

# 点群 6 一维六方准晶狭长体中 有限长 Griffith 裂纹的反平面问题\*

施志昱 刘官厅

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(E-mail: yelzine@163.com)

**摘 要** 利用复变函数法, 通过构造新的保角变换, 研究了裂纹面受剪切作用下点群 6 一维六方准晶狭长体中有限长 Griffith 裂纹的断裂行为, 得到了裂纹尖端处应力强度因子的解析解. 当狭长体高度趋于无穷时, 该解析解退化为无限大点群 6 一维六方准晶中有限长 Griffith 裂纹问题的解.

**关键词** 点群 6 一维六方准晶狭长体; 有限长 Griffith 裂纹; 保角变换; 应力强度因子; 解析解

**MR(2000) 主题分类** 62G05; 62N01

**中图分类号** O212.7

## 1 引言

准晶是于 1984 年发现的一种既不同于晶体, 也不同于非晶体的新的固体结构和新材料, 它是一种具有准周期长程平移对称性和长程取向对称性的固体. 准晶的独特性质使准晶具有潜在的应用价值, 而准晶材料内部不可避免含有一定的结构缺陷, 所以自准晶发现以来, 关于含缺陷的准晶的断裂问题受到国内外许多研究者的关注, 得到了一些重要成果<sup>[1-4]</sup>. 关于准晶中裂纹问题的研究, 前人多集中在点群 6mm 一维六方准晶<sup>[5-8]</sup>, 且对于准晶狭长体中裂纹问题的研究, 裂纹多为无限长直裂纹的情形<sup>[9,10]</sup>, 实际问题中缺陷还常常会遇到有限长直裂纹的情形, 对于准晶狭长体中有限长直裂纹的问题目前尚无相关报道. 本文利用复变函数方法, 通过构造新的保角变换, 研究了点群 6 一维六方准晶狭长体中有限长 Griffith 裂纹的断裂问题, 得到了裂纹尖端处应力强度因子的解析解.

本文 2011 年 5 月 30 日收到, 2012 年 5 月 4 日收到修改稿.

\* 国家自然科学基金 (10761005) 和内蒙古自然科学基金 (2009MS0102) 资助项目

## 2 点群 6 一维六方准晶弹性问题的基本理论

取一维准晶准周期方向为坐标轴  $x_3$ , 垂直于准周期方向的平面为坐标平面  $x_1 - x_2$ , 建立空间直角坐标系. 用  $u_1, u_2, u_3$  表示声子场位移分量,  $w$  表示相位子场位移分量, 用

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{ij}, w_{3j}] &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, w_{31}, w_{32}, w_{33}], \\ [\sigma_{ij}, H_{3j}] &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}, H_{31}, H_{32}, H_{33}] \end{aligned}$$

表示声子场和相位子场的应变及应力分量. 根据 [5] 一维准晶弹性问题的广义虎克定律可表示为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + R_{ij3l}w_{3l}, \\ H_{3j} = R_{kl3j}\varepsilon_{kl} + K_{3j3l}w_{3l}, \end{cases} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1)$$

其中,  $C_{ijkl}$  与  $K_{3j3l}$  分别为声子场与相位子场的独立弹性常数,  $R_{ij3l}$  表示声子场与相位子场耦合的独立弹性常数. 不计体力的静平衡方程为

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} = 0, & \partial_1\sigma_{21} + \partial_2\sigma_{22} + \partial_3\sigma_{23} = 0, \\ \partial_1\sigma_{31} + \partial_2\sigma_{32} + \partial_3\sigma_{33} = 0, & \partial_1H_{31} + \partial_2H_{32} + \partial_3H_{33} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad w_{3j} = \partial_j w, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

这里利用了张量记号, 且  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ . 方程 (1)–(3) 就是一维准晶弹性问题的基本方程.

引入紧缩张量记号  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ , 且记

$$\begin{aligned} K_{3131} &= K_1, & K_{3232} &= K_2, & K_{3333} &= K_3, & K_{3132} &= K_4, \\ R_{1133} &= R_1, & R_{2233} &= R_2, & R_{3333} &= R_3, & R_{2331} &= R_4, \\ R_{2332} &= R_5, & R_{3131} &= R_6, & R_{3132} &= R_7, & R_{1233} &= R_8. \end{aligned}$$

对于点群 6 一维六方准晶, 有如下关系成立:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}, & C_{13} &= C_{23}, & C_{44} &= C_{55}, & 2C_{66} &= C_{11} - C_{12}, & C_{16} &= C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0, \\ K_1 &= K_2, & K_4 &= 0, & R_1 &= R_2, & R_5 &= R_6, & R_4 &= -R_7, R_8 = 0, \end{aligned}$$

所以点群 6 一维六方准晶的非零独立弹性常数为 11 个:  $C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{44}, K_1, K_3,$

$R_1, R_3, R_4, R_6$ . 因此得点群 6 一维六方准晶的广义虎克定律

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + R_3 w_{33}, \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_4 w_{31} + R_6 w_{32}, \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} - R_4 w_{32} + R_6 w_{31}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\ H_{31} = 2R_4\varepsilon_{23} + 2R_6\varepsilon_{31} + K_1 w_{31}, \\ H_{32} = 2R_6\varepsilon_{23} - 2R_4\varepsilon_{31} + K_1 w_{32}, \\ H_{33} = R_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + R_3\varepsilon_{33} + K_3 w_{33}. \end{array} \right. \quad (4)$$

这样, 方程 (2)-(4) 就是点群 6 一维六方准晶弹性问题的基本方程.

当点群 6 一维六方准晶中的缺陷沿准周期方向  $x_3$  穿透时, 材料的几何性质将不随准周期方向改变, 这时, 在垂直于准周期方向  $x_3$  的周期平面  $x_1 - x_2$  内为平面弹性问题, 且有

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} = 0, \quad (5)$$

所有场变量仅依赖于坐标变量  $x_1$  和  $x_2$ .

将 (5) 式代入 (2)-(4) 式, 得到如下两个相互分离的问题.

#### 问题 I

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_4 w_{31} + R_6 w_{32}, \quad (6)$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{31} - R_4 w_{32} + R_6 w_{31}, \quad (7)$$

$$H_{31} = 2R_4\varepsilon_{23} + 2R_6\varepsilon_{31} + K_1 w_{31}, \quad H_{32} = 2R_6\varepsilon_{23} - 2R_4\varepsilon_{31} + K_1 w_{32}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{3j} = \frac{1}{2}\partial_j u_3, \quad w_{3j} = \partial_j w, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} = 0, \quad \partial_1 H_{31} + \partial_2 H_{32} = 0. \quad (10)$$

这是一套关于声子场 - 相位子场耦合的偏微分方程, 与一般晶体的方程完全不同, 属于反平面问题. 本文讨论该问题.

#### 问题 II

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} = C_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad H_{33} = R_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad i, j = 1, 2, \\ \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

该问题类似于各向同性晶体的平面应变问题, 可按经典弹性方法求解.

对于问题 I, 将 (9) 式代入 (6)–(8) 式后再将所得结果代入 (10) 式, 有

$$C_{44}\nabla^2 u_3 + R_6\nabla^2 w = 0, \quad R_6\nabla^2 u_3 + K_1\nabla^2 w = 0,$$

其中,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ . 一般地,  $C_{44}K_1 - R_6^2 \neq 0$ , 由此可以进一步得到

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 w = 0, \quad (12)$$

方程 (12) 即为点群 6 一维六方准晶在周期平面内的反平面弹性问题的控制方程.

### 3 应力分量及边界条件的复表示

引入复变量  $z = x_1 + ix_2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . 由于  $u_3$  和  $w$  是调和函数, 故它们可以表示成复变量  $z$  的任意解析函数  $\phi_1(z)$  和  $\psi_1(z)$  的实部或虚部. 不妨设  $u_3(x_1, x_2) = \text{Re}\phi_1(z)$ ,  $w(x_1, x_2) = \text{Re}\psi_1(z)$ . 此时, 由 (6), (7), (9) 式, 有  $\sigma_{31} = C_{44}\partial_1 u_3 + R_6\partial_1 w - R_4\partial_2 w$ ,  $\sigma_{32} = C_{44}\partial_2 u_3 + R_4\partial_1 w + R_6\partial_2 w$ . 这样

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = C_{44}(\partial_1 u_3 - i\partial_2 u_3) + R_6(\partial_1 w - i\partial_2 w) - iR_4(\partial_1 w - i\partial_2 w). \quad (13)$$

若设  $\phi_1(z) = u_3(x_1, x_2) + in_1(x_1, x_2)$ ,  $\psi_1(z) = w(x_1, x_2) + in_2(x_1, x_2)$ , 则由 Cauchy-Riemann 关系, 有

$$-\partial_2 u_3 = \partial_1 n_1, \quad -\partial_2 w = \partial_1 n_2. \quad (14)$$

把 (14) 式代入 (13) 式即得

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = C_{44}\phi_1'(z) + (R_6 - iR_4)\psi_1'(z), \quad (15)$$

其中,  $\phi_1'(z) = d\phi_1(z)/dz$ ,  $\psi_1'(z) = d\psi_1(z)/dz$ . 同理可得

$$H_{31} - iH_{32} = K_1\psi_1'(z) + (R_6 + iR_4)\phi_1'(z). \quad (16)$$

(15), (16) 式就是问题 I 的各应力分量的复表示.

由 (15), (16) 式可得

$$\begin{cases} C_{44}[\phi_1'(z) - \overline{\phi_1'(z)}] + (R_6 - iR_4)\psi_1'(z) - (R_6 + iR_4)\overline{\psi_1'(z)} = -2i\sigma_{32}, \\ K_1[\psi_1'(z) - \overline{\psi_1'(z)}] + (R_6 + iR_4)\phi_1'(z) - (R_6 - iR_4)\overline{\phi_1'(z)} = -2iH_{32}. \end{cases} \quad (17)$$

当  $z$  在弹性体边界取值时, (17) 式即为问题 I 的边界条件的复表示.

### 4 点群 6 一维六方准晶狭长体中有限长 Griffith 裂纹的问题

假设在点群 6 一维六方准晶中, 沿准周期方向  $x_3$  有一穿透性长为  $2a$  的 Griffith 裂纹. 在  $x_1 - x_2$  平面内, 考虑在无穷远处不受力, 在 Griffith 裂纹表面  $L$  上受沿准周期方向的剪切力  $\tau$ , 如图 1 所示. 此时, 只需对问题 I 求解.

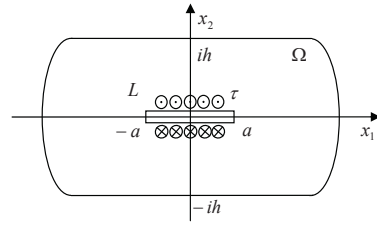


图 1 点群 6 一维六方准晶狭长体中有限长 Griffith 裂纹

上述问题的边界条件为

$$\sigma_{32}(x, \pm h) = 0, \quad H_{32}(x, \pm h) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (18)$$

$$\sigma_{32}(x, \pm 0) = -\tau, \quad H_{32}(x, \pm 0) = -\tau_1, \quad -a < x < a, \quad (19)$$

$$\sigma_{31}(\pm\infty, y) = 0, \quad H_{31}(\pm\infty, y) = 0, \quad -h < y < h. \quad (20)$$

这里裂纹面上给出了相位子场应力  $-\tau_1$ , 只是一种数学模拟. 由 (17) 式可知边界条件的复表示为

$$\begin{cases} C_{44}[\phi_1'(z) - \overline{\phi_1'(z)}] + (R_6 - iR_4)\psi_1'(z) - (R_6 + iR_4)\overline{\psi_1'(z)} = -2i(-\tau), & z \in L, \\ K_1[\psi_1'(z) - \overline{\psi_1'(z)}] + (R_6 + iR_4)\phi_1'(z) - (R_6 - iR_4)\overline{\phi_1'(z)} = -2i(-\tau_1), & z \in L. \end{cases} \quad (21)$$

构造如下保角变换 (其推导见附录):

$$z = \omega(\zeta) = \frac{h}{\pi} \ln \left[ \alpha \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \beta \right], \quad (22)$$

其中,

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}{4}, \quad \beta = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} + e^{-\frac{\pi}{h}a}}{2}. \quad (23)$$

它将  $z$  平面上带有限长 Griffith 裂纹的准晶狭长体区域  $\Omega$  映射到  $\zeta$  平面上单位圆  $\gamma$  内部, 其中  $\zeta$  平面上  $\zeta = \pm 1$  点对应于  $z$  平面上  $z = \pm a$  点.

假设在  $\gamma$  上,  $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ , 并记  $\phi_1(\omega(\zeta)) = \phi(\zeta)$ ,  $\psi_1(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$ , 则有

$$\phi_1'(z) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \psi_1'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

由此条件 (21) 可写为

$$\begin{cases} \phi'(\sigma) - \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \frac{R_6 - iR_4}{C_{44}} \psi'(\sigma) - \frac{R_6 + iR_4}{C_{44}} \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi'(\sigma)} \\ = \frac{2i\tau}{C_{44}} \omega'(\sigma), \\ \psi'(\sigma) - \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi'(\sigma)} + \frac{R_6 + iR_4}{K_1} \phi'(\sigma) - \frac{R_6 - iR_4}{K_1} \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} \\ = \frac{2i\tau_1}{K_1} \omega'(\sigma). \end{cases} \quad (24)$$

上式两端同时乘以  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$  并沿  $\gamma$  上积分, 其中  $\zeta$  在单位圆  $\gamma$  内取值. 因为  $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$  在单位圆  $\gamma$  内解析, 令  $\phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k$ , 所以由 Cauchy 积分公式, 可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \phi'(\zeta), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi'(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \psi'(\zeta). \tag{25}$$

由 (22) 式, 并注意到  $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$ , 可知  $\frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = -\frac{1}{\sigma^2}$ . 而  $\overline{\phi'(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k \frac{1}{\sigma^{k-1}}, \overline{\psi'(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{b}_k \frac{1}{\sigma^{k-1}}$ , 所以  $\frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)}$  和  $\frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi'(\sigma)}$  是单位圆  $\gamma$  外的解析函数  $-\frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k \frac{1}{\zeta^{k-1}}$  和  $-\frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{b}_k \frac{1}{\zeta^{k-1}}$  的边值. 由无穷远处 Cauchy 积分公式, 可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma) \overline{\phi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma) \sigma - \zeta} d\sigma = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma) \overline{\psi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma) \sigma - \zeta} d\sigma = 0. \tag{26}$$

由 (22), (23) 式, 应用留数定理可算得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h}{\pi} \frac{\alpha(1-\frac{1}{\sigma^2})}{\alpha(\sigma+\frac{1}{\sigma})+\beta} \frac{1}{\sigma-\zeta} d\sigma, \\ &= \frac{h}{\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\frac{2-(e^{\frac{\pi}{h}a}+e^{-\frac{\pi}{h}a})}{e^{\frac{\pi}{h}a}-e^{-\frac{\pi}{h}a}}-\zeta} + \frac{\zeta^2-1}{\zeta[(\zeta^2+1)+\frac{2(e^{\frac{\pi}{h}a}+e^{-\frac{\pi}{h}a})}{e^{\frac{\pi}{h}a}-e^{-\frac{\pi}{h}a}}\zeta]} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} F(\zeta). \end{aligned} \tag{27}$$

把 (25)-(27) 式代入 (24) 的积分式就得

$$\begin{cases} \phi'(\zeta) + \frac{R_6 - iR_4}{C_{44}} \psi'(\zeta) = \frac{2i\tau}{C_{44}} F(\zeta), \\ \psi'(\zeta) + \frac{R_6 + iR_4}{K_1} \phi'(\zeta) = \frac{2i\tau_1}{K_1} F(\zeta). \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \phi'(\zeta) = \frac{2i[K_1\tau - (R_6 - iR_4)\tau_1]}{C_{44}K_1 - (R_6^2 + R_4^2)} F(\zeta), \\ \psi'(\zeta) = \frac{2i[C_{44}\tau_1 - (R_6 + iR_4)\tau]}{C_{44}K_1 - (R_6^2 + R_4^2)} F(\zeta). \end{cases} \tag{28}$$

由 [4],  $\zeta$  平面上声子场与相位子场在裂纹尖端  $\zeta = \zeta_1$  处的应力强度因子可定义如下:

$$K_{III}^{\parallel} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} 2\sqrt{\pi}\tau \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}}, \quad K_{III}^{\perp} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} 2\sqrt{\pi}\tau_1 \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}}. \tag{29}$$

利用 (22), (23), (27) 式和 (29) 式可求得在裂纹尖端  $\zeta = 1$  处

$$K_{III}^{\parallel} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} 2\sqrt{\pi}\tau \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} = \tau\sqrt{2h} \frac{2 - (e^{\frac{\pi}{h}a} + e^{-\frac{\pi}{h}a})}{1 - e^{\frac{\pi}{h}a}} \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{h}a}}{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}}, \tag{30}$$

$$K_{III}^{\perp} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} 2\sqrt{\pi}\tau_1 \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} = \tau_1\sqrt{2h} \frac{2 - (e^{\frac{\pi}{h}a} + e^{-\frac{\pi}{h}a})}{1 - e^{\frac{\pi}{h}a}} \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{h}a}}{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}}, \tag{31}$$

(30), (31) 式即为点群 6 一维六方准晶狭长体中有限长 Griffith 裂纹在裂纹尖端处应力强度因子的解析解.

特别地, 当  $h \rightarrow \infty$  时,

$$K_{III}^{\parallel} = \sqrt{\pi a \tau}, \quad K_{III}^{\perp} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \sqrt{\pi a \tau_1}. \quad (32)$$

此为无限大点群 6 一维六方准晶中有限长 Griffith 裂纹的解.

## 附录

关于公式 (22), (23) 的推导.

如图 2 是  $\zeta$  平面上单位圆  $\gamma$  内部区域, 首先作变换

$$z_1 = \alpha \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \alpha = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}{4}. \quad (33)$$

它将  $\zeta$  平面上单位圆  $\gamma$  内部区域变换为  $z_1$  平面上含有长度为  $e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}$  的中心 Griffith 裂纹的无限大区域  $\Omega_1$ , 且  $\zeta = 1$  点对应于  $z_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}{2}$  点, 如图 3. 再作变换

$$z_2 = z_1 + \beta, \quad \beta = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} + e^{-\frac{\pi}{h}a}}{2}. \quad (34)$$

它将  $z_1$  平面上含有 Griffith 裂纹的无限大区域  $\Omega_1$  变换为  $z_2$  平面上区域  $\Omega_2$ , 且  $z_1 = \frac{e^{\frac{\pi}{h}a} - e^{-\frac{\pi}{h}a}}{2}$  点对应于  $z_2 = e^{\frac{\pi}{h}a}$  点, 如图 4.

然后, 作变换

$$z_3 = \ln z_2. \quad (35)$$

它将  $z_2$  平面上区域  $\Omega_2$  变换  $z_3$  为平面上含有长度为  $\frac{2\pi}{h}a$  的中心 Griffith 裂纹的高度为  $2\pi$  的狭长体区域  $\Omega_3$ , 且  $z_2 = e^{\frac{\pi}{h}a}$  点对应于  $z_3 = \frac{\pi}{h}a$  点, 如图 5.

最后作变换

$$z = \frac{h}{\pi} z_3. \quad (36)$$

它将  $z_3$  平面上含 Griffith 裂纹的狭长体区域  $\Omega_3$  变换为  $z$  平面上含有长度为  $2a$  的中心 Griffith 裂纹的高度为  $2h$  的狭长体区域  $\Omega$ , 且  $z_3 = \frac{\pi}{h}a$  点对应于  $z = a$  点, 如图 6.

把变换 (33)–(36) 进行复合即得 (22) 式, 它就是将  $z$  平面上带有限长 Griffith 裂纹的狭长体区域  $\Omega$  映射到  $\zeta$  平面上单位圆  $\gamma$  内部.

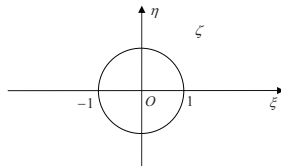


图 2

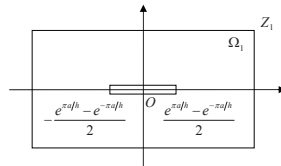


图 3

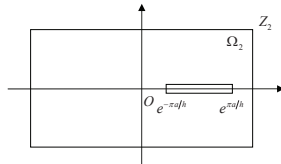


图 4

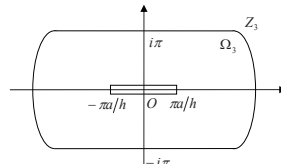


图 5

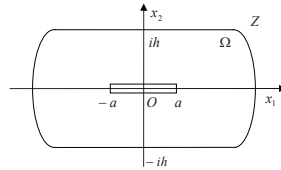


图 6

## 参 考 文 献

- [1] 王仁卉, 胡承正, 桂嘉年. 准晶物理学. 北京: 科学出版社, 2004  
(Wang R H, Hu Ch Zh, Gui JN. Quasicrystal Physics. Beijing: Science Press, 2004)
- [2] 董闯. 准晶材料. 北京: 国防工业出版社, 1998: 58-175  
(Dong Ch. The Quasicrystal Material. Beijing: National Defence Industry Press, 1998: 58-175)
- [3] 范天佑. 断裂理论基础. 北京: 科学出版社, 2003  
(Fan T Y. Foundation of Fracture Mechanics. Beijing: Science Press, 2003)
- [4] 刘官厅. 准晶弹性的复变方法与非线性发展方程的显示解. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 2005  
(Liu G T. The Complex Variable Function Method of Quasicrystals Elasticity and Analytic Solutions of Nonlinear Equations. Huhhot: Inner Mongolia People Press, 2005)
- [5] 郭俊宏, 刘官厅. 一维六方准晶中具有不对称裂纹的圆形孔口问题的解析解. 应用数学学报, 2007, 30(6): 1066-1075  
(Guo J H, Liu G T. Analytic Solutions of the One-dimensional Hexagonal Quasicrystals about Problem of a Circular Hole with Asymmetry Cracks. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2007, 30(6): 1066-1075)
- [6] 杨丽星, 刘官厅. 一维六方准晶中带三条不对称裂纹的圆形孔口问题的解析解. 数学的实践与认识, 2010, 40(2): 148-156  
(Yang L X, Liu G T. Analytic Solutions of Problem about an Elliptic Hole with a Straight Crack in One-dimensional Hexagonal Quasicrystals. *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40(2): 148-156)
- [7] 郭怀民, 乔文华. 一维六方准晶中带裂纹的椭圆孔口问题的解析解. 宁夏大学学报, 2009, 30(3): 223-226  
(Guo H M, Qiao W H. Analytic Solutions of Problem about an Elliptic Hole with a Straight Crack in One-dimensional Hexagonal Quasicrystals. *Journal of Ningxia University (Natural Science Edition)*, 2009, 30(3): 223-226)



- [8] 郭俊宏, 刘官厅. 一维六方准晶中带双裂纹的椭圆孔口问题的解析解. *应用数学和力学*, 2008, 29(4): 439–446  
(Guo J H, Liu G T. Analytic Solutions of Problem about an Elliptic Hole with two Straight Cracks in One-dimensional Hexagonal Quasicrystals. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(4): 439–446)
- [9] Fan T Y. *Mathematical theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010
- [10] 皮建东, 刘官厅, 郭怀民. 一维六方准晶狭长体中共线裂纹问题的精确解. *内蒙古师范大学学报*, 2006, 35(4): 391–396  
(Pi J D, Liu G T, Guo H M. Exact Solutions of the One-dimensional Hexagonal Quasicrystals with two Semi-infinite Collinear Cracks in a Strip. *Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)*, 2006, 35(4): 391–396)

## Anti-plane Analysis of a Finite Long Griffith Crack in a Point Group 6 of One-dimensional Hexagonal Quasicrystals Strip

SHI ZHIYU      LIU GUANTING

(College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022)

(E-mail: yelzineq@163.com)

**Abstract** As one kind of complex variable function method to solve the plane problem in fracture mechanics, conformal transformation method is very practical and effective, which transforms the area in physical plane to the unit circle inside (outside) or the upper half-plane (lower half-plane) in mathematical plane by a conformal transformation. In this article, by using the complex variable function method and proposing a new conformal mapping, the fracture problem of a finite Griffith crack in a point group 6 of one-dimensional hexagonal quasicrystals strip is studied under anti-plane shear stress load in the crack surface. The analytic solution of the stress intensity factors at the crack tip is obtained. When the height of the strip tends to infinite, the present results can be degenerated to the solutions of a Griffith crack in infinite point group 6 of one-dimensional hexagonal quasicrystals.

**Key words** point group 6 of one-dimensional hexagonal quasicrystals strip;  
finite Griffith crack; conformal mapping; stress intensity factor;  
analytical solution

**MR(2000) Subject Classification** 62G05; 62N015

**Chinese Library Classification** O212.7