d_{ij}^{(n)} = n \cdot \left(d_{ij}^{(n-1)} d_{ij} - \frac{d_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad \left. \begin{matrix} \\ i \neq j, n = 2, 3, \dots, N \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

$$d_{jj}^{(n)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{N+1} d_{ij}^{(n)} \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (5)$$

$$\text{令 } w_j^{(n)} = g^{(n)}(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

$$\text{则 } w^{(n)} = D_N v \quad (7)$$

其中, $w^{(n)}$ 为未知函数 n 阶导数值构成的列向量, v 为节点函数值的列向量.

这样关于函数 $g(x)$ 的原微分方程就转化为由微分矩阵表达的关于未知数 $g(x_i)$ 的线性代数方程组. 解此方程组就能得到 $g(x)$ 的离散解 $g(x_i)$.

2 重心插值拟谱法

2.1 控制方程

一大型圆形水池^[9], 计算简图见图 1, $H = 4\text{ m}$, $R = 5.025\text{ m}$, 选定等厚柱壳 $h = 15\text{ cm}$, $E = 2.91 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$, $\mu = 1/6$, 荷载组合情况为: 池底固定, 池顶自由, 三角形荷载 $p = -45.5\text{ kN/m}^2$.

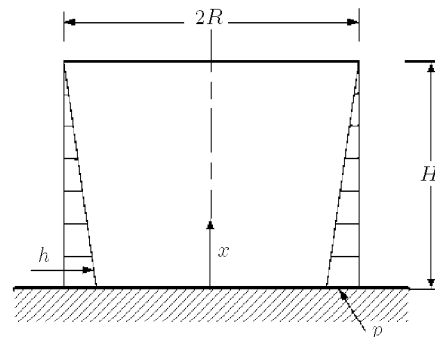


图 1 圆形水池所受静荷载

首先选取池壁壳体微分体进行受力分析, 不考虑轴向荷载, 视池壁为匀质弹性体, 如图 2 所示, 承受轴对称的法向荷载 p_x , 不计热效应, 圆柱壳的静力平衡方程为

$$\left. \begin{matrix} \frac{d^2 M_x}{dx^2} - \frac{N_\theta}{R} + p = 0 \\ \frac{dN_x}{dx} = 0, \quad Q_x - \frac{dM_x}{dx} = 0 \end{matrix} \right\} \quad (8)$$

内力与位移的关系

$$N_\theta = \frac{Eh}{R} W, \quad N_x = 0, \quad M_x = G \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (9)$$

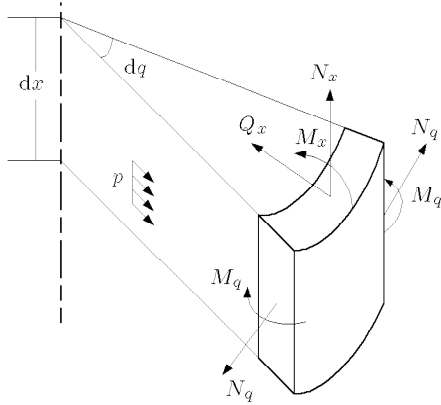


图 2 池壁壳体微分体的受力图

式中， $W(x)$ 为柱壳中面内的径向位移， N_x 和 N_θ 为轴向和环向膜力， M_x 和 M_θ 分别为轴向和环向弯矩， Q_x 为横向剪力， E 为弹性模量， μ 为泊松比， G 为抗弯刚度， $G = Eh^2/[12(1-\mu^2)]$ 。将式 (9) 代入式 (8) 得

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(G \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} W = p \quad (10)$$

因此，对于整个池壁有

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(G \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} W = p \frac{H-x}{H}, \quad x \in [0, H] \quad (11)$$

可写成

$$GW^{(4)} + \frac{Eh}{R^2} W = p \frac{H-x}{H}, \quad x \in [0, H] \quad (12)$$

2.2 重心插值配点法公式

选取 Chebyshev 配置点 (1) 离散区间 $[0, H]$ ，在区间上采用重心 Lagrange 插值，则

$$W(x) = \sum_{j=1}^N l_j(x) w_j \quad (13)$$

将式 (13) 代入控制方程 (12) 得

$$\left. \begin{aligned} G \sum_{j=1}^N l_j^{(4)}(x) w_j + \frac{Eh}{R^2} \sum_{j=1}^N l_j(x) w_j &= p \frac{H-x}{H} \\ x &\in [0, H] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

令式 (14) 在离散点上成立，即

$$\left. \begin{aligned} G \sum_{j=1}^N l_j^{(4)}(x_i) w_j + \frac{Eh}{R^2} \sum_{j=1}^N l_j(x_i) w_j &= p \frac{H-x_i}{H} \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用微分矩阵的记号可以表示为

$$\left(GD_4 + \frac{Eh}{R^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{W} = \mathbf{f}, \quad x \in [0, H] \quad (16)$$

其中， $\mathbf{f} = p \frac{\mathbf{B}-x}{H}$ ， \mathbf{B} 为 N 维分量为 H 的列向量； \mathbf{D}_4 是对 $g(x)$ 求 4 阶导数的微分矩阵； \mathbf{I} 为 $N \times N$ 的单位矩阵。

令 $\mathbf{L} = GD_4 + \frac{Eh}{R^2} \mathbf{I}$ 。则式 (16) 可以写为

$$\mathbf{LW} = \mathbf{f} \quad (17)$$

相应边界条件

$$W(0) = 0, W'(0) = 0, W''(H) = 0, W'''(H) = 0$$

则边界约束条件可以表示为

$$\left. \begin{aligned} w_j &= 0 (i=1), \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(1)} w_j = 0 (i=2) \\ \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(2)} w_j &= 0 (i=N-1) \\ \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(3)} w_j &= 0 (i=N) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将此 4 个方程的左边分别取代矩阵 \mathbf{L} 的第 1, 2, $N-1, N$ 行，将此 4 个方程的右边分别取代载荷列阵 $p \frac{\mathbf{B}-x}{H}$ 的第 1, 2, $N-1, N$ 行，实现边界条件的施加。由式 (17)，式 (18) 即可求得池壁的节点位移列阵，壳中内力可以代入式 (9) 求得。

3 数值结果

数值计算采用 Matlab 程序实现。取节点数 $N = 13$ ，求得池壁节点位移，通过重心 Lagrange 插值求得其余需要点的位移，如图 3 所示。图中实曲线是池壁位移的理论解，黑点是用本文方法所得位移值，绝对误差为 5.7800×10^{-9} ，其位移最大点的相对误差为 1.9510×10^{-5} 。本文采用 MSC.Marc 软件，将此结构离散成 3×30 的 Quad4 全积分单元，得到池壁位移与其理论解的最大误差为 6.2960×10^{-5} ，其位移最大点的相对误差为 0.2860。图 3 中的“+”即为 MSC.Marc 计算得到的位移值。可见本文方法用很少的点就可以得到很高的精度。由式 (9) 可得环向内力理论解，图 4 中的黑点是用本文方法所得的环向内力值。利用二阶微分矩阵和式 (9) 直接求得弯矩如图 5 所示，图中实曲线是池壁竖向弯矩的理论解，黑点是用本文方法所得的弯矩值。

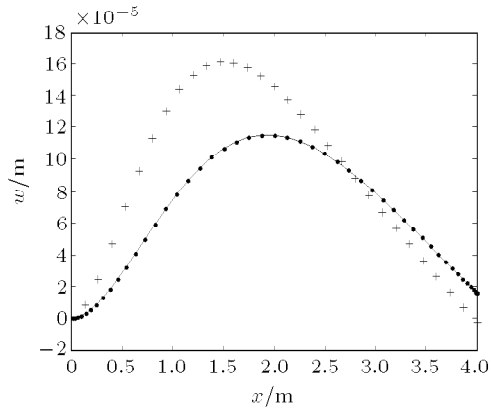


图3 位移沿池高分布图

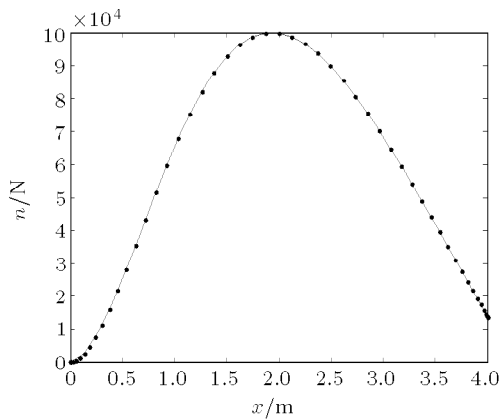


图4 环向内力沿池高分布图

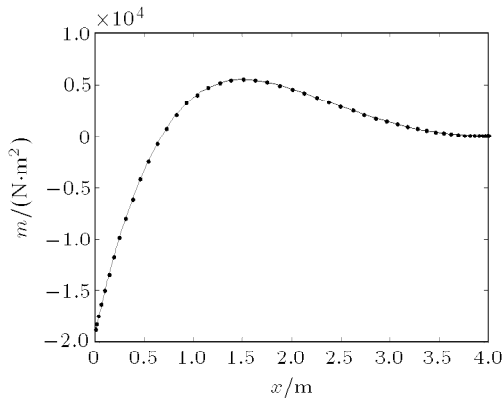


图5 竖向弯矩沿池高分布图

4 结论

从算例中可以看出,本文方法的精度很好,完全可以满足工程的需要.通过线弹性关系得到内力与

位移的关系,并利用微分矩阵来求解得到较精确的内力和弯矩,该方法计算更为简单,避免了传统方法中大量的内力重分析带来的计算精度和计算效率的降低.该方法不但具有非常好的精度,还具有极好的数值稳定性.实践证明这一方法不仅适用于圆形水池,也适用于圆锥、球等一类回旋体薄壁水池的力学分析.

该方法对边界支承条件的处理在编制程序中也非常容易实现,而且这种方法数学原理非常简单,易于编程,因此在结构分析中有非常良好的应用前景.

参 考 文 献

- 1 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理及数值方法(第2版).北京:清华大学出版社,2000
- 2 聂国隼,仲政.微分求积单元法在结构工程中的应用.力学季刊,2005,26(3):423~427 (Nie Guojun, Zhong Zheng. Application of differential quadrature element method in structure engineering. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(3): 423~427 (in Chinese))
- 3 Berrut JP, Trefethen LN. Barycentric Lagrange interpolation. *SIAM Review*, 2004, 46(3): 501~517
- 4 Weideman JAC, Reddy SC. A Matlab differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2000, 26(4): 465~519
- 5 Trefethen LN. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: SIAM, 2000
- 6 王兆清,李淑萍,唐炳涛.任意连续函数的多项式插值逼近.山东建筑大学学报,2007,22(2):158~162 (Wang Zhaoqing, Li Shuping, Tang Bingtao. Polynomial interpolation approximations of arbitrary continuous functions. *Journal of Shandong Jianzhu University*, 2007, 22(2): 158~162 (in Chinese))
- 7 Schneider C, Werner W. Some new aspects of rational interpolation. *Math Comp*, 1986, 47 (175): 285~299
- 8 Nicholas JH. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2004, 24(4): 547~556
- 9 周凯红,曾韬,唐进元.大型圆形贮液池力学分析中的微分求积法.铁道科学与工程学报,2006,3(3):93~96 (Zhou Kaihong, Zeng Tao, Tang Jinyuan. Differential quadrature method solution for circular concrete tanks without prestressing. *Journal Of Railway Science And Engineering*, 2006, 3(3): 93~96 (in Chinese))

(责任编辑:何漫丽)