

# 量子规范场论与三代夸克、轻子质量经验公式

游阳明 张学龙\* 王炳章 石会萍

( 沧州师范专科学校, 沧州 061001; 上海理工大学医疗器械学院, 上海 200093. \* 联系人, E-mail: xuelongz@yahoo.com.cn)

**摘要** 较为详细地讨论了三代夸克与带电轻子静止质量之间由基本物理常数决定的数学关系. 由规范场理论出发, 从理论上对三代夸克与轻子质量的经验公式进行了分析. 其结果表明, 由几个物理常数组合的经验公式计算的夸克、轻子质量值与理论估算值较为一致. 由夸克、带电轻子质量经验公式计算的结果也与实验数据相吻合, 揭示了  $m_e, m_\mu, m_\tau$  及  $m_q$  之间的内在联系. 同时也给出了中微子质量公式, 对于中微子质量, 目前人们也仅仅知道他们质量平方差, 因而对他们质量的理论估计有一定意义.

**关键词** 轻子 夸克 G-W-S模型 SU(5)模型 SO(10)模型 混沌

量子规范场理论是粒子物理、天体物理等学科研究的基础理论. 文献[1]通过对一些物理常数的考察和对比, 猜出了几个物理常数组合的等式, 这几个经验公式有一定意义. 在此基础上, 我们探讨三代带电轻子静止质量之间由基本物理常数决定的数学关系, 从理论上分析三代轻子与夸克质量的经验公式, 给出了中微子质量公式. 由夸克、带电轻子质量经验公式计算的结果与实验数据相符.

## 1 $m_\mu$ 和 $m_\tau$ 的计算

$\mu$  子的衰变方式为

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e. \quad (1)$$

$\mu$  子衰变属弱相互作用的纯轻子过程, 按照 V-A 理论  $\mu$  子衰变的哈密顿量为 [2,3]

$$H_W = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\mu^-}] [\bar{\psi}_{e^-} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\bar{\nu}_e}], \quad (2)$$

其中  $\bar{\psi}_{\nu_\mu}, \psi_{\mu^-}, \bar{\psi}_{e^-}, \psi_{\bar{\nu}_e}$  为四费米场算符,  $G$  为耦合常数. 由于弱相互作用比电荷作用还弱得多, 因而只需讨论到  $S_1$  即可. 与此相应的  $S$  矩阵

$$S = \sum_n S_n = T \left\{ \exp \left[ -i \int H_1(x) dx \right] \right\}, \quad (3)$$

$$\tau_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu} = \frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5} (G = 1.166389 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}). \quad (4)$$

将实验值  $\tau_\mu = (2.197120 \pm 0.00047) \times 10^{-6} \text{ s}$  代入 (4) 式可得到  $\mu$  子的质量

$$m_\mu = 105.659324 \text{ MeV}.$$

同样  $\tau$  子的衰变方式为

$$\tau \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau. \quad (5)$$

类似  $\mu$  子质量式的推导过程, 并考虑到  $\tau$  子衰变成电子、中微子和反中微子的分支比是  $0.1784 \pm 0.0005$ ,

由  $\tau_\tau = 1/\Gamma_\tau = \frac{1}{(G_F^2 m_\tau^5 / 192\pi^3)} \times (0.1784 \pm 0.0005)$  可近似得到  $\tau$  子质量

$$m_\tau^5 = \frac{192\pi^3}{G_F^2 \tau_\tau} \times (0.1784 \pm 0.0005). \quad (6)$$

将实验值  $\tau_\tau = (2.906 \pm 0.0010) \times 10^{-13} \text{ s}$  代入, 便可得到  $m_\tau = 1777.2114 \text{ MeV}$ .

由理论计算出的  $m_\mu, m_\tau$  与用物理常数凑出的经验公式的计算结果一致 [4], 均与实验数据相吻合 [4].

从更严格的相互作用的规范理论中也能找到  $m_\mu, m_\tau, m_e$ . 在 V-A 理论上建立的 Weinberg-Salam 模型 [3,5] 有

$$L = -f_e (\bar{e}_R \phi^+ \psi_L^e + \bar{\psi}_L^e \phi e_R) - f_\mu (\bar{\mu}_R \phi^+ \psi_L^\mu + \bar{\psi}_L^\mu \phi \mu_R) - f_\tau (\bar{\tau}_R \phi^+ \psi_L^\tau + \bar{\psi}_L^\tau \phi \tau_R). \quad (7)$$

由 (7) 式可得到电子、 $\mu$  子和  $\tau$  子的质量

2007-03-27 收稿, 2007-11-22 接受

国家自然科学基金(批准号: 50074030)和上海市教委自然科学基金资助项目(编号: 03SK03)

$$\begin{cases} m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} f_e v, & m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} f_\mu v, & m_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} f_\tau v, \\ f_e = (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{G} m_e \approx 2 \times 10^{-6}, \\ f_\mu = (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{G} m_\mu \approx 4 \times 10^{-4}, \\ f_\tau = (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{G} m_\tau \approx 7 \times 10^{-2}. \end{cases} \quad (8)$$

其中  $f_e, f_\mu, f_\tau$  为 Higgs 粒子与轻子的耦合常数,

$$v = \left( \frac{1}{\sqrt{2} G_F} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

## 2 $m_e, m_\mu, m_\tau$ 质量经验公式

通过唯象理论分析, 可发现参加弱相互作用的  $e, \mu, \tau$  质量间存在着一种特殊关系, 而这种关系可用一些物理常数来联系, 即可得到一个近似公式 [4]

$$\frac{m_l}{m_e} = \frac{(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi\alpha)^l} \left( \frac{1}{\delta\alpha} \right)^{\frac{l+1}{3}}. \quad (10)$$

此式出现的独立参数只有 2 个, 即  $m_e$  和  $\alpha, \delta$  参数是可以由参数  $\alpha$  决定的, 其中  $\alpha$  为精细结构常数,  $\delta$  为混沌理论中的费根鲍姆常数. 二者之间存在着简单关系,  $1/\alpha = 2\pi \cdot \delta^2$ . 他们的物理意义还不清楚, 只有更深层次的研究才可以给出答案.

考虑到(10)式中除  $m_e$  外, 只有  $m_1$  和  $m_2$  这两个质量数, 故约定(10)式中的  $l = 1, 2$ . 代入相关的数据, 可得

$$\begin{aligned} l=1, \dots, \frac{m_1}{m_e} &= 206.7619, m_1 = 105.655 \text{ MeV}, \text{ 即 } m_1 = m_\mu. \\ l=2, \dots, \frac{m_2}{m_e} &= 3477.465, m_2 = 1776.981 \text{ MeV}, \text{ 即 } m_2 = m_\tau. \end{aligned}$$

而  $m_\mu$  和  $m_\tau$  的实验值分别为 105.65889 MeV 和 1776.9 ± 0.5 MeV, 可见由(10)式计算出的  $m_\mu$  和  $m_\tau$  与实验结果符合的非常好. 现有的高能物理实验证明, 第四代轻子不可能存在(17.7 MeV 的预言已被实验否定), 因此  $l$  只能取 1 和 2, 即  $l = 1, 2$  是正确的.

根据(4)式和(6)式计算

$$\begin{aligned} \frac{M_\mu}{m_e} &\approx 207.17, \\ \frac{M_\tau}{m_e} &\approx 3485.33. \end{aligned}$$

与(10)式计算, 可得

$$\frac{m_1}{m_e} = \frac{m_\mu}{m_e} = 206.762,$$

$$\frac{m_2}{m_e} = \frac{m_\tau}{m_e} = 3477.47.$$

比较可知, 由公式计算结果与实验数据计算出的结果相当吻合. 由 G-W-S 模型中的(8)式计算

$$\frac{M_\mu}{m_e} \approx 2 \times 10^2,$$

$$\frac{M_\tau}{m_e} \approx 3.5 \times 10^3,$$

与实验也非常一致. 因此可以断言(10)式是正确的, 由(10)式经计算可推出

$$m_e + m_\mu + m_\tau = 2(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} m_p. \quad (11)$$

这种奇巧的数量关系由简单的两个基本物理常数  $\alpha, \delta$  来联系, 只能说明参与弱相互作用的电子  $e, \mu$  子、 $\tau$  子具有非常相同的物理性质, 或者说弱相互作用将它们联系在一起, 因而它们的质量之间就存在着一种确定的数学关系. 虽然轻子与质子是属于不同结构层次的粒子, 但对揭示三代带电轻子质量序列的形成或许有所启发.

## 4 $m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t$ 的估算

目前 Higgs 质量不能确定, 但通过 QCD 和 G-W-S 理论可得 Fermion 质量为

$$\begin{cases} m_e = \frac{f_e}{\sqrt{2}} v, m_u = \frac{f_u}{\sqrt{2}} v, m_d = \frac{v}{\sqrt{2}} (f_d \cos \theta_c - f'_d \sin \theta_c), \\ m_c = \frac{f_c}{\sqrt{2}} v, m_s = \frac{v}{\sqrt{2}} (f_s \cos \theta_c - f'_s \sin \theta_c), \\ m_t = \frac{f_t}{\sqrt{2}} v, m_b = \frac{v}{\sqrt{2}} (f_b \cos \theta_c - f'_b \sin \theta_c). \end{cases} \quad (12)$$

由此计算出的 6 种夸克与实验观测值基本相符, 同样也可以得到  $m_q = f^{(q)} \frac{v}{\sqrt{2}}$  的关系式(其中  $v$  是 Higgs 二重态的真空期望值),  $f^{(q)}$  与  $m_q$  具有相同的性质. 换句话说  $m_q$  与  $f^{(q)}$  成正比, 亦即

$$m_q \propto G_q v, \quad (13)$$

式中  $G_q$  为 Higgs 场与 Quark 相互作用的耦合常数. 通过分析计算, 可得到

$$m_q = f(\delta \cdot g_s \cdot C \cdot G_F). \quad (14)$$

(12)式中的参量均能通过一系列常数将他们联系起来

来, 比如,

$$\begin{cases} \alpha_s(\mu^2) = g^2(\mu^2)/4\pi, G_F = g^2/4\sqrt{2}M_W^2 = 10^{-5}/m_p^2, \\ e^2 = 4\pi/137, e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w, \\ M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v = \frac{M_w}{\cos \theta_w}, \\ M_w = \left(\frac{\pi\alpha}{8G_F}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin \theta_w}. \end{cases} \quad (15)$$

由 W-S 标准模型我们容易得到

$$\begin{aligned} f^{(c)}/f^{(b)}/f^{(t)} &= 1 \times 10^{-3}/2 \times 10^{-2}/6 \times 10^{-1}, \\ f^{(e)}/f^{(\mu)}/f^{(\tau)} &= 2.3 \times 10^{-6}/4.5 \times 10^{-4}/8.2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

这说明轻子之间质量公式有一定的数量关系, 重夸克之间也应当有确定的数量关系. 同时也说明 Higgs 质量不仅影响着代轻子的质量, 也影响着代夸克质量, 因此 G-W-S 模型有它的局限性, 超对称 SU(5) 模型中的结论会更优越 [6,7]. 由(12)式可知

$$m_q = G_H v, \quad (16)$$

其中  $v$  是 Higgs 场的真空期望值,  $G_H$  是 Higgs 场与夸克  $q$  相互作用耦合常数, 由于 Higgs 质量不确定, 目前还得不到. 我们只能根据 Fermion 质量来说明下面的公式

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{m_{l'}}{1+\alpha_s} \frac{1}{n^3} \left(\frac{\sqrt{n}}{\alpha_s}\right)^n, \\ m'_n &= \frac{m_{l'}}{(1+\alpha_s)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^5} \left(\frac{\sqrt{n}}{\alpha_s}\right)^n. \end{aligned} \quad (17)$$

上式出现的独立参数有 4 个, 即  $m_e, m_\mu, m_\tau, \alpha_s$ , 其中强相互作用耦合常数  $\alpha_s = g^2(\mu^2)/4\pi$ . 这里  $l' = e', \mu', \tau'$  分别对应代数量子数  $n = 1, 2, 3$ . 由 G-W-S 标准模型出发, 将(15)式中的物理常数通过(12)式可以推出

$$m_n = \alpha f(\alpha_s), \quad m'_n = f(\alpha_s),$$

$m_q$  与  $\alpha_s$  有关, 这无疑是正确的.

根据量子规范场理论得到的结果 [5,8-10],  $\frac{m_b}{m_c} \approx 3$ ,

$\frac{m_d}{m_s} \approx 0.042, \frac{m_u}{m_d} \approx 0.47, m_c = 1.8 \text{ GeV}, m_b \approx 5 \text{ GeV}, m_s = 150 \sim 300 \text{ MeV}, m_t \approx 170 \text{ GeV}$  与(17)式计算出的结果和目前实验结果基本上不矛盾. (注意, 计算时取

$\sin \theta_w = 0.22, \alpha_s(M) = 0.12 + 0.01$ , 并令在标高能下 Higgs 质量  $m_H = 333.333 \text{ GeV}$ ), 通过计算圈图(单圈修正), 破坏的幅度也很小, 只有 0.1%. 根据 Dirac 在数学研究方法上的思想: ( ) 消除不一致性; ( ) 把先前互不相关的理论统一起来. 我们应用混沌理论(相变理论)[7,11]综合分析, 这其中轻夸克的质量是在 2 GeV 的能标上定义的, 重夸克的质量则是在 266.667 GeV 的能标上定义的, 通过关于对称性破缺的初步讨论的工作(非线性方程数值计算), 可证明(17)式具有正确性, 但必须含有混沌理论的常数  $\delta$ . 即

$$\begin{aligned} m_n &\approx \frac{m_{l'}}{1+\alpha_s} \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{2\delta}{3\pi}}\right)^n, \\ m'_n &\approx \frac{m_{l'}}{\left(1+\alpha_s \frac{2\delta}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^5} \left(\frac{\sqrt{n}}{2\alpha_s \frac{2\delta}{3\pi}}\right)^n, \\ \frac{m_l}{m_e} &= \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\alpha)^l} \cdot \left(\frac{1}{\delta\alpha}\right)^{\frac{l+1}{3}}. \end{aligned} \quad (18)$$

式中出现的独立参数只有 5 个, 即  $m_e, m_\mu, m_\tau, \delta, \alpha_s$ , 其中  $n = 1, 2, 3, m_n$  分别对应夸克( $u, c, t$ )的质量;  $m'_n$  分别对应夸克( $d, s, b$ )的质量;  $l = 1, 2, m_l$  分别对应着轻子( $\mu, \tau$ )的质量.

关于中微子带有质量的讨论早在 20 世纪 80 年代就有了几种方案, 至今没有定论. 宇宙学中的结论不能令人接受. 在规范场理论中, 可以用不同的方案容纳有质量的中微子 [5]. 在 W-S 模型中加入一个右手手中微子  $\gamma_R$ , 他可以有如下的汤川耦合

$$-f_v \bar{l}_l \tilde{\phi}_{\nu_R} + \text{h.c.}, \quad (19)$$

$$m_\nu \bar{\nu}_l \nu_R + \text{h.c.} = \frac{v}{\sqrt{2}} f_\nu \bar{\nu}_l \nu_R + \text{h.c.}, \quad (20)$$

$\phi$  的真空平均值使得中微子获得质量项. 当  $H_s$  是描述强弱电磁相互作用大统一理论 SO(10) 模型的一部分时, 中微子获得质量. 如果中微子带有 Majorana 粒子的性质后, 则轻子数不守恒. 通过理论分析(See-Saw 机制)和猜想可得到一个中微子质量公式, 即

$$m_{\nu_n} = \left(\frac{2\pi\delta\alpha}{1-\delta\alpha}\right)^{n+1} \frac{m_{l'}}{m_e} \frac{2\sqrt{3}}{3} (2\delta\alpha)^{n/3}, \quad (21)$$

其中  $n = 1, 2, 3$ , 分别对应着轻子 ( $e, \mu, \tau$ );  $m_{\nu_e} = 0.02653 \text{ eV}$ ,  $m_{\nu_\mu} = 0.58293 \text{ eV}$ ,  $m_{\nu_\tau} = 0.98747 \text{ eV}$ . 此结果与理论预言相符. 因中微子不参加强相互作用, 只有电弱修正, 否则至少到高圈图才有贡献(大概得到3圈图), 即不必考虑高圈图的贡献. 做圈图修正是可以的, 但自能图有发散, 结果依赖重整化方案. 当然对带电轻子, 由于有测量值, 可用在壳重整化, 但由于中微子的质量到今天也未测准, 就很难确定到辐射部分. 由自能图较容易得到  $\frac{1}{1-\alpha K}$  项的存在, 公式的详细推证将另文给出.

致谢 本研究工作得到了南开大学物理科学学院博士生导师李学潜教授的热情鼓励和多次细心指导, 北京大学教授高崇寿先生也曾对一些关键问题给予原则性指导, 在此表示衷心的感谢; 同时也对陕西南郑易兆雄先生提供的早期研究成果和热情鼓励表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- 1 易兆雄. 关于三代夸克和轻子质量关系的猜想. 现代物理知识, 2000, 20: 41—42
- 2 周凌云, 王瑞丽, 吴光敏. 非线性物理理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2000. 143—146
- 3 章乃森. 粒子物理学(下). 北京: 科学出版社, 1987. 149—265
- 4 Yao W M, Amsler C, Asner D, et al. Particle data groups. J Phys G, 2006, 33: 33—532
- 5 戴元本. 相互作用的规范理论. 北京: 科技出版社, 1987. 392—517
- 6 Jang X D, Zhou X J. Finite  $N = 1$  super symmetric theories of  $SU(n)_1$ . Phys Lett B, 1987, 197: 156—160[DOI]
- 7 Gell-Mann M, Ramond P, Slansky S. In: Supergravity. Amsterdam: North Holland, 1979. 315—321
- 8 曹昌祺. 量子规范场论. 北京: 高等教育出版社, 1990. 375—396
- 9 Ramond P, Ross G G. Constraints on higgs couplings from axionatics. Phys Lett B, 1979, 81: 61—64
- 10 Kim J E. Weak-interaction singlet and strong CP invariance. Phys Rev Lett, 1979, 43: 103—107
- 11 侯德富, 王恩科, 李家荣, 等. 有效势的改进计算和 Higgs 模型的对称性恢复相变. 科学通报, 1994, 39(19): 1746—1748