MATLAB 在运动学中的应用

阙文彬 [1)] 李 彤 叶纯杰

(华东理工大学机械与动力工程学院，上海 200237)

摘要 仿真处理了著名的 PASCAL 摆线问题，并求解了摆线的运动学参数 (以矩阵形式输出)；仿真一个很难凭空想象其绝对运动轨迹的点的合成运动，并用编制的通用程序探索它的美妙轨迹；仿真了椭圆尺规机构的运动过程. 仿真结果可作为教学演示，使抽象的力学生动活泼起来.

关键词 运动学， MATLAB, 摆线，点的合成运动，曲尺规

中图分类号： TH113.1 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2010)03-118-03

在学习理论力学的过程中，有些力学系统的运动轨迹很难想象，而用手工的方式求出其各动力学参数也很费事，本文从教学实践中发现问题，运用高效的科学计算工具 MATLAB 对力学的可视化 (visualization of mechanics) 做了一些积极的探索，致力于更好地理解、研究和欣赏力学.

1 摆线的 MATLAB 动画演示及运动学参数求解

1.1 问题提出

如图 1 示，半径为 r 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动，轮子绕轮轴的角速度为 ω, 轮子的转角 $\phi = \omega t$, 选定轮子上的一点 S(初始时刻， S 与坐标原点 O 重合), 轮子滚动的过程中 S 点的轨迹如何，速度、加速度如何？

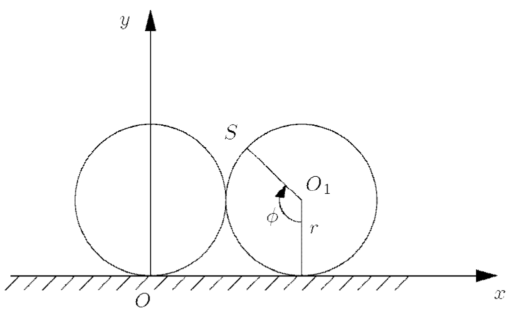

图 1 摆线问题

1.2 问题分析

第 1, 假定轮心坐标为 $O_1(x_0(t), r)$ ，那么滚轮的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} u_t &= x_0(t) + r\cos t \\ w &= r + r\sin t \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

取不同的 t 值 (t 从 0 至 2π ，取值间隔为 0.2π) ，按参数方程画出这些时刻轮子的图像，每画一个就放入动画矩阵 M, 动画矩阵存完后，调用命令 movie(M, n) 就可以播放 n 遍该滚动过程.

第 2, 为求摆线的轨迹需要求出它的参数方程，根据分析，得到参数方程如下

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r(t - \sin t) \\ y_1 &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由上式对 t 求导可以算出摆线速度和加速度方程，我们可以运用 MATLAB 的符号求解功能来求出.

第 3, 有了摆线的位置，速度，加速度的符号解析表达式，对符号表达式数值化.

第 4, 做出摆线轨迹图调用 plot 函数；速度，加速度则调用 quiver 函数就能方便地做出.

第 5, 将位置，速度，加速度值存入矩阵 baixian_result 矩阵中并输出给用户.

1.3 运行实例

调用程序，以 $r = 1$ 为例，运行完程序后可以得到摆线的速度及加速度值，存入 baixian_result 矩阵中.

baixian result =

0	0	0	0	0	1.0000
0.0071	0.0606	0.0606	0.3429	0.3429	0.9394
0.0558	0.2352	0.2352	0.6442	0.6442	0.7648
0.1826	0.5024	0.5024	0.8674	0.8674	0.4976
0.4146	0.8300	0.8300	0.9854	0.9854	0.1700
0.7660	1.1782	1.1782	0.9840	0.9840	-0.1782
1.2368	1.5048	1.5048	0.8632	0.8632	-0.5048
1.8122	1.7702	1.7702	0.6378	0.6378	-0.7702
2.4650	1.9422	1.9422	0.3350	0.3350	-0.9422
3.1584	2.0000	2.0000	-0.0084	-0.0084	-1.0000
3.8508	1.9365	1.9365	-0.3508	-0.3508	-0.9365
4.5006	1.7594	1.7594	-0.6506	-0.6506	-0.7594
5.0716	1.4903	1.4903	-0.8716	-0.8716	-0.4903
5.5368	1.1617	1.1617	-0.9868	-0.9868	-0.1617
5.8825	0.8135	0.8135	-0.9825	-0.9825	0.1865
6.1089	0.4879	0.4879	-0.8589	-0.8589	0.5121
6.2313	0.2244	0.2244	-0.6313	-0.6313	0.7756
6.2771	0.0550	0.0550	-0.3271	-0.3271	0.9450

图 2 速度、加速度矩阵

矩阵中列依次代表位移横、纵坐标；速度 x, y 轴分量；加速度 x, y 轴分量，均为国际单位.

滚轮动画，摆线绝对运动轨迹、速度、加速度图如图 3 所示.

2008–05–15 收到第 1 稿， 2008–12–02 收到修改稿.

1) 阙文彬，硕士研究生，主要研究方向为机械动力学、机构学. E-mail: rousseaou@163.com

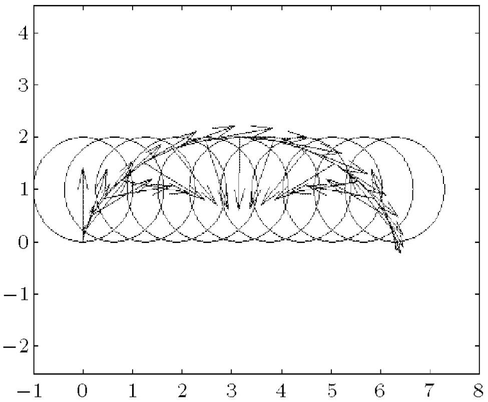

图 3　摆线的绝对运动轨迹、速度、加速度

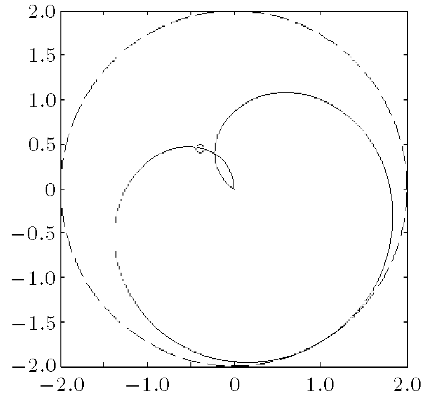

图 5　心形的绝对运动轨迹

也可以输入不同的值看看会得到什么样的结果.

2　点的合成运动的绝对运动轨迹某个实例的研究

2.1　问题提出

点 M 相对于动系 $Ox'y'$ 沿半径为 r 的圆周以速度 v 作匀速圆周运动 (圆心为 O_1)，动系 $Ox'y'$ 相对于定系 Oxy 以匀角速度 ω 绕点 O 作定轴转动, 初始时 $Ox'y'$ 与 Oxy 重合, 点 M 与点 O 重合 (图 4). 讨论 M 点的绝对运动轨迹.

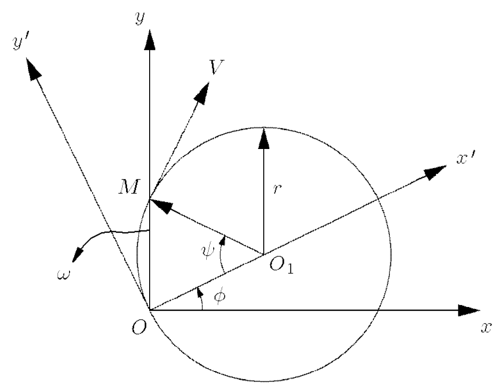

图 4　点的合成运动实例

2.2　问题分析

由运动学分析不难得到 M 点的绝对运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\left(1-\cos\frac{vt}{r}\right)\cos\omega t - r\sin\frac{vt}{r}\sin\omega t \\ y &= r\left(1-\cos\frac{vt}{r}\right)\sin\omega t + r\sin\frac{vt}{r}\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

即便得到了一个精确的解析表达式, 但是它并不像通常的参数方程那样好理解. 点的相对运动和它所在的动系的牵连运动易于理解, 而这两种运动合成以后却是一个复杂的, 很难想象的运动.

现在, 可以编写通用 MATLAB 程序来研究这个运动轨迹, 而且可以动画模拟整个运动过程.

2.3　运行实例

编制好通用程序后, 可以调用该程序来探究式 (3) 的轨迹. 调用程序, 任意输入参数可以观察动画和绝对运动轨迹.

当 $\omega=2$, $r=1$, $v=1.2$ 时的绝对运动轨迹与动画截图如图 5 所示 (运动方向：逆时针), 出现了一个美丽的心形.

3　曲尺规和椭圆迹线问题

3.1　问题提出

如下图 6 所示，曲线规尺的各杆长为 $OA=AB=200\,\mathrm{mm}$, $CD=DE=AC=AE=50\,\mathrm{mm}$. 如杆 OA 以等角速度 $\omega=\dfrac{\pi}{5}\,\mathrm{rad/s}$ 绕 O 轴转动, 并且当运动开始时, 杆 OA 水平向右. D 点上装了一支笔, 问笔的运动轨迹如何.

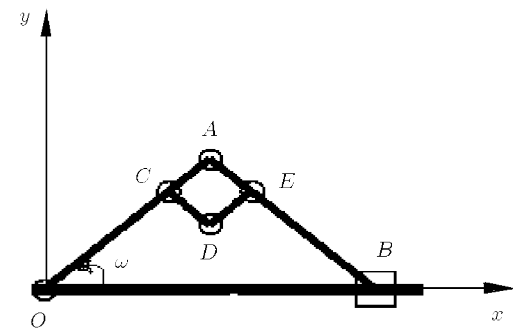

图 6　曲尺规问题

正如上两个问题所一直使用的方法, 确立每一个关键点的运动方程式, 如下

A 点：$\begin{cases} x_A = OA\cdot\cos\varphi \\ y_A = OA\cdot\sin\varphi \end{cases}$

C 点：$\begin{cases} x_C = OC\cdot\cos\varphi \\ y_C = OC\cdot\sin\varphi \end{cases}$

D 点：$\begin{cases} x_D = x_A = OA\cdot\cos\varphi \\ y_D = (OA-2AC)\cdot\sin\varphi \end{cases}$

B 点：$\begin{cases} x_B = 2\cdot OA\cdot\cos\varphi \\ y_B = 0 \end{cases}$

E 点：$\begin{cases} x_E = x_A + AC\cdot\cos\varphi \\ y_E = y_C = OC\cdot\sin\varphi \end{cases}$

3.2 程序运行

编制并调用程序，根据提示输入题目所要求的参数，也可以自行确定研究数据．输入完毕后，程序开始仿真演示．

图 7 所示正在绘制 D 点运动轨迹，坐标轴的单位为 m.

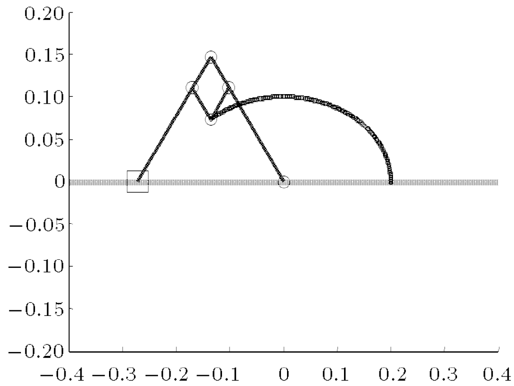

图 7 正在动画模拟

从图 8 可以明显地看出 D 点的轨迹是一个椭圆迹线．运用力学的原理，推导了各点的运动方程，但其表示的运动轨迹并不直观．结合 MATLAB 使得这一过程非常形象，加深了我们对于力学的理解．

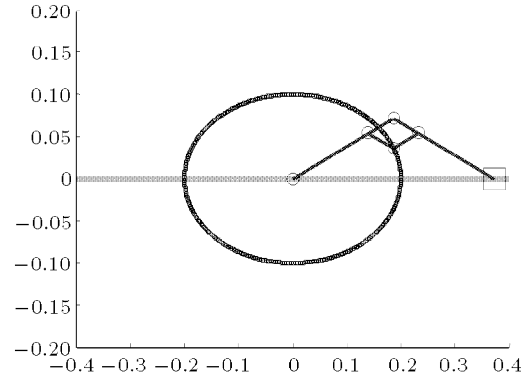

图 8 模拟完成

4 结 论

本文从教学中发现问题，将力学分析作为依据和主导，用 MATLAB 仿真处理了摆线问题，点的合成运动一个实例和椭圆尺规机构．本文所有程序均可作为教学演示，使抽象的力学生动活泼起来．

参 考 文 献

1 哈尔滨工业大学理论力学教研室．理论力学 (第 6 版)．北京：高等教育出版社， 2002

2 王沫然． MATLAB 与科学计算 (第 2 版)．北京：电子工业出版社， 2003

(责任编辑：刘俊丽)

两个自由度的单质点体系自振频率及振型计算

刘书智 1)

(内蒙古科技大学建筑与土木工程学院，包头 014010)

摘要 对于具有两个自由度的单质点体系自由振动，先假定一个振动方向，求出该振动方向的柔度系数，对柔度系数求极值，满足柔度极大值的方向即是第 1 振型方向，由振型正交性原理可确定第 2 振型．由此将两个自由度体系的计算变成了单自由度体系的计算，根据求出的柔度系数，可方便地求出自振频率．

关键词 自振频率，振型，柔度系数，自由度

中图分类号： TU 311.3 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2010)03-120-02

1 问题的提出

具有两个自由度体系的单质点自由振动计算是多质点体系自由振动的一种特殊情况，教科书里一般把它当作两个自由度体系按一般方法计算其自振频率及振型．具有两个自由度的单质点体系，质点运动过程中任一时刻的位置需要两个独立几何参数来确定具有两个自振频率以及相应振型．学生在学习该内容时，有时误认为两个振型分别是水平振动和竖向振动. 实际上对某一振型而言, 它是沿着某一个方向振动, 如果能预先确定振动方向，就相当于变原体系为单自由度体系，其自振频率及振型问题便迎刃而解．

2 振型的确定

第 1 振型往往是最容易出现的振型，其沿着最大柔度的方向. 如图 1 所示结构 [1], 质点 M 具有两个自由度, 假定振动沿着 θ 方向 (θ 为未知量)，求 θ 方向的柔度系数 $\delta(\theta)$，满足极值条件的柔度系数为 $\delta^*(\theta)$，则自振频率 (圆频率)

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{M\delta^*(\theta)}} \tag{1}$$

2009–07–21 收到第 1 稿， 2009–12–25 收到修改稿．

1) 刘书智，男，副教授，主要从事建筑结构的教学与科研工作． E-mail nkdlsz@sina.com