

受均布载荷压杆后屈曲形态的数值计算¹⁾

李清禄²⁾ 李世荣

(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

摘要 对受均布载荷压杆的屈曲及后屈曲行为进行了分析. 基于杆的大变形理论, 考虑杆的轴向伸长, 建立了受均布载荷作用下细长压杆的几何非线性平衡方程. 采用打靶法和解析延拓法数值求解非线性两点边值问题, 得到了杆的后屈曲平衡路径和平衡构形.

关键词 数值计算, 打靶法, 后屈曲, 平衡路径

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0879(2010)03-041-03

NUMERICAL CALCULATION OF THE POST-BUCKLING CONFIGURATION OF A COLUMN UNDER DISTRIBUTED LOAD¹⁾

LI Qinglu²⁾ LI Shirong

(School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract The buckling and post-buckling behaviors of a column under distributed load are discussed in this paper. Based on the large deformation theory and considering the axial extension of the column, the equilibrium equations with geometric nonlinearity of an elastic column subjected to distributed load are established. By using shooting method and analytical continuation, the nonlinear boundary-value problem is solved numerically. The post-buckling configuration and equilibrium paths of the column are obtained.

Key words numerical calculation, shooting method, post-buckling, equilibrium path

引 言

弹性系统的振动和稳定性分析在工程实际中有着非常广泛的应用^[1-2]. 近年来, 国内外一些学者对弹性杆件在均布载荷作用下的稳定性问题进行了研究^[3-5]. 目前采用的静力平衡准则法判断原始直线状态杆件的平衡稳定性. 首先应给予杆件一个微小偏移, 使之呈现弯曲状态, 看其能否平衡. 若存在平衡状态, 则其处于平衡状态上的分岔点就是临界状态, 此时的载荷即为临界载荷. 而临界状态以后的行为, 属于压杆的后屈曲性质, 如果只采用线性理论则不能给出合理的说明. 细长压杆的后屈曲属于几何非线性问题.

1 控制方程

考虑一长为 l 的细长压杆, 杆在坐标原点处固

定, 顶端自由, 受均布载荷 q 的作用. 设水平轴和垂直轴分别为 y 轴和 x 轴, 且杆在后屈曲变形过程中, 载荷 q 的方向始终沿垂直方向 (如图 1). 记杆在

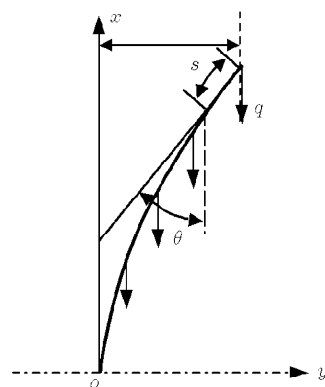


图 1 受均布载荷细长压杆变形示意图

2009-09-27 收到第 1 稿, 2009-12-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10872083, 10602021) 和教育部博士点基金 (200807310002) 资助项目.

2) 李清禄, 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为非线性力学. E-mail: lqu2008@163.com

未变形时的轴线为 $(x, 0)$, $x \in [0, l]$. 进入后屈曲状态后杆轴线仍在 $x-y$ 平面内, 且变形服从直线法假设, 由轴线可伸长杆的大变形理论^[6], 可得下列基本方程

几何方程

$$\frac{ds}{dx} = R, \quad \frac{du}{dx} = R \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = R \sin \theta$$

物理方程

$$N = EA(R - 1), \quad M = EA \frac{d\theta}{dx}$$

平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= -Rq, \quad \frac{dV}{dx} = 0 \\ \frac{dM}{dx} &= R(-H \sin \theta + V \cos \theta) \end{aligned}$$

其中, R 为轴线伸长率, θ 为弹性曲线的切线与 x 轴正向的夹角, H, V 分别为横截面上沿铅垂和水平方向的内力, M 为弯矩, A, I 分别为杆横截面的面积和惯性矩. 横截面的轴向内力 N 可表示为

$$N = -H \cos \theta - V \sin \theta$$

引入无量纲量

$$\begin{aligned} (X, S, U, W) &= (x, s, u, w)/l \\ (P_H, P_V) &= (H, V)l^2/EI \\ m &= Ml/EI, \quad Q = ql^3/EI \end{aligned}$$

可得下列无量纲控制方程

$$\frac{dS}{dX} = R, \quad \frac{dU}{dX} = R \cos \theta - 1 \tag{1}$$

$$\frac{dW}{dX} = R \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dX} = m \tag{2}$$

$$\frac{dP_H}{dX} = -RQ, \quad \frac{dP_V}{dX} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dm}{dX} = R(-P_H \sin \theta + P_V \cos \theta) \tag{4}$$

$$R = 1 - (P_H \cos \theta + P_V \sin \theta) \tag{5}$$

其中 $\lambda = l\sqrt{A/I}$ 为细杆的柔度.

对于图 1 所示细长杆, 相应的无量纲边界条件为

$$\left. \begin{aligned} S(0) = P_H(0) = P_V(0) = m(0) = 0, \quad \theta(0) = \beta \\ U(1) = W(1) = 0, \quad \theta(1) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

其中 β 为杆的自由端转角, 将它作为后屈曲控制参数. 这样杆在沿垂直方向的均布载荷 q 作用下的后屈曲问题就归结为在边界条件 (6) 下求解非线性常微分方程组 (1)~(5). 7 个基本未知量分别为 $S(X), U(X), W(X), \theta(X), P_H(X), P_V(X), m(X)$.

2 数值方法及结果

由于方程 (1)~(5) 是相互耦合的强非线性方程, 无法求得解析解. 这里采用打靶法求其数值解. 从分叉理论可知, 非线性边值问题 (1)~(5) 的线性化问题 ($\beta \rightarrow 0$) 的最小特征值 Q_{cr} 即为杆失稳的临界载荷. 当 $Q < Q_{cr}$ 时, 杆处于前屈曲状态; 当 $Q > Q_{cr}$ 时, 杆进入后屈曲状态. 方程 (1)~(5) 连续依赖于控制参数 β 的解可以通过解析延拓法获得, 从而可得后屈曲状态平衡路径或后屈曲状态全局解.

表 1 自由端转角 β 所对应的无量纲载荷参数 Q

β	0.001	30	60	90		
Q	7.840	7.854 ^[1]	7.837 ^[5]	8.049	8.724	10.042

数值计算时, 取相对误差为 10^{-6} . 表 1 给出了载荷作用下自由端转角 β 与后屈曲载荷参数 Q 的对应关系. 其中 $\beta = 0.001^\circ$ 时的载荷值为临界载荷, 与文献 [1,5] 的近似结果十分接近.

图 2 给出了柔度 $\lambda = 120$ 的杆在不同后屈曲载荷 Q 和固定端弯矩 m 下的后屈曲平衡构形 $(X+U, W)$. 图 3~图 6 给出了各物理量与无量纲载荷 Q 间的特征关系. 图 3 为固定端弯矩 m 与 Q 的变化曲线, 图 4 为自由端转角 β 与 Q 的变化曲线. 图 5 为自由端挠度即最大挠度 W_{max} 与 Q 的变化曲线, 从图中看出最大挠度先增大然后随着力的增加而减小. 图 6 给出了轴线无量纲伸长 $\delta = S(1) - 1$ 与载荷 Q 的关系. 这些曲线均可看作是杆在某种意义下的平衡路径, 从图中看出后屈曲变形在增大的过程中各物理量都和载荷成明显的非线性.

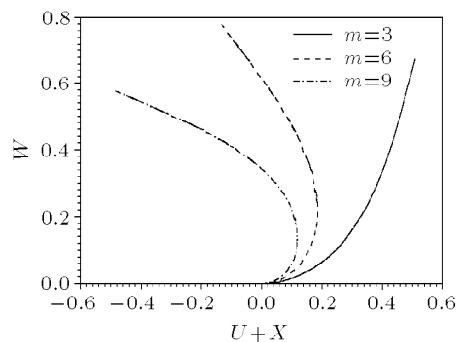
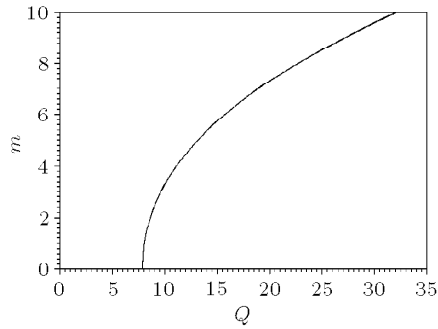
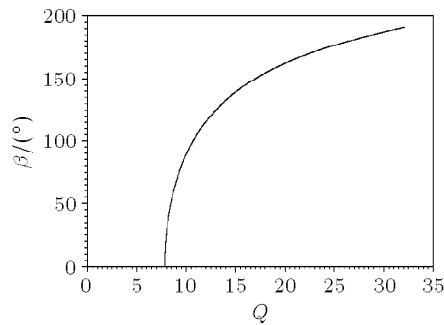
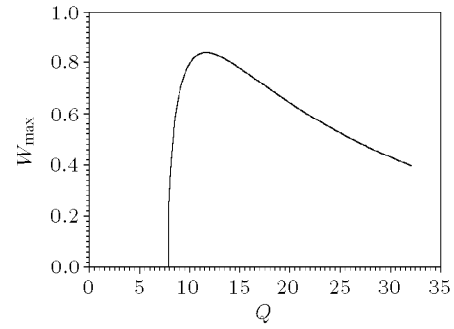
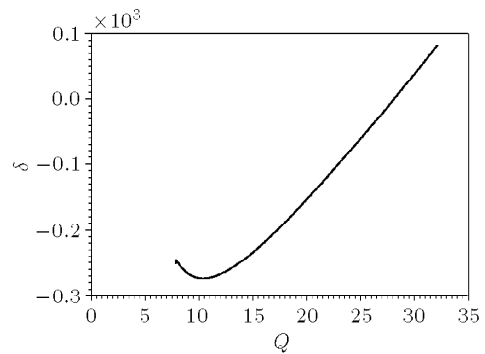


图 2 固定端弯矩 m 值对应的过屈曲平衡构形

图 3 固定端弯矩 m 与载荷 Q 的特征曲线图 4 自由端转角 β 与载荷 Q 的特征曲线图 5 最大挠度 W_{\max} 与载荷 Q 的特征曲线图 6 轴线无量纲伸长 δ 与载荷 Q 的特征曲线

3 结 论

基于轴向可伸长杆的几何非线性理论,建立了受沿垂直方向的均布载荷作用细长杆弹性后屈曲问题的数学模型. 由于截面的水平和铅垂内力均为轴线坐标的函数,从而加大了问题的求解难度;另外还考虑了轴线伸长,使得变形后的轴线弧长为基本未知量之一,从而导致了控制方程的强非线性,无法获得解析解. 采用打靶法数值求解所得边值问题的后屈曲解,给出了压杆失稳后的几何形态和载荷之间的关系曲线. 这些曲线都可看作是杆在某种意义下的平衡路径. 结果表明,后屈曲平衡路径是载荷的单调函数并呈现明显的非线性.

参 考 文 献

- 1 Leipholtz H. Stability of Elastic Systems. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980
- 2 武际可, 苏先樾. 弹性系统的稳定性. 北京: 科学出版社, 1994 (Wu Jike, Su Xianyue. Stability of Elastic Systems. Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese))
- 3 刘延柱. 压杆失稳与 Liapunov 稳定性. 力学与实践, 2002, 24(4): 56~59 (Liu Yanzhu. Column instability and Liapunov stability. *Mechanics and Practice*, 2002, 24(4): 56~59 (in Chinese))
- 4 Shvartsman BS. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 304: 969~973
- 5 刘洋, 杨永波, 梁枢平. 轴向均布载荷下压杆稳定问题的 DQ 解. 力学与实践, 2005, 27(2): 44~46 (Liu Yang, Yang Yongbo, Liang Shuping. The DQ solution of buckling of column under axial loading. *Mechanics and Practice*, 2005, 27(2): 44~46 (in Chinese))
- 6 程昌钧, 朱正佑. 结构的分叉与屈曲. 兰州: 兰州大学出版社, 1991 (Cheng Changjun and Zhu Zhengyou. Bifurcation and Bucking of Structures. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1991 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)