第 36 卷 第 4 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 36 No. 4
2013 年 7 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　July, 2013

一类无穷维 Hamilton 算子的谱估计 *

青 梅 † 吉日嘎 金 冉 阿拉坦仓

(内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021)

(E-mail: †bai.qingmei@163.com)

摘 要 研究了一类无穷维 Hamilton 算子近似点谱的范围. 进而，当此类无穷维 Hamilton 算子是辛自伴算子时，给出了它的谱范围. 并刻画了分块对角算子的近似点谱. 最后举例说明了判别准则的有效性.

关键词 无穷维 Hamilton 算子；谱；近似点谱；辛自伴

MR(2000) 主题分类 47B47

中图分类 O175.3

1 引言

众所周知， Hamilton 体系是动力系统的重要内容之一，其应用领域极其广泛，包括结构生物学、药理学、半导体、超导体、等离子体、天体力学等. 无穷维 Hamilton 算子来源于无穷维 Hamilton 系统，具有深刻的力学背景，其谱理论是基于 Hamilton 体系的分离变量法的理论基础，在弹性力学求解新体系等相关领域起重要作用. 为了更深入了解无穷维 Hamilton 算子内在的性质，为钟万勰院士提出的弹性力学求解新体系提供数学依据，以阿拉坦仓教授为负责人的无穷维 Hamilton 算子研究团队较为系统地研究了无穷维 Hamilton 算子的谱理论及其相关问题，取得了一些较好的理论成果. 比如，在 [1–6] 中研究了无穷维 Hamilton 算子的可逆性、特征函数系的完备性等性质，取得了非负无穷维 Hamilton 算子可逆的充分条件和特征函数系在 Cauchy 主值意义下完备的充分条件；在 [7, 8] 中得出无穷维 Hamilton 算子辛自伴时其点谱与剩余谱的并集以及连续谱分别关于虚轴对称、点谱关于虚轴对称的充要条件为剩余谱是空集等结论. 在 [9] 中给出了非负无穷维 Hamilton 算子的点谱和剩余谱的并集的分布范围，等等. 据我们所知，线性算子近似点谱的研究对于估计谱的分布范围起非常重要的作用，而涉及无穷维 Hamilton 算子近似点谱的文献寥寥无几.

本文 2011 年 11 月 23 日收到. 2012 年 2 月 9 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10962004,11101200) 和内蒙古大学资助研究生科研 (2-1.2.1-131) 资助项目.

基于以上原因，本文刻画了一类无穷维 Hamilton 算子近似点谱的分布范围，得到了无穷维 Hamilton 算子的点谱、连续谱与第一类剩余谱并集的分布范围．而在 [9] 中得到的是点谱和剩余谱的并集的分布范围，两者没有相互包含关系．但是，当这类无穷维 Hamilton 算子满足辛自伴时，本文刻画了它的谱的分布范围，此结论是推广了 [9] 的结论．除此之外，本文还精确地刻画了主对角型算子矩阵的近似点谱．最后举例来说明了定理的有效性．本文首先交代了一些预备知识，然后给出了我们的主要结论．

2 预备知识

在本文， X 表示无穷维复 Hilbert 空间，而 $\sigma(T),\sigma_r(T),\rho(T)$ 分别表示一个线性算子 T 的谱，剩余谱，正则点集．下面给出后面会用到的一些定义．

定义 1 在 Hilbert 空间 $X\times X$ 中稠定闭线性算子 H 称为无穷维 Hamilton 算子，如果 H 具有如下 2×2 分块形式

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},$$

其中 A 是 X 中的稠定闭线性算子， B,C 是 X 中的自伴算子．

定义 2 设 T 是定义在 X 上的线性算子，复数 λ 称为 T 的近似点谱，如果存在 X 中的一个点列 $\{x_n\}\subseteq D(T)$, $\|x_n\|=1$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(\lambda I-T)x_n\|=0$. 全体近似点谱记为 $\sigma_{ap}(T)$.

记 $\sigma_{r,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_r(T)$: $R(T-\lambda I)$ 闭的 $\}$, 则对于复 Hilbert 空间上的闭线性算子 T, 有 $\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_{r,1}(T)$.

引理 1[4] 设 H 为无穷维 Hamilton 算子，且 $(JH)^*=JH$, 则有

(a) $\lambda\in\sigma_{p,1}(H)$ 当且仅当 $-\overline{\lambda}\in\sigma_{r,1}(H)$;

(b) $\lambda\in\sigma_{p,2}(H)$ 当且仅当 $-\overline{\lambda}\in\sigma_{r,2}(H)$;

(c) $\lambda\in\sigma_{p,3}(H)$ 当且仅当 $-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,3}(H)$;

(d) $\lambda\in\sigma_{p,4}(H)$ 当且仅当 $-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,4}(H)$,

其中， $\sigma_{p,1}(H)$, $\sigma_{p,2}(H)$, $\sigma_{p,3}(H)$, $\sigma_{p,4}(H)$ 及 $\sigma_{r,2}(H)$ 的定义见 [4].

引理 2 设 $C: D(C)\subseteq X\to X$ 是非负自伴且具有连续逆的线性算子, 则存在 $M>0$, 使得 $(Cx,x)\geq M(x,x)$, $\forall x\in D(C)$.

证 由引理条件知, $C^{\frac{1}{2}}$ 存在, 且 $C^{\frac{1}{2}}$ 是非负自伴、具有连续逆的线性算子, 则 $\exists\, m>0$, 使得 $\forall x\in D(C^{\frac{1}{2}})$, 有 $\|C^{\frac{1}{2}}x\|\geq m\|x\|$, 不等式两边平方得 $(C^{\frac{1}{2}}x,C^{\frac{1}{2}}x)\geq m^2(x,x)$. 令 $M=m^2$, 由 $C^{\frac{1}{2}}$ 的自伴性得 $(Cx,x)\geq M(x,x)$, $\forall x\in D(C)$.

3 主要结果及其证明

定理 3 设 $H=\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{smallmatrix}\right): D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是无穷维 Hamilton 算子，如

果对任意 $\binom{u_n}{v_n} \in D(H)$, $\|u_n\|^2+\|v_n\|^2=1$, $n=1,2\cdots$, 存在 $M>0$, 使得

$$\big|(Bv_n,v_n)+(Cu_n,u_n)\big| \geq M,$$

则其近似点谱满足

$$\sigma_{ap}(H) \subseteq \big\{\lambda \in \mathbb{C}: |\mathrm{Re}\,\lambda| \geq M\big\}.$$

证 若 $\lambda \in \sigma_{ap}(H)$, 则存在 $\{z_n=(x_n,y_n)^T\} \subseteq D(H)$, $\|x_n\|^2+\|y_n\|^2=1$, 使得

$$\|Hz_n-\lambda z_n\| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

即

$$Ax_n+By_n-\lambda x_n \longrightarrow 0, \qquad Cx_n-A^*y_n-\lambda y_n \longrightarrow 0,$$

第 1 式和第 2 式分别与 y_n, x_n 作内积，由内积的连续性知

$$(Ax_n,y_n)+(By_n,y_n)-\lambda(x_n,y_n) \longrightarrow 0,$$
$$(x_n,Cx_n)-(x_n,A^*y_n)-\overline{\lambda}(x_n,y_n) \longrightarrow 0,$$

两式相加有

$$(By_n,y_n)+(Cx_n,x_n)-2\mathrm{Re}\,\lambda(x_n,y_n) \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty,$$

则对 $\frac{1}{2}M>0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall n>N_1$, 成立

$$\big|(x_n,Cx_n)+(By_n,y_n)-2\mathrm{Re}\lambda(x_n,y_n)\big| < \frac{1}{2}M,$$

由定理条件及三角不等式，有

$$|2\mathrm{Re}\lambda(x_n,y_n)| > |(x_n,Cx_n)+(By_n,y_n)|-\frac{1}{2}M > \frac{1}{2}M,$$

故当 $n>N_1$ 时 $(x_n,y_n) \neq 0$, 于是有

$$\frac{(By_n,y_n)+(Cx_n,x_n)}{2(x_n,y_n)} \longrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

又因为

$$|2(x_n,y_n)| \leq 2\|x_n\|\|y_n\| \leq \|x_n\|^2+\|y_n\|^2=1,$$

于是当 $n>N_1$ 时，有

$$\Big|\frac{(By_n,y_n)+(Cx_n,x_n)}{2(x_n,y_n)}\Big| \geq M.$$

从而

$$|\mathrm{Re}\,\lambda| \geq M,$$

即

$$\sigma_{ap}(H) \subseteq \big\{\lambda \in \mathbb{C}: |\mathrm{Re}\lambda| \geq M\big\}.$$

推论 4 设 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 为满足定理 3 的无穷维 Hamilton 算子，且 $(JH)^*=JH$, 则其谱满足

$$\sigma(H)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\mathrm{Re}\lambda|\geq M\}.$$

证 因为 $\sigma(H)=\sigma_{ap}(H)\cup\sigma_{r,1}(H)$, 由引理 1 知

$$\lambda\in\sigma_{r,1}(H)\Longrightarrow -\overline{\lambda}\in\sigma_p(H)\subseteq\sigma_{ap}(H),$$

又由定理 3 知

$$|\mathrm{Re}\lambda|=|\mathrm{Re}(-\overline{\lambda})|\neq 0\Longleftrightarrow|\mathrm{Re}\lambda|=|\mathrm{Re}(-\overline{\lambda})|\geq M,$$

故

$$\sigma(H)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\mathrm{Re}\lambda|\geq M\}.$$

以上是对一般的无穷维 Hamilton 算子满足一定条件时, 估计了其近似点谱的范围. 而对分块对角算子，可以精确地刻画其近似点谱. 有如下定理：

定理 5 设 $H=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}:\ D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是线性算子，其中 A,B 是稠定闭算子，则 $\sigma_{ap}(H)=\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)$.

证 先证 $\sigma_{ap}(H)\subseteq\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)$:

当 $\lambda\in\sigma_{ap}(H)$, 假设 $\lambda\notin\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)$, 则有 $\lambda\in\sigma_{r,1}(A)\cup\sigma_{r,1}(B)$.

(i) 若 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(A)$, 由假设有， $\lambda\notin\sigma_{ap}(A)$, 从而 $\lambda\in\rho(A)$, 这表明 $(A-\lambda I)^{-1}$ 在 X 上有界. 另一方面， $\lambda\in\sigma_{r,1}(B)$, 则 $(B-\lambda I)^{-1}$ 在 $R(B-\lambda I)$ 上有界. 综上 $(H-\lambda I)^{-1}$ 在 $X\times R(B-\lambda I)$ 上有界，这与 $\lambda\in\sigma_{ap}(H)$ 矛盾.

(ii) 若 $\lambda\in\sigma_{r,1}(A)$, 则 $(A-\lambda I)^{-1}$ 在 $R(A-\lambda I)$ 上有界. 另一方面，又由假设有, $\lambda\notin\sigma_{ap}(B)$. 若 $\lambda\in\sigma_{r,1}(B)$, 同 (i) 类似，得 $(H-\lambda I)^{-1}$ 在 $R(A-\lambda I)\times R(B-\lambda I)$ 上有界；若 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(B)$, 则 $\lambda\in\rho(B)$, 从而 $(B-\lambda I)^{-1}$ 在 X 上有界，故 $(H-\lambda I)^{-1}$ 在 $R(A-\lambda I)\times X$ 上有界. 这与 $\lambda\in\sigma_{ap}(H)$ 矛盾.

由 (i) 和 (ii), 得 $\sigma_{ap}(H)\subseteq\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)$.

下证 $\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)\subset\sigma_{ap}(H)$.

若 $\lambda\in\sigma_{ap}(A)$, 则 $\exists\{x_n\}\subset D(A)$, $\|x_n\|=1$, 使得

$$Ax_n-\lambda x_n\longrightarrow 0,\qquad n\longrightarrow\infty.$$

取 $z_n=(x_n,0)^T$, 显然 $z_n\in D(A)\times D(B)$, 且 $\|z_n\|=1$, 则有

$$Hz_n-\lambda z_n\longrightarrow 0,\qquad n\longrightarrow\infty,$$

即 $\lambda\in\sigma_{ap}(H)$.

若 $\lambda\in\sigma_{ap}(B)$, 同理亦可证明 $\lambda\in\sigma_{ap}(H)$, 故

$$\sigma_{ap}(A)\cup\sigma_{ap}(B)\subset\sigma_{ap}(H).$$

下面举一个例子来说明定理的有效性.

例 1 令 $X=L^2[0,1]$, $H=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} & 0 \end{pmatrix}$ 是 $X\times X$ 上的无穷维 Hamilton 算子，其中 $D(C)=\{u\in X: u'$ 绝对连续， $u',u''\in X,\ u(0)=u(1)=0\}$, 则对任意的 $u\in D(C)$, 由边界条件得

$$(Cu,u)=(u',u')\geq 0,$$

即 $C=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 是非负自伴算子且具有有界逆，则由引理 2 知，$\exists M_1>0$, 使得

$$(Cu,u)\geq M_1(u,u),\qquad \forall\, u\in D(C).$$

令 $M=\min\{M_1,1\}$, 则对任意的 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\in D(H)$, $\|u_n\|^2+\|v_n\|^2=1$, 有

$$(Bv_n,v_n)+(Cu_n,u_n)\geq M\big[(v_n,v_n)+(u_n,u_n)\big].$$

即 H 是满足我们定理 3 和推论 4 的条件，因此由定理 3 和推论 4 得

$$\sigma_{ap}(H)\subseteq\sigma(H)\subseteq\big\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\mathrm{Re}\lambda|\geq M\big\}.$$

另一方面，经计算得

$$\sigma(H)=\sigma_p(H)=\big\{\lambda_k=k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\cdots\big\},$$

即对上述的 $M>0$, 有

$$\sigma_{ap}(H)\subseteq\big\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\mathrm{Re}\lambda|\geq M\big\},\qquad \sigma(H)\subseteq\big\{\lambda\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}\lambda|\geq M\big\}.$$

参 考 文 献

[1] 范小英，阿拉坦仓. 一类非负无穷维 Hamilton 算子的谱分布及其可逆性. 应用数学学报, 2009, 32(1): 14–18
(Fan X Y, Alatancang. Spectral Distribution and Invertibility of a Class of Nonnegative Hamiltonian Operators. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2009, 32(1): 14–18)

[2] 吴德玉，阿拉坦仓. 无穷维 Hamilton 算子的可逆性及其应用. 中国科学，数学, 2010, 40(9): 921–928
(Wu D Y, Alatancang. Invertibility of Infinite Dimensional Hamiltonian Operater and Its Applications. *Science in China (Mathematics)*, 2010, 40(9): 921–928)

[3] 范小英, 阿拉坦仓. 一类非负无穷维 Hamilton 算子的谱刻画及其可逆性. 系统科学与数学, 2011, 31(1): 57–64
(Fan X Y, Alatancang. Spectrum and Invertibility of a Class of Infinite Dimensional Hamiltonian Operators. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2011, 31(1): 57–64)

[4] 吴德玉. 无穷维 Hamilton 算子的谱与特征函数系的完备性. 博士论文，内蒙古大学， 2008
(Wu D Y. Spectrum of Infinite Dimensional Hamiltonian Operators and Completeness of the Eigenfunction Systems. Doctoral Dissertation, Inner Mongolia University, 2008)

[5] Hou G L, Alatancang. Completeness of Eigenfunction Systems for Off-diagonal Infinite-dimensional Hamiltonian Operators. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, 53(2): 237–241

[6] Alatancang, W D Y. Completeness in the Sense of Cauchy Principal Value of the Eigenfunction Systems of Infinite Dimensional Hamiltonian Operator. *Science in China Series A: Mathematics*, 2009, 52(1): 173–180

[7] 阿拉坦仓，黄俊杰．无穷维 Hamilton 算子谱及其相关问题研究． *数学进展*, 2009, 38(2): 129–145
(Alatancang, H J J. On Spectrum and Related Problems of Infinite Dimensional Hamiltonian Operators. *Advances in Mathematics*, 2009, 38(2): 129–145)

[8] Alatancang, H J J, F X Y. Structure of the Spectrum of Infinite Dimensional Hamiltonian Operators. *Science in China Series A: Mathematics*, 2008, 51(5): 915–924

[9] 范小英．上三角型无穷维 Hamilton 算子的谱及其应用． 博士论文，内蒙古大学， 2009
(Fan X Y. The Spectrum of Upper Triangular Infinite Dimensional Hamiltonian Operators and Applications. Doctoral Dissertation, Inner Mongolia University, 2009)

[10] 孙炯，王忠． 线性算子谱分析．北京：科学出版社， 2005
(Sun J, Wang Z. Spectrum Analysis of Linear Operators. Beijing: Science Press, 2005)

Estimation of the Spectrum of a Class of Infinite Dimensional Hamiltonian Operators

QING Mei JIRIGA JIN Ran ALATANCANG

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021)

(*E-mail: bai.qingmei@163.com*)

Abstract In this paper, the range of approximate point spectrum of a class of infinite dimensional Hamiltonian operators is studied. Furthermore, the range of spectrum of the class of infinite dimensional Hamiltonian operators which are symplectic adjoint operators is estimated. The approximate point spectrum of diagonal block operators is also obtained. In the end, a concrete example is constructed to illustrate the effectiveness of the criterions.

Key words infinite dimensional Hamiltonian operator; spectrum; approximate point spectrum; symplectic adjoint

MR(2000) Subject Classification 47B47

Chinese Library Classification O175.3