

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461. 2013.03.011

Yurke-like 态的自旋压缩

易洪刚, 陈荣华, 李嵩松

(江西教育学院物理系, 江西 南昌 330032)

摘要: 利用自旋压缩研究了 Yurke-like 态的纠缠特性。Yurke-like 态可以看成是一个对称量子态和两个特殊多粒子态的相干叠加, 因此可以通过研究叠加系数和相对相位对自旋压缩参数的影响来研究 Yurke-like 态的纠缠特性; 利用求极值的办法得到了最佳压缩方向角和最佳压缩值的解析表达式。结果表明: 自旋压缩参数随叠加系数单调变化而随相对相位作周期性改变; 粒子数越多, 压缩程度越高。

关键词: 量子光学; 自旋压缩; Yurke-like 态; 最优压缩方向

中图分类号: O431.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-5461(2013)03-0314-04

Spin squeezing of Yurke-like state

YI Hong-gang, CHEN Rong-hua, LI Song-song

(Department of Physics, Jiangxi Institute of Education, Nanchang 330032, China)

Abstract: The entangled property of Yurke-like state was investigated via spin squeezing. Since the Yurke-like state is superposed by a symmetric state and two special multi-particle states, the entangled property can be studied by investigating superposition coefficient and relative phase's influence on spin squeezing parameter. The analytical results for the optimal squeezed direction and optimal squeezing were obtained via extremum method. It's shown that the spin squeezing parameter monotonously changes with superposition coefficients and periodically changes with relative phase. It is also shown that the more the number of the particles is, the stronger the degree of squeezing will be.

Key words: quantum optics; spin squeezing; Yurke-like state; optimal squeezed direction

1 引言

量子纠缠^[1]是量子系统独有的物理性质, 是量子力学区别于经典力学的根本特征之一, 它根源于量子力学中的态叠加原理, 反映了量子系统各子系统之间的关联性。目前, 作为一种极其有用的物理资源, 量子纠缠已被广泛地应用于量子信息处理领域的各个方面, 例如量子隐形传态^[2~7]、密集编码^[8,9]、量子密码术^[10,11]和几何量子计算^[12,13]等。

通过二十多年的研究, 现在对量子纠缠的度量已经取得了很大的进展, 对两体纠缠的度量具有相当完美的度量方式, 但对多体纠缠目前还没有一个大家一致公认的度量方式。但是最近的研究表明: 利用自旋压缩参数可以用来度量多体系统的纠缠程度^[14~17]。自旋压缩与量子纠缠不同, 是量子力学区别于经典力学的另一个根本特征, 它来源于量子力学的海森堡测不准关系, 描述的是系统的涨落性质。与纠缠见证

基金项目: 江西省教育厅教改课题 (JXJG-06-67-12)、江西教育学院博士基金资助

作者简介: 易洪刚 (1962 -), 江西南昌人, 主要从事电子信息和量子信息研究。 **E-mail:** mphysics@163.com

收稿日期: 2012-05-03; **修改日期:** 2012-07-12

(Witnesses) 等其他刻画纠缠的量度方式相比^[18], 自旋压缩具有两个明显的优点: 第一, 自旋压缩参数仅仅与角动量算符的平均值和涨落有关, 因而具有比较清晰的物理图像, 同时这些平均值和涨落在实验中都可以很方便地直接测量, 因而通过对量子态的直接测量可以准确地确定纠缠程度; 第二, 自旋压缩可以提高精密测量的精度, 因而有更广泛的实际应用^[19]。由于量子纠缠的复杂性, 可以利用自旋压缩来度量多粒子系统的纠缠程度。

本文利用自旋压缩研究 Yurke-like 态的纠缠特性。Yurke-like 态是一种多粒子态, 利用 Dicke 态可以表示为^[20]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\left(\left|\frac{N}{2}, 1\right\rangle + \left|\frac{N}{2}, -1\right\rangle\right) + \beta e^{i\phi}\left|\frac{N}{2}, 0\right\rangle, \quad (1)$$

从上式可以看出, Yurke-like 态可以看成是两个多体量子态 $\left|\frac{N}{2}, 1\right\rangle$, $\left|\frac{N}{2}, -1\right\rangle$ 与一个对称量子态 $\left|\frac{N}{2}, 0\right\rangle$ 的相干叠加态; 在表达式 (1) 中, 总粒子数 N 是偶数, 叠加系数 α 、 β 是实数, 并且满足归一化条件 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; 复角 ϕ 是两个量子态之间的相对相位。通过研究叠加系数和相对相位对自旋压缩的影响, 不仅可以了解它们对多粒子纠缠的影响, 还可以进一步加深对量子力学一些基本问题的理解。

2 Yurke-like 态的自旋压缩

研究自旋压缩的方法很多, 这里采用 Kitagawa 和 Ueda 定义的自旋压缩参数^[15]

$$\xi^2 = \frac{4(\Delta J_{n_\perp})^2}{N}, \quad (2)$$

作为判断 Yurke-like 态是否存在自旋压缩的依据。在上式中, 下脚标 n_\perp 是指与平均自旋方向相垂直且均方差 $(\Delta J)^2$ 具有最小值的轴线方向。当 $\xi^2 < 1$ 时, 说明系统是压缩的。压缩参数越小, 则系统的纠缠程度越高。

根据压缩参数的定义, 首先要确定由平均值 $\langle J_i \rangle (i = x, y, z)$ 决定的平均自旋方向, 经过直接计算可以得到

$$\langle J_x \rangle = \sqrt{N\left(\frac{N}{2} + 1\right)}\alpha\beta \cos \phi, \quad (3)$$

$$\langle J_y \rangle = \langle J_z \rangle = 0, \quad (4)$$

即平均自旋方向沿 x 轴。所以垂直于平均自旋的任意自旋分量可以取为

$$J_\lambda = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_\lambda = J_y \cos \lambda + J_z \sin \lambda, \quad (5)$$

式中单位矢量 $\mathbf{n}_\lambda = y \cos \lambda + z \sin \lambda$, λ 是 y 轴与 \mathbf{n}_λ 之间的任意夹角。由于 $\langle J_y \rangle = \langle J_z \rangle = 0$, 因此有

$$(\Delta J_\lambda)^2 = \frac{1}{2} \left[\langle J_y^2 + J_z^2 \rangle + \langle J_y^2 - J_z^2 \rangle \cos(2\lambda) + \langle J_y J_z + J_z J_y \rangle \sin(2\lambda) \right]. \quad (6)$$

对任意夹角求方均差 $(\Delta J_\lambda)^2$ 的最小值就可以得到最优压缩方向角

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \left[\pi + \tan^{-1} \frac{\langle J_y J_z + J_z J_y \rangle}{\langle J_y^2 + J_z^2 \rangle} \right], \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (6) 式, 得到

$$(\Delta J_{n_\perp})^2 = \frac{1}{2} \left[\langle J_y^2 + J_z^2 \rangle - \sqrt{\langle J_y^2 - J_z^2 \rangle^2 + \langle J_y J_z + J_z J_y \rangle^2} \right]. \quad (8)$$

这样, 只要求解出三个平均值 $\langle J_y^2 + J_z^2 \rangle$ 、 $\langle J_y^2 - J_z^2 \rangle$ 和 $\langle J_y J_z + J_z J_y \rangle$, 再由方程 (8) 式和 (1) 式就可以得到自旋压缩参数的大小。通过计算可以得到

$$\langle J_y^2 \rangle = \frac{N}{4} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \left(\frac{\alpha^2}{2} + \beta^2 \right), \quad (9)$$

$$\langle J_z^2 \rangle = \alpha^2, \quad (10)$$

$$\langle J_y J_z + J_z J_y \rangle = \sqrt{N \left(\frac{N}{2} + 1 \right)} \alpha \beta \sin \phi, \quad (11)$$

从上述方程式可以看出, 自旋压缩参数由总粒子数、叠加系数和相对相位决定。为了更清楚地看出它们之间的关系, 图 1 画出了自旋压缩参数 ξ^2 随叠加系数 α 和相对相位 ϕ 的变化关系, 其中总粒子数 $N=100$ 。图中显示: 无论叠加系数和相对相位取何值, 压缩参数都小于 1, 因此, Yurke-like 态是一个自旋压缩态。当 $\alpha=0$ 时, Yurke-like 态退化为对称量子态 $|N/2, 0\rangle$, 自旋压缩处于最佳压缩状态, 压缩参数 $\xi^2=0$; 当 $\alpha \neq 0$ 时, 自旋压缩参数随叠加系数 α 的增大而单调增长, 说明 $|N/2, 0\rangle$ 态具有比量子态 $|N/2, 1\rangle, |N/2, -1\rangle$ 更好的纠缠程度。同时, 从图中还可以看到, 对于相同的叠加系数, 压缩参数随相对相位作周期变化, 当 $\phi = \pi/2$ 时, 压缩参数最小, 当 $\phi = 0, \pi$ 时, 压缩参数最大。图 2 画出的是自旋压缩参数随粒子数改变的关系, 其中 $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ 、 $\phi = \pi/2$ 。图 2 不仅可以看到叠加系数 α 小的 Yurke-like 态具有更强的压缩程度; 还可以看出随着 Yurke-like 态中粒子数的增多, 出现更强的自旋压缩。因此, 为了达到更好的自旋压缩, 既可以通过增大对称量子态的概率幅, 也可以通过增多 Yurke-like 态的粒子数来实现。

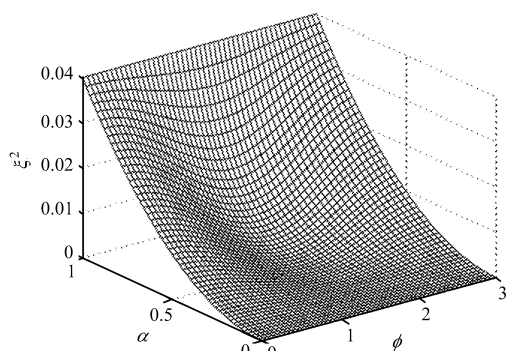


Fig.1 ξ^2 versus α and ϕ

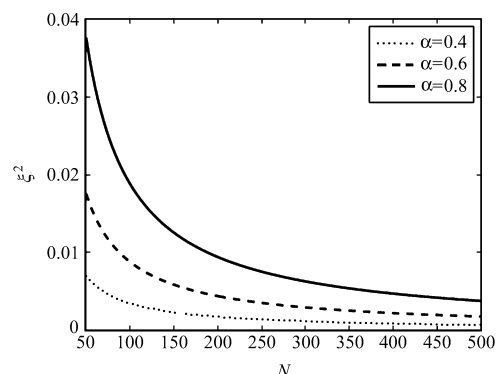


Fig.2 ξ^2 versus α and N

4 小 结

利用自旋压缩研究了多粒子态 Yurke-like 态的纠缠特性; 利用求极值的办法得到了最佳压缩方向角和最佳压缩值的解析表达式。结果表明: 压缩程度由 Yurke-like 态的总粒子数、叠加系数和相对相位决定, 总粒子数越多、叠加系数 α 越小, 则 Yurke-like 态的压缩程度越高, 其纠缠特性也越好; 自旋压缩参数随相对相位作周期性变化, 当 $\phi = \pi/2$ 时, 压缩参数最小, 当 $\phi = 0, \pi$ 时, 压缩参数最大。因此, 为了达到更好的自旋压缩, 既可以通过增大对称量子态的概率幅, 也可以通过增多 Yurke-like 态的粒子数来实现。由于量子态的叠加是量子力学的基本原理之一, 通过研究叠加系数和相对相对对自旋压缩参数的影响不仅可以了解它们对多粒子纠缠的影响, 还可以进一步加深对量子力学一些基本问题的理解。

参考文献:

- [1] Li Songsong, Huang Yibin. Entanglement of superposition of multi-states [J]. *International Journal of Quantum Information*, 2008, 6: 561.

- [2] Chen Meixiang, Li Honghai, Huang Zhiping, *et al.* Teleportation of a three-particle W state without the Bell-state measurement [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2006, 23(3): 393 (in Chinese).
- [3] Zha Xinwei. Expansion of orthogonal complete set and transformation operator in teleportation of three-particle entangled state [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2007, 24(2): 179 (in Chinese).
- [4] Ji Xin, Zhang Shou. Teleportation of the three-particle entangled state by the two EPR pairs [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2006, 23(6): 816 (in Chinese).
- [5] Cao Zhuoliang, Dong Ping, Xue Zhenyan. Progress on quantum teleportation [J]. *Journal of Anhui University* (安徽大学学报), 2006, 30(3): 48 (in Chinese).
- [6] Deng Fuguo, Li Chunyan, Li Yansong, *et al.* Symmetric multiparty-controlled teleportation of an arbitrary two-particle entanglement [J]. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 022338.
- [7] Man Zhongxiao, Xia Yunjie, Nguyen Ba An. Genuine multiqubit entanglement and controlled teleportation [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, 75: 052306.
- [8] Hao Jiucang, Li Chuanfeng, *et al.* Controlled dense coding using the Greenberger-Horne-Zeilinger state [J]. *Phys. Rev. A*, 2001, 63: 054301.
- [9] Chen Jianglan, *et al.* Quantum dense coding in multiparticle entangled states via local measurements [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2004, 21: 12.
- [10] Wan Hongbo, Ye Liu. Scheme for implementing quantum dense coding by using linear optical system [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(2): 161 (in Chinese).
- [11] Zhu Aidong, Zhang Shou. Quantum key distribution and controlled quantum direct communication applying product state of qutrit [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2007, 24(3): 316 (in Chinese).
- [12] Gao Yumei, Hu Lian. Non-adiabatic geometric quantum computation and topological quantum gates [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2006, 23(2): 183 (in Chinese).
- [13] Zhang Gang, Dong Ping. Unconventional geometric quantum computation with quantum-dot spin qubits inside a cavity [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2009, 26(4): 431 (in Chinese).
- [14] Jin Guangri, Liu Yongchun, Liu Wuming. Spin squeezing in a generalized one-axis twisting model [J]. *New Journal of Physics*, 2009, 11: 073049.
- [15] Kitagawa M, Ueda M. Squeezed spin states [J]. *Phys. Rev. A*, 1993, 47: 5138.
- [16] Song Lijun, Yan Dong, Li Yongda. Properties of spin squeezing in the quantum chaotic system [J]. *Chinese Journal of Luminescence* (发光学报), 2007, 28(3): 336 (in Chinese).
- [17] Hu Mingliang, Tian Dongping. Entanglement and spin squeezing in the three- and four-qubit Heisenberg XY spin chain [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2008, 25(1): 225.
- [18] Lewenstein M, Kraus B, Cirac J I, *et al.* Optimization of entanglement witnesses [J]. *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 052310.
- [19] Wang Xiaoguang, Adam Miranowicz, Liu Yuxi, *et al.* Sudden vanishing of spin squeezing under decoherence [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, 81: 022106.
- [20] Joshua Combes, Wiseman H M. States for phase estimation in quantum interferometry [J]. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, 7: 14.