

Ornstein-Uhlenbeck 模型下 DC 养老金计划的最优投资策略*

谷爱玲

(中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275)

(广东工业大学应用数学学院, 广州 510520)

(E-mail: ailing727@sohu.com)

李仲飞

(中山大学管理学院, 中山大学金融工程与风险管理研究中心, 广州 510275)

(E-mail: lnslzf@mail.sysu.edu.cn.)

曾 燕

(中山大学岭南(大学)学院, 中山大学金融工程与风险管理研究中心, 广州 510275)

摘 要 本文研究了 Ornstein-Uhlenbeck 模型下确定缴费型养老金计划(简称 DC 计划)的最优投资策略, 其中以最大化 DC 计划参与者终端财富(退休时其账户金额)的 CRRA 效用为目标. 假定投资者可投资于无风险资产和一种风险资产, 风险资产的瞬时收益率由 Ornstein-Uhlenbeck 过程驱动, 该过程能反映市场所处的状态. 利用随机控制理论, 给出了相应的 HJB 方程与验证定理; 并通过求解相应的 HJB 方程, 得到了最优投资策略和最优值函数的解析式. 最后分析了瞬时收益率对最优投资策略的影响, 发现当市场向良性状态发展时, 投资在风险资产上的财富比例呈上升趋势; 当初始财富足够大且市场状态不变时, 投资在风险资产上的财富比例几乎不受时间的影响.

关键词 DC 型养老基金计划; 最优投资策略; Ornstein-Uhlenbeck 过程; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

MR(2000) 主题分类 62G05; 62N01

中图分类 O221

本文 2011 年 10 月 25 日收到, 2012 年 5 月 11 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金重点项目 (No. 71231008), 教育部人文社会科学研究青年基金项目 (12YJCZH267), 广东省哲学社会科学规划 (No. GD11YYJ07) 资助项目.

1 引言

随着人口老龄化问题日益突出,建立有效的社会养老保险体系已成为世界各国面临的重要课题.从而养老金管理是一项非常值得研究的课题.养老金计划一般分为两种:一种是确定收益型养老金计划 (defined benefit pension plan),简称 DB 计划,即预先确定退休后的退休金计划;另一种是确定缴费型养老金计划 (defined contribution pension plan),简称 DC 计划,即预先确定缴费水平,缴费不断积累并获投资收益,当 DC 计划参与者退休时,以缴费及投资收益在退休时的累积额为基础发放退休金,投资回报率降低的风险由参与者个人承担.由于 DC 计划参与者承担了所有的投资风险,因此如何实现 DC 计划的最优投资已成为理论界和实业界都非常关心的重大问题.近年来,诸多学者研究了 DC 计划的投资问题. Haberman 和 Vigna^[1]建立了离散时间下 DC 计划的最优投资模型,利用最优控制理论,得到了最优投资策略. Thomson^[2]以最大化 DC 计划参与者的期望效用为目标,首次利用连续时间随机动态规划方法,得到了退休前最优投资策略.之后,最优控制理论广泛用于解决 DC 计划的投资问题.如 Devolder 等^[3]以最大化 DC 计划参与者终端财富期望效用作为目标,建立了多种效用函数下的最优投资模型,并给出了不同效用函数下的最优投资策略; Gerrard 等^[4,5]以财富损失水平最小化为目标建立了最优投资模型,分别得到有限时间和无限时间情形下的最优投资策略.

然而,上述文献均以几何布朗运动刻画风险资产价格过程.几何布朗运动的波动率和收益率均为常数或确定性函数,不能有效地反映市场的波动性与市场所处的状态.常数方差弹性 (CEV) 模型是几何布朗运动的自然推广,并能够反映市场潜在的波动敏感性. Xiao 等^[6]和 Gao^[7]采用 CEV 模型描述风险资产的价格过程,得到了 DC 计划的最优投资策略的解析式;其中前者是以最大化终端财富的对数效用为目标,所采用的方法是对偶方法;后者是以最大化终端财富的幂效用和指数效用函数为目标,所采用的方法是随机动态规划方法.

最近, Lakner^[8,9], Rishel^[10]及 Bai, Guo^[11]采用 Ornstein-Uhlenbeck 过程 (简称: OU 过程) 刻画股票的瞬时收益率,反映市场状态.在这样的资本市场中, Baev 和 Bondarev^[12]研究了保险公司的最优投资问题,给出保险公司破产概率的估计; Liang 等^[13]考虑了保险公司的比例再保险与投资问题,在最大化终端财富的指数效用下得到了最优投资策略.由上述文献可见,资本市场中股票价格的瞬时收益率由反映市场状态的 OU 过程描述比较好,因为现实中股票收益与市场状态有着直接的联系,从而所描述的股价更接近其真实值,投资者可以根据市场变化有效地调整投资策略.故本文在这样的资本市场中考虑 DC 计划的投资问题,文中假设投资者投资于无风险资产 (如债券) 和一种风险资产 (如股票),其中风险资产的瞬时收益率由 OU 过程驱动,以最大化终端财富的幂效用为目标,借助随机控制理论,通过求解相应的 HJB 方程得到了最优投资策略和最优值函数的解析式.已有关于 DC 计划投资的文献得到的最优投资策略均为生活方式 (lifestyle) 投资策略^[14],即投资在风险资产上的财富比例随时间的推移而减少.而本

文引入反映市场状态的 OU 过程后, 发现当市场向良性状态发展时, 投资在风险资产上的财富比例呈上升趋势; 当初始财富足够大且市场状态不变时, 投资在风险资产上的财富比例与时间无关.

本文结构如下: 第 2 节建立模型并求解, 得到了文中的主要结论; 第 3 节采用数值算例分析了 OU 过程对最优投资策略的影响; 最后 1 节是本文的结束语.

2 模型建立与求解

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 是赋流完备的概率空间, 其中 \mathcal{F}_t 表示到时刻 t 为止所获信息总和; 时刻 t 的决策基于信息流 \mathcal{F}_t ; T 是有限的正数, 代表 DC 计划参与者退休前的投资时间. 假设文中所有随机过程均为赋流概率空间上的适应过程. 假设计划参与者可投资于无风险资产 (如债券) 和一种风险资产 (如股票), 其中无风险资产的价格过程 $P_0(t)$, $t \in [0, T]$ 满足微分方程

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt, \quad P_0(0) = p_0, \quad (1)$$

其中 $r > 0$ 是常数, 表示无风险利率; 在 Rishel^[10] 的启发下, 我们考虑风险资产的瞬时收益率服从 OU 过程, 即风险资产价格过程 $P(t)$, $t \in [0, T]$ 满足微分方程

$$dP(t) = P(t)[(\mu + m(t))dt + \sigma dB_1(t)], \quad P(0) = p, \quad (2)$$

$$dm(t) = \alpha m(t)dt + \beta dB_2(t), \quad m(0) = m_0, \quad (3)$$

其中 $\mu > 0$, $\sigma > 0$, α, β 均为常数; $B_1(t), B_2(t)$ 为一维标准布朗运动, 且 $\text{Cov}(B_1(t), B_2(t)) = \rho t$, $\rho \in [-1, 1]$ 为相关系数.

下面我们考虑 DC 计划, 即参与者退休前每年要缴纳固定金额到养老基金计划中. 假设参与者每年工资收入为 W , 则需要缴纳的金额是 cW , c 是一个常数, 而且把这部分金额全部存入一个固定的账户. 记参与者在 $t \in [0, T]$ 时刻的账户收入为 $X(t)$ (为研究方便且不失一般性, 我们假定工资 W 为 1), 则 $X(t)$ 满足微分方程

$$dX(t) = cdt, \quad X(0) = x_0, \quad (4)$$

其中 x_0 表示时刻 0 账户内的金额. 假定时刻 t 投资在风险资产上的比例是 $\pi(t)$, 投资在无风险资产上的比例是 $1 - \pi(t)$. 文中允许卖空与借贷, 则在策略 π 下养老金总额 $X^\pi(t)$ 的动态过程可表示为

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= cdt + (1 - \pi(t))X^\pi(t) \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} + \pi(t)X^\pi(t) \frac{dP(t)}{P(t)} \\ &= [c + rX^\pi(t) + (\mu + m(t) - r)\pi(t)X^\pi(t)] dt + \pi(t)X^\pi(t)\sigma dB_1(t). \end{aligned} \quad (5)$$

称策略 $\pi := \{\pi(t) : t \in [0, T]\}$ 是一个允许策略, 如果 $(\pi(t))_{t \in [0, T]}$ 是 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ 循序可测的, 且满足 $E(\int_0^\infty \pi^2(t) dt) < \infty$ 以及 (5) 有唯一强解. 所有允许策略组成的集合记为 Π .

下面我们寻找最优投资策略 π^* , 使 DC 计划参与者在退休时养老金总额的期望效用最大. 假设效用函数是递增的凹函数. 对任意允许策略 $\pi \in \Pi$, 我们定义从初始时刻 t 和初始状态 (x, m) 出发的值函数为

$$V_\pi(t, x, m) = E[U(X^\pi(T)) | X^\pi(t) = x, m(t) = m]. \quad (6)$$

下面我们来寻求最优值函数

$$V(t, x, m) = \sup_{\pi \in \Pi} V_\pi(t, x, m) \quad (7)$$

及相应的最优策略 π^* , 使得 $V_{\pi^*}(t, x, m) = V(t, x, m)$. 显然, 最优值函数满足如下边界条件

$$V(T, x, m) = U(x).$$

假定采用 CRRA 效用函数

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma < 1, \quad \gamma \neq 0,$$

其中 $1 - \gamma$ 为相对风险厌恶系数. 利用随机控制理论^[15], 我们推导出优化问题 (7) 的 HJB 方程为

$$\sup_{\pi \in \Pi} \{\mathcal{A}^\pi V(t, x, m)\} = 0, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\pi V(t, x, m) = & \frac{1}{2} \pi^2 x^2 \sigma^2 V_{xx} + \pi x (\mu + m - r) V_x + \pi x \beta \sigma \rho V_{mx} \\ & + V_t + V_x (rx + c) + \alpha m V_m + \frac{1}{2} \beta^2 V_{mm} \end{aligned}$$

以及边界条件

$$V(T, x, m) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad (9)$$

其中 $V_t, V_x, V_m, V_{xx}, V_{mm}$ 和 V_{mx} 分别为 $V(t, x, m)$ 对 t, x, m 的一阶及二阶偏导数.

定理 1 (验证定理) 如果 $W(t, x, m) \in C^{1,2,2}$ 且满足方程 (8) 及边界条件 (9), 则 $W(t, x, m) \geq V(t, x, m)$; 若存在允许策略 π^* , 使得 $\forall t \in [0, T]$ 有

$$\pi^*(t) \in \arg \sup_{\pi \in \Pi} \mathcal{A}^\pi W(t, x, m),$$

则 $\forall t \in [0, T]$ 有 $W(t, x, m) = V(t, x, m)$, 且 π^* 是最优投资策略.

证 因为 $W(t, x, m) \in C^{1,2,2}$, 由 Itô 引理得

$$\begin{aligned} W(T, X^\pi(T), m(T)) = & W(t, x, m) + \int_t^T \mathcal{A}^\pi W(s, X^\pi(s), m(s)) ds \\ & + \int_t^T \pi(s) X^\pi(s) \sigma V_x(s, X^\pi(s), m(s)) dB_1(s) \\ & + \int_t^T \beta V_m(s, X^\pi(s), m(s)) dB_2(s). \end{aligned}$$

由 (8) 知

$$\begin{aligned} W(T, X^\pi(T), m(T)) \leq & W(t, x, m) + \int_t^T \pi(s) X^\pi(s) \sigma V_x(s, X^\pi(s), m(s)) dB_1(s) \\ & + \int_t^T \beta V_m(s, X^\pi(s), m(s)) dB_2(s). \end{aligned}$$

因上式最后两项为平方可积鞅且期望为零, 从而

$$E[W(T, X^\pi(T), m(T)) | X^\pi(t) = x, m(t) = m] \leq W(t, x, m).$$

上式两端对于所有允许策略 $\pi \in \Pi$ 取上确界可得

$$V(t, x, m) \leq W(t, x, m).$$

当 $\pi = \pi^*$ 时, 上面不等式变为等式, 即 $W(t, x, m) = V(t, x, m)$. 从而 π^* 是优化问题 (7) 的最优投资策略. 证毕.

由定理 1 知, 求解优化问题 (7) 可转化为求解 HJB 方程 (8). 下面构造 HJB 方程 (8) 的解. 在 Liang 等^[13] 的启发下, 我们猜想

$$V(t, x, m) = q(t, m) \frac{(x - b(t))^\gamma}{\gamma} > 0 \quad (10)$$

且满足边界条件 $b(T) = 0, q(T, m) = 1$. 根据 (10) 式得到下列偏导数:

$$\begin{aligned} V_t &= \left(\frac{q_t}{\gamma} (x - b(t)) - qb_t \right) (x - b(t))^{\gamma-1}, & V_x &= q(x - b(t))^{\gamma-1}, \\ V_m &= \frac{q_m}{\gamma} (x - b(t))^\gamma, & V_{xx} &= q(\gamma - 1)(x - b(t))^{\gamma-2}, \\ V_{mm} &= \frac{q_{mm}}{\gamma} (x - b(t))^\gamma, & V_{mx} &= q_m(x - b(t))^{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $q = q(t, m)$, q_t 与 q_m 分别是 $q(t, m)$ 关于 t 和 m 的一阶偏导数. 由 (10) 易得 $V_{xx} < 0$. 对 (8) 大括号内的式子关于 π 求导, 由 $V_{xx} < 0$ 及一阶条件, 我们得到 (8) 的最值点为

$$\pi^* = - \frac{(\mu + m - r)V_x + \beta\sigma\rho V_{mx}}{x\sigma^2 V_{xx}}. \quad (12)$$

将 (11) 和 (12) 代入 (8), 整理可得

$$(x - b(t)) \left[\frac{1}{\gamma} \left(q_t + \alpha m q_m + \frac{1}{2} \beta^2 q_{mm} \right) + r q + \frac{((\mu + m - r)q + \beta \sigma \rho q_m)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma)q} \right] + (rb(t) + c - b_t)q = 0. \quad (13)$$

分别令上式中 $x - b(t)$ 的系数及常数项为零得到下列微分方程

$$b_t - rb(t) - c = 0, \quad b(T) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\gamma} \left(q_t + \alpha m q_m + \frac{1}{2} \beta^2 q_{mm} \right) + r q + \frac{((\mu + m - r)q + \beta \sigma \rho q_m)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma)q} = 0, \quad q(T, m) = 1. \quad (15)$$

求解一阶线性微分方程 (14) 可得

$$b(t) = -\frac{c(1 - e^{-r(T-t)})}{r}. \quad (16)$$

然而, (15) 是非线性偏微分方程, 不容易直接求解. 我们假定 $q(t, m)$ 具有如下形式

$$q(t, m) = f(t)^{1-\gamma} e^{(1-\gamma)(g(t)m^2 + h(t)m)}, \quad (17)$$

且满足边界条件 $f(T) = 1, g(T) = h(T) = 0$, 则容易得到如下偏导数

$$\begin{aligned} q_t &= (1 - \gamma) \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + g'(t)m^2 + h'(t)m \right) q, \\ q_m &= (1 - \gamma)(2g(t)m + h(t))q, \\ q_{mm} &= (1 - \gamma)[2g(t) + (1 - \gamma)(2g(t)m + h(t))^2]q. \end{aligned}$$

将上述偏导数代入 (15) 得到

$$L_1(t)m^2 + L_2(t)m + L_3(t) = 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} L_1(t) &= (1 - \gamma)g'(t) + 2\alpha(1 - \gamma)g(t) + 2\beta^2(1 - \gamma)^2g(t)^2 + 2\gamma\beta^2\rho^2(1 - \gamma)g(t)^2 \\ &\quad + \frac{2\gamma\beta\rho}{\sigma}g(t) + \frac{\gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)}, \\ L_2(t) &= (1 - \gamma)h'(t) + \alpha(1 - \gamma)h(t) + 2\beta^2(1 - \gamma)^2g(t)h(t) + 2\gamma(1 - \gamma)\beta^2\rho^2g(t)h(t) \\ &\quad + \frac{2\gamma(\mu - r)\beta\rho}{\sigma}g(t) + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma}h(t) + \frac{\gamma(\mu - r)}{\sigma^2(1 - \gamma)}, \\ L_3(t) &= (1 - \gamma)\frac{f'(t)}{f(t)} + r\gamma + \beta^2(1 - \gamma)g(t) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)^2\beta^2h(t)^2 + \frac{1}{2}\gamma(1 - \gamma)\beta^2\rho^2h(t)^2 \\ &\quad + \frac{\gamma(\mu - r)\beta\rho}{\sigma}h(t) + \frac{\gamma(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma)}. \end{aligned}$$

要使等式 (18) 恒成立, 只需令式中 m^2, m 的系数及常数项恒为零, 即 $L_1(t) = 0, L_2(t) = 0, L_3(t) = 0$, 化简可得

$$g'(t) + 2\beta^2(1 - (1 - \rho^2)\gamma)g^2(t) + 2\left(\alpha + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}\right)g(t) + \frac{\gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)^2} = 0, \quad (19)$$

$$h'(t) + \left[\alpha + 2\beta^2(1 - (1 - \rho^2)\gamma)g(t) + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}\right]h(t) + \frac{2\gamma(\mu-r)\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}g(t) + \frac{\gamma(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)^2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + \beta^2g(t) + \frac{1}{2}\beta^2(1 - (1 - \rho^2)\gamma)h^2(t) + \frac{\gamma(\mu-r)\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}h(t) + \frac{\gamma(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)^2} + \frac{\gamma}{1-\gamma}r = 0. \quad (21)$$

我们发现 (19) 是一般的 Riccati 方程. 令

$$\Delta = 4\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)} - \frac{\beta^2}{\sigma^2(1-\gamma)}\right),$$

$$k = -\left(\alpha + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}\right), \quad y_1 = \frac{2k + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad y_2 = \frac{2k - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

通过分离变量求解 (19) 可得

$$g(t) = \frac{1}{2(\beta^2(1-\gamma) + \gamma\beta^2\rho^2)} \overline{g(t)}, \quad (22)$$

其中

$$\overline{g(t)} = \begin{cases} \frac{e^{(y_1-y_2)(T-t)} - 1}{e^{(y_1-y_2)(T-t)} - \frac{y_2}{y_1}} y_2, & \Delta > 0, \quad \left|\frac{y_2}{y_1}\right| < 1, \quad T < \frac{\ln \frac{y_2}{y_1}}{\sqrt{\Delta}}, \\ \frac{y_1^2(T-t)}{y_1(T-t) + 1}, & \Delta = 0, \quad T < \alpha + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}, \\ \frac{k^2 + \frac{\Delta^2}{4}}{k + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cot \frac{(T-t)\sqrt{-\Delta}}{2}}, & \Delta < 0, \quad T < \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{-2k}{\sqrt{-\Delta}}. \end{cases}$$

将 (22) 代入 (20) 中, 求解可得 $h(t)$ 的表达形式为

$$h(t) = e^{\int_t^T I_1(s) ds} \left[\int_t^T I_2(s) e^{-\int_s^T I_1(v) dv} ds \right], \quad (23)$$

其中

$$I_1(t) = \alpha + 2\beta^2(1-\gamma)g(t) + 2\gamma\beta^2\rho^2g^2(t) + \frac{\gamma\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)},$$

$$I_2(t) = \frac{2\gamma(\mu-r)\beta\rho}{\sigma(1-\gamma)}g(t) + \frac{\gamma(\mu-r)}{\sigma^2(1-\gamma)^2}.$$

进一步, 将 (22) 和 (23) 代入 (21), 可求得 $f(t)$ 的表达形式为

$$f(t) = e^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}r + \frac{\gamma(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)^2}\right)(T-t) + \int_t^T I_3(s) ds}, \quad (24)$$

其中

$$I_3(t) = \beta^2 g(t) + \frac{1}{2} \beta^2 (1 - (1 - \rho^2) \gamma) h^2(t) + \frac{\gamma(\mu - r) \beta \rho}{\sigma(1 - \gamma)} h(t).$$

总结上面的分析过程, 我们得到如下引理.

引理 1 偏微分方程 (15) 的解为 $q(t, m) = f(t)^{1-\gamma} e^{(1-\gamma)(g(t)m^2 + h(t)m)}$, 其中 $g(t), h(t), f(t)$ 分别由 (22)–(24) 给出.

根据 (11) 和引理 1, 我们知道

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{x - b(t)}{1 - \gamma}, \quad \frac{V_{mx}}{V_{xx}} = -(2g(t)m + h(t))(x - b(t)).$$

将上述式子代入 (12), 根据定理 1, 我们得到优化问题 (7) 的最优投资策略

$$\pi^*(t) = \left[\frac{\mu + m(t) - r}{1 - \gamma} + \beta \sigma \rho (2g(t)m(t) + h(t)) \right] \frac{x - b(t)}{x \sigma^2}.$$

至此, 我们得到了本节的主要结果, 即优化问题 (7) 的最优值函数和最优投资策略的解析形式.

定理 2 在效用函数为 $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ 的情形下, 优化问题 (7) 的最优值函数为

$$V(t, x, m) = f(t)^{1-\gamma} e^{(1-\gamma)(g(t)m^2 + h(t)m)} \frac{(x - b(t))^\gamma}{\gamma}, \quad (25)$$

相应的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \left[\frac{\mu + m(t) - r}{1 - \gamma} + \beta \sigma \rho (2g(t)m(t) + h(t)) \right] \frac{x - b(t)}{x \sigma^2}, \quad (26)$$

其中 $b(t), f(t), g(t), h(t)$ 分别由 (16), (22)–(24) 给出.

注 1 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, $m(t) \equiv 0$, 此时风险资产的价格过程退化为标准几何布朗运动, 最优投资策略为 $\pi^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} \frac{x - b(t)}{x}$. 容易看出, 随着 t 的增大, $b(t)$ 逐渐增大, 从而 $\pi^*(t)$ 会逐渐减小, 即随着时间的推移, DC 计划参与者投资在风险资产上的资金比例逐渐减少.

注 2 假若在 $t = 0$ 时一次性支付养老保险费, 且未来没有其它的缴费进入基金资产, 即 $c = 0$, 我们得到优化问题 (7) 的最优投资策略

$$\pi^*(t) = \frac{\mu + m(t) - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} + \frac{\beta \sigma \rho (2g(t)m(t) + h(t))}{\sigma^2},$$

其中 $g(t), h(t)$ 分别由 (22), (23) 表示. 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, $m(t) \equiv 0$, 从而最优投资策略和 [3] 的结果相同, 因此本文推广了 [3] 的结论.

3 数值算例

本节主要分析风险资产的瞬时随机收益率 $m(t)$ 对最优投资策略的影响. 为了分析方便, 我们只讨论 $\Delta > 0$ 的情况, 对于 $\Delta < 0$ 与 $\Delta = 0$ 的情况可作类似讨论.

因为

$$\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial m(t)} = \left(\frac{1}{1-\gamma} + 2\sigma\beta\rho g(t) \right) \frac{x-b(t)}{x\sigma^2},$$

从(22)容易看出 $g(t) < 0$, 则当 $\beta\rho < 0$ 或当 $\beta\rho > 0$ 且 $1 + \frac{1}{2\sigma\beta\rho g(t)} < \gamma < 1$ 时, $\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial m(t)} > 0$, 说明投资在风险资产上的财富比例随着 $m(t)$ 的增大而增大; 这揭示了在市场状态向良性发展时, 投资者会增大风险资产上的投资比例. 当 $\beta\rho > 0$ 且 $\gamma < 1 + \frac{1}{2\sigma\beta\rho g(t)}$ 时, $\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial m(t)} < 0$, 说明在此情形下, 投资在风险资产上的投资比例随着 $m(t)$ 的增大而减小. 以上分析说明 $m(t)$ 对投资比例的影响, 不仅与 $\beta\rho$ 有关而且和相对风险厌恶系数 $1-\gamma$ 的取值有关. 特别, 当 $\rho = 0$ 时,

$$\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial m(t)} = \frac{1}{1-\gamma} \frac{x-b(t)}{x\sigma^2} > 0. \quad (27)$$

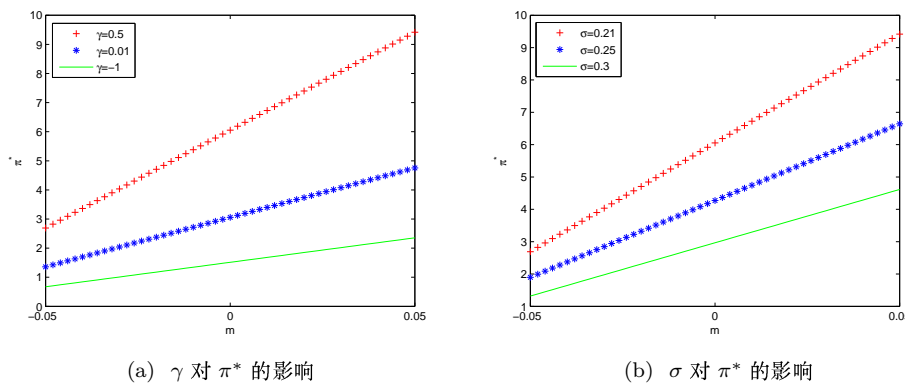
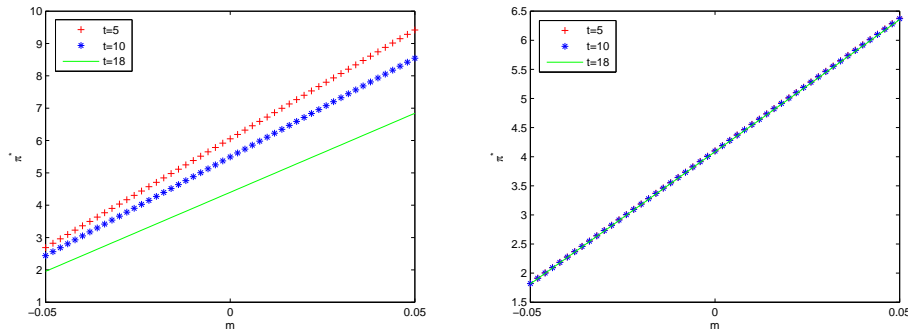


图 1 当 $\rho = 0$, $t = 5$ 时, 参数 γ 及风险资产的波动率 σ 对最优投资策略 π^* 的影响

接下来, 以 $\rho = 0$ 为例, 具体分析 $m(t)$ 对投资策略影响程度的变化. 若无其它特殊说明, 各参数的取值为 $r = 0.03$, $\mu = 0.12$, $\sigma = 0.21$, $\gamma = 0.5$, $x = 1$, $T = 20$. 由(27)知, 当 $m(t)$ 增大时投资者将增大投资在风险资产上的财富比例, 且增加的程度与相对风险厌恶系数 $1-\gamma$ 、风险资产的波动率 σ , 初始财富和时间取值有密切关系. 如图 1 所示, γ 越大投资在风险资产上的财富比例越大, 而随着 σ 的增大减少投资比例. 图 1(a) 说明风险厌恶程度低的投资者愿意投资较多的财富在风险资产上, 图 1(b) 显示最优投资策略对风险源的波动很敏感, 即在相同的市场状态下, 当 σ 发生很小的波动时, 投资策略做了很大的调整. 图 2 是初始财富 $x = 1$ 和 $x = 100$ 的情形下, 在时刻 $t = 5, 10, 18$ 时, $m(t)$ 对最优投资比例的影响. 从图 2 中发现当市场向良性状态发展 (即 $m(t)$ 增大) 时, 投资在风险资产上的财富比例呈上升趋势; 当初始财富比较小时, 从图 2(a) 可以发现投资在风险资产上的财富比例的递增程度随时间的推移而减弱; 当市场状态不变时随时间的推移投资在风险资产上的投资比例反而减少, 这与 [16] 的结论一致. 当初始财富足够大时, 从图 2(b) 中发现三条曲线几乎完全重合在一起, 这说明在相同的市场状态下, 最优的投资策略几乎不会因时间的推移而变化. 这反映了 OU 过程对投资产生的

积极影响, 即当市场状态好时, DC 计划参与者增加投资比例, 不需要考虑是否接近退休时刻.



(a) 初始财富 $x = 1$ 的情况

(b) 初始财富 $x = 100$ 的情况

图 2 当 $\rho = 0$ 时, 初始财富 x 与时间 t 对最优投资策略 π^* 的影响

4 结束语

本文考虑了 DC 计划的最优投资问题. 特别地, 文章引入了一个 OU 过程刻画风险资产的瞬时收益率, 反映市场状态的好坏程度. 文中资本市场由无风险资产和一个风险资产组成. Liang 等^[13] 也采用 OU 过程研究了保险公司的再保险和投资问题, 但不同的是, 他们的效用函数是负指数效用, 而我们以最大化终端财富的 CRRA 效用为目标研究 DC 型养老金计划的最优投资, 利用随机控制的方法, 通过求解相应的 HJB 方程得到了最优投资策略及最优值函数的解析形式. 为更好分析反映市场状态的变量 $m(t)$ 对最优策略的影响, 在第 3 节给出了数值算例. 我们发现状态变量 $m(t)$ 对最优投资策略的影响依赖于两种风险源的相关系数及投资者风险厌恶程度. 特别地, 我们具体分析了相关系数为零的情形, 状态变量 $m(t)$ 对最优投资策略产生着积极的影响, 其影响程度受风险厌恶程度、风险资产的波动率、初始财富及时间的影响; 而且, 当初始财富足够大时, 在相同的市场状态下, 最优投资策略几乎与时间无关, 即不再是生活风格 (lifestyle) 投资策略. 这为资金雄厚的投资者提供了有效的投资导向.

本文为 DC 计划参与者提供了有效的投资策略. 一方面参与者可以根据此策略预期退休时刻的效用, 另一方面也可以制定一个达到预期效用的计划, 即根据退休时的效用, 计算出每年应该缴纳的合适金额. 而且当 $c = 0$ 时, 本文退化为不参加养老保险的情形, 为普通的投资者提供了投资依据.

本文为方便得到解析解, 只考虑了一种风险资产且工资设为定值, 这是本文的不足之处. 事实上, 工资收入是在不停变化的. 因此, 在以后的工作中, 我们可以试着引入随机过程刻画工资收入, 考虑多种风险资产的最优投资问题, 也可以考虑零息债券以及通货膨胀的影响等等. 另外, 还可以考虑均值 - 方差准则下基于 Orenstein-Uhlenbeck 模型的 DC 计划的最优投资问题, 我们将在另文中详细研究之.

参 考 文 献

- [1] Haberman S, Vigna E. Optimal Investment Strategies and Risk Measures in Defined Contribution Pension Schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2002, 31: 35–69
- [2] Thomson R J. The Use of Utility Functions for Investment Channel Choice in Defined Contribution Retirement Fund. *British Actuarial Journal*, 2003, 9: 653–709
- [3] Devolder P, Bosch P M, Dominguez F I. Stochastic Optima Control of Annuity Contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, 33: 227–238
- [4] Gerrard R, Haberman S, Vigna E. Optimal Investment Choices Postretirement in a Defined Contribution Pension Scheme. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, 35: 321–342
- [5] Gerrard R, Haberman S, Vigna E. The Management of Decumulation Risks in a Defined Contribution Pension Plan. *North American Actuarial Journal*, 2006, 10: 84–110
- [6] Xiao J W, Hong Z, Qin C L. The Constant Elasticity of Variance (CEV) Model and the Legendre Transform-dual Solution for Annuity Contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40: 302–310
- [7] Gao J W. Optimal Portfolios for DC Pension Plans under a CEV Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44: 479–490
- [8] Lakner P. Utility Maximization with Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 1995, 56: 247–273
- [9] Lakner P. Optimal Trading Strategy for an Investor: the Case of Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 1998, 76: 77–97
- [10] Rishel R. Optimal Portfolio Management with Partial Observation and Power Utility Function. In: *Stochastic Analysis, Control, Optimazation and Applications: Volume in Honor of W. H. Fleming*, Birkhäuser, 1999, 605–620
- [11] Bai L H, Guo J Y. Utility Maximization with Partial Information: the HJB Equation Approach. *Frontiers of Mathematics in China*, 2007, 2: 527–538
- [12] Baev A V, Bondarev B V. On the Ruin Probability of an Insurance Company Dealing in a BS-market. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2007, 74: 11–23
- [13] Liang Z B, Yuen K, Guo J Y. Optimal Proportional Reinsurance and Investment in a Stock Market with Ornstein-Uhlenbeck Process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 49: 207–215
- [14] Booth P M, Yakubov Y. Investment Policy for Defined Contribution Pension Scheme Members Close to Retirement: an Analysis the “lifestyle” Concept. *North America Actuarial Journal*, 2000, 4: 1–19
- [15] Fleming W H, Soner H M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993
- [16] Haberrmn S, Vigna E. Optimal Investment Strategy for Defined Contribution Pension Schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, 28: 233–262

Optimal Investment Strategy under Ornstein-Uhlenbeck Model for a DC Pension Plan

GU AILING

(*School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275*)

(*School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520*)

(*E-mail: ailing727@sohu.com*)

LI ZHONGFEI

(*Sun Yat-sen Business School, Research Center for Financial Engineering and Risk Management,*

Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275)

(*E-mail: lnslzf@mail.sysu.edu.cn*)

ZENG YAN

(*Lingnan (University) College, Research Center for Financial Engineering and Risk Management,*

Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275)

Abstract This paper studies an optimal portfolio strategy under Ornstein-Uhlenbeck model for an investor whose target is to maximize CRRA utility of the terminal wealth in a defined contribution (DC) pension plan. The investor is allowed to invest in a risk-free asset and a risky asset. The instantaneous return rate of the risky asset is driven by Ornstein-Uhlenbeck process, which can reflect the states of the market. By applying stochastic control theory, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation and verification theorem are provided, and the explicit expressions of the optimal investment strategy and the optimal value function are obtained. Moreover, the impact of the instantaneous return rate of the risky asset on the optimal investment strategy is analyzed. In particular, we find that the proportion invested in the risky asset increases when the state of the market becomes better and that at the same market state, the optimal investment proportion is almost independent of time when the initial wealth is big enough.

Key words defined contribution pension plan; optimal investment strategy;
Ornstein-Uhlenbeck process; Hamilton-Jacobi-Bellman equation

MR(2000) Subject Classification 62G05; 62N015

Chinese Library Classification O221