第 36 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 2
2013 年 3 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　March, 2013

Dirichlet 函数类的 Fejér 算子逼近 *

陈英伟　　王志军　　王占京

(河北经贸大学数统学院，石家庄 050061)

(E-mail: cyingwei@mail.ustc.edu.cn)

摘　要　对 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球 $\mathbb{B}_n$ 上的 Dirichlet 类 $\mathcal{D}_p$, 得到与 Hardy 空间 H^p 的包含关系，并获得其精确的多项式逼近阶和以 Hardy 空间度量的 Fejér 算子逼近的一个上界估计.

关键词　Dirichlet 类;　Hardy 空间；多项式逼近;　Fejér 算子

MR(2000) 主题分类　41A17; 32A36

中图分类　O174.41

1　引言

令 $H(U)$ 为复单位圆盘 U 上全体全纯函数的集合.　Dirichlet 类 $\mathcal{D}_p(U)$ 定义为

$$\mathcal{D}_p(U) := \Big\{f \in H(U) : \|f\|^p_{\mathcal{D}_p} = \int_U |f'|^p \,\mathrm{d}v \le 1,\ 1 \le p < \infty\Big\},$$

其中 $\mathrm{d}v$ 为 U 上规范的 Lebesgue 测度.

Hardy 空间 $H^p(U)$ 是由所有全纯函数 f 构成且满足

$$||f||_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho w)|^p \,\mathrm{d}\sigma(w)\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 为单位圆周 $\mathbb{T} = \partial U$ 上规范的 Lebesgue 测度．易知 [1,2]

$$\mathcal{D}_p \subset H^p.$$

对任 $f \in H(U)$ 都存在 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \qquad a_j = \frac{f^j(0)}{j!}, \qquad z \in U.$$

本文 2012 年 7 月 12 日收到．2013 年 3 月 6 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11126246,11071230) 资助项目.

Fejér 算子序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ 定义为

$$\sigma_0(f)(z)=0,$$
$$\sigma_k(f)(z):=\sum_{j=0}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{k}\Big)a_jz^j,\qquad k\in\mathbb{N}.$$

设 $\mathcal{U}$ 为 $H^p(U)$ 子集，记

$$F_k(\mathcal{U},H^p):=\sup_{f\in\mathcal{D}}\big\{||f-\sigma_k(f)||_{H^p}\big\},\qquad E_k(\mathcal{U},H^p):=\sup_{f\in\mathcal{D}}\{E_k(f)_{H^p}\},$$

其中

$$E_k(f)_{H^p}:=\inf\big\{||f-P||_{H^p}:P\in\mathcal{P}_{||-\infty}\big\},$$

$\mathcal{P}_k$ 为次数至多为 $k\in\mathbb{N}$ 的代数多项式集合.

周期函数的 Fejér 算子逼近已有较长历史 [3], 在单位圆盘上全纯函数逼近也有很多结果 [4−7].

近来， Savchuk 获得 Dirichlet 函数类通过 Fejér 算子的精确逼近：

定理 A[2] 设 $1\le p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

(a) 对任 $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\frac{1}{2}\min(p,q)}{((\frac{q}{2})(k-1)+1)^{\frac{1}{q}}}\le E_k(\mathcal{D}_p,H^p)\le F_k(\mathcal{D}_p,H^p)\le\frac{1}{((\frac{q}{2})(k-1)+1)^{\frac{1}{q}}};$$

(b) 对任 $f\in\mathcal{D}_p$,

$$||f-\sigma_k(f)||_{H^p}=o(k^{-\frac{1}{q}}),\qquad k\longrightarrow\infty.$$

但对于多复变全纯函数情况则较为复杂.

令 $H(\mathbb{B}_n)$ 表示 $\mathbb{B}_n$ 上全纯函数全体. 易知 [8]: 若 $f\in H(\mathbb{B}_n)$, 则 $f(z)$ 有齐次展开

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(z),\tag{1}$$

其中 $f_j(z)$ 为 j 次齐次多项式.

f 的径向导数定义为

$$\mathcal{R}f(z):=\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}jf_j(z).$$

分式径向导数 $\mathcal{R}^s$ $(s\ge0)$ 定义为

$$\mathcal{R}^sf(z)=\sum_{j=0}^{\infty}j^sf_j(z)=\sum_{j=1}^{\infty}j^sf_j(z).$$

Hardy 空间 $H^p := H^p(\mathbb{B}_n)$ 包含全体全纯函数 f 且满足

$$||f||_{H^p}^p := \sup_{0<r<1} \int_S |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < \infty,$$

其中 $d\sigma(\zeta)$ 为 Shilov 边界 $S = \partial\mathbb{B}_n$ 上规范的 Lebesgue 测度， H^∞ 为有界全纯函数空间，其模为

$$||f||_{H^\infty} := \sup_{z\in\mathbb{B}_n} |f(z)|.$$

令 $dv(z)$ 为 $\mathbb{B}_n$ 上规范的 Lebesgue 测度. 我们同样可定义 Dirichlet 类 $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n)$ 为

$$\mathcal{D}_p := \Big\{ f \in H(\mathbb{B}_n) : ||f||_{\mathcal{D}_p}^p := \int_{\mathbb{B}_n} |\mathcal{R}f(z)|^p \, dv(z) \le 1,\ 1 \le p < \infty \Big\}.$$

下节将验证其与 Hardy 空间的关系：

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n) \subset H^p(\mathbb{B}_n), \qquad 1 \le p < \infty.$$

和 $\mathcal{D}_p$ 一样，也考虑另一类全纯函数

$$H_p^1 := \big\{ f : f \in H(\mathbb{B}_n),\ ||\mathcal{R}f||_{H^p} \le 1 \big\}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

其显然为 $\mathcal{D}_p$ 的子集.

依照 $f(z) \in H(\mathbb{B}_n)$ 的齐次展开，我们引入 Fejér 算子序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} &\sigma_0(f)(z) = 0, \\ &\sigma_k(f)(z) := \sum_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{k}\Big) f_j(z), \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

我们仍考虑度量：

$$F_k(\mathcal{D}_p, H^p) := \sup_{f\in\mathcal{D}_p} \{||f - \sigma_k(f)||_{H^p}\}, \qquad E_k(\mathcal{D}_p, H^p) := \sup_{f\in\mathcal{D}_p} \{E_k(f)_{H^p}\}.$$

本文的主要目的是研究 Dirichlet 类 $\mathcal{D}_p$ 上的 Fejér 算子 σ_k 的逼近性质, 来比较 Fejér 算子和最佳逼近多项式依照 Hardy 空间度量逼近的有效性，即为定理 A 的拓展和推广. 同时也对另一类全纯函数 H_p^1 进行探讨.

对于正函数 f 和 g, 若存在正的常数 C 满足 $C^{-1}g \le f \le Cg$, 则记为 $f \simeq g$.

2 包含关系

为证明包含关系 $\mathcal{D}_p \subset H^p$, 先引入广义混合模空间 [9] 等概念.

一个正的连续函数 $\varphi(r)$ 在 $[0,1)$ 上称为正规的，若存在 $0 < a < b,\ 0 \le r_0 < 1$ 满足

(i) $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}$ 在 $[r_0, 1)$ 上单调递减且 $\lim\limits_{r\to 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} = 0$;

(ii) $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}$ 在 $[r_0,1)$ 上单调递增且 $\lim\limits_{r\to1^-}\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}=\infty$.

一个在 [0,1) 上正的连续函数 $\Phi(r)$, 若存在 $s\geq 0$ 满足 $(1-r^2)^s\Phi(r)$ 是正规的，则称 $\Phi(r)$ 为广义正规函数.

广义混合模空间 $H_{p,q}(\Phi)$ $(0<p,q\leq\infty)$ 定义为

$$H_{p,q}(\Phi):=\Big\{f\in H(\mathbb{B}_n):||f||^p_{H_{p,q}(\Phi)}=\int_0^1(1-r)^{ps-1}\Phi^p(r)M_q^p(r,\mathcal{R}^sf)\,\mathrm{d}r<\infty\Big\},$$

其中 $s\geq 0$, $(1-r)^s\Phi(r)$ 是正规的.

引理 2.1[9] 若 $0<p\leq 2\leq q<\infty$, 则

(i) $H_{p,p}(1)\subset H^p(\mathbb{B}_n)\subset H_{2,p}(1)$;

(ii) $H_{2,q}(1)\subset H^q(\mathbb{B}_n)\subset H_{q,q}(1)$.

定理 2.2 若 $1\leq p<\infty$, 则

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n)\subset H^p(\mathbb{B}_n).$$

证 由混合模空间 $H_{p,q}(\Phi)$ 性质 [10−12], 直接易得

$$H_{p,q}((1-r)^a)\subset H_{p,q}((1-r)^b),\qquad a\leq b \tag{2}$$

和若 $p\geq 2$ 及任 $\varepsilon>0$,

$$H_{p,q}((1-r)^a)\subset H_{2,q}((1-r)^{a+\varepsilon}),\qquad a\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

这其中使用了 Hölder 不等式.

再由引理 2.1, 可得

(i) 当 $1\leq p\leq 2$ 时,

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n)\subset H_{p,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1})\subset H_{p,p}(1)\subset H^p(\mathbb{B}_n).$$

(ii) 当 $2<p<\infty$ 时，对任 ε 满足 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 有

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n)\subset H_{p,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1})\subset H_{2,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1+\varepsilon})\subset H_{2,p}(1)\subset H^p(\mathbb{B}_n).$$

3 Fejér 算子逼近

先给出符号：

$$Q_{k,\rho}(f)(z):=\sum_{j=0}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)}\Big)f_j(z),\qquad z\in\mathbb{B}_n. \tag{4}$$

Poisson 核

$$P(re^{it},e^{i\theta})=\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

令 $f_\zeta(\lambda)=f(\lambda\zeta)$, 其中 $z=\lambda\zeta$, $\lambda\in U$, $\zeta\in S$. 易知若 $f(z)\in H(\mathbb{B}_n)$, 则 $f_\zeta(\lambda)\in H(U)$. 从 (4) 式易得

$$Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\lambda):=Q_{k,\rho}(f)(\lambda\zeta)=\sum_{j=0}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)}\Big)f_j(\zeta)\lambda^j.$$

引理 3.1 设 $f_\zeta\in H(U)$, 则对任 $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,1)$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-f(0)=\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{f'_\zeta(re^{it})}{1-re^{i(\theta-t)}}\,\mathrm{d}t\,r\,\mathrm{d}r, \tag{5}$$

$$Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})-f(0)=\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^je^{ij(\theta-t)}\,\mathrm{d}t\,r\,\mathrm{d}r. \tag{6}$$

证 仅证明 (6) 式，因为 (5) 式证明类似，甚至更简单.

由 (1) 式可知

$$f_\zeta(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(\zeta)\lambda^j.$$

故

$$f'_\zeta(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}jf_j(\zeta)\lambda^{j-1},$$

则

$$f'_\zeta(re^{it})=\sum_{j=1}^{\infty}jf_j(\zeta)r^{j-1}e^{it(j-1)}.$$

根据三角函数积分正交性可得

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^je^{ij(\theta-t)}\,\mathrm{d}t\,r\,\mathrm{d}r\\
=&\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=1}^{k-1}(1-r^{2(k-j)})r^{j-1}e^{-i(j-1)t}e^{i(j-1)\theta}\,\mathrm{d}t\,r\,\mathrm{d}r\\
=&\sum_{j=1}^{k-1}\int_0^\rho 2jf_j(\zeta)r^{2j-1}(1-r^{2(k-j)})e^{ij\theta}\,\mathrm{d}r\\
=&\sum_{j=1}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)}\Big)f_j(\zeta)\rho^{2j}e^{ij\theta}\\
=&Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})-f(0).
\end{aligned}$$

引理 3.2 设 $f_\zeta\in H(U)$, 则对任 $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,1)$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})=\frac{e^{ik\theta}}{\pi}\int_0^\rho r^k\int_0^{2\pi}f'_\zeta(re^{it})e^{-i(k-1)t}P(re^{it},e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r. \tag{7}$$

证 先来对引理 3.1 中 (6) 式的核函数变换如下:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^j e^{ij(\theta-t)}\\
=&\sum_{j=0}^{k-2} r^j e^{ij(\theta-t)} - r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}\sum_{j=0}^{k-2} r^j e^{-ij(\theta-t)}\\
=&\frac{1-r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} - r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}\frac{1-r^{k-1}e^{-i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}\\
=&\frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}} + \frac{r^{2k-1}e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}\\
=&\frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}} - r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}P(re^{it},e^{i\theta}) + \frac{r^{2k-1}e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}.
\end{aligned}
$$

在 (6) 式中用所获得表达式进行替换，并利用 (5) 式和关系式

$$\int_0^{2\pi} f'_\zeta(re^{it})\frac{e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}\,\mathrm{d}t = 0,$$

我们可得 (7) 式.

引理 3.3[8,13] 设函数 f 定义在 S 上且仅依赖变量 $z_1,\cdots,z_k$, 其中 $1\le k<n$. 则 f 可认为定义在 $\mathbb{B}_k$ 上而且

$$\int_S f\,\mathrm{d}\sigma = \binom{n-1}{k}\int_{\mathbb{B}_k}(1-|w|^2)^{n-k-1}f(w)\,\mathrm{d}v_k(w),$$

其中 $\mathbb{B}_k$ 为 $\mathbb{C}^k$ 上的开单位球， dv_k 为 $\mathbb{B}_k$ 上规范的体积测度.

同时也需要逼近论中的对偶关系.

引理 3.4[14] 设 $\mathcal{X}$ 为具有范数 $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ 的赋范线性空间， $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 中闭子空间, $f\in\mathcal{X}\backslash\mathcal{Y}$, 则

$$E(f,\mathcal{Y}) := \inf_{g\in\mathcal{Y}}||f-g||_{\mathcal{X}} = \sup_{\lambda\in\mathcal{Y},\,||\lambda||=1}\lambda(f),$$

其中 $\mathcal{Y}^\perp := \{\lambda\in\mathcal{X}^*:\lambda(g)=0,\ \forall\, g\in\mathcal{Y}\}$.

取

$$h(z) = \frac{z_1^k}{k}\Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)\Gamma(n+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

由引理 3.3, 可得

$$
\begin{aligned}
||z_1^k||_{\mathcal{D}_p} =&k\Big(2n\int_0^1 r^{2n-1+kp}\,\mathrm{d}r\int_S|\zeta_1|^{kp}\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\Big)^{\frac{1}{p}}\\
=&k\Big(\frac{2n}{2n+kp}\int_S|\zeta_1|^{kp}\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\Big)^{\frac{1}{p}}\\
=&k\Big(\frac{2n}{2n+kp}(n-1)\int_U|w|^{kp}(1-|w|^2)^{n-2}\,\mathrm{d}v(w)\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$=k\Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+n+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $||h(z)||_{\mathcal{D}_p}=1$, 故 $h(z)\in\mathcal{D}_p(\mathbb{B}_n)$. 下将利用 $h(z)$ 来给出 $E_k(\mathcal{D}_p,H^p)$ 的一个精确下界.

定理 3.5 设 $1\le p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

(a) 对任 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $k>\frac{2n}{p}$, 有

$$\begin{aligned}k^{-\frac{1}{q}}\simeq&\frac{\Gamma(k)}{n^{\frac{1}{p}}\Gamma(k+n)}\cdot\Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kq}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\ \le&E_k(\mathcal{D}_p,H^p)\le F_k(\mathcal{D}_p,H^p)\le\frac{((\frac{q}{2})(k-2n)+n)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}}\simeq k^{-\frac{1}{q}};\end{aligned}$$

(b) 对任 $f\in\mathcal{D}_p$, 有

$$||f-\sigma_k(f)||_{H^p}=o(k^{-\frac{1}{q}}),\qquad k\longrightarrow\infty.$$

证 先来证明 (a).

由对偶关系 (即引理 3.4) 知

$$E_k(h,H^p)=\sup\big\{|\langle h,g\rangle|:\ g\in L_{q,k}(S),\ \|g\|_{L_q(S)}=1\big\},$$

其中

$$\begin{aligned}&\langle h,g\rangle:=\int_S h\bar{g}\,\mathrm{d}\sigma,\\ &L_{q,k}(S):=\big\{g\in L_q(S):\langle g,\zeta^m\rangle=0,\ |m|=0,1,\cdots,k-1\big\}.\end{aligned}$$

取

$$g(\zeta)=\zeta_1^k\cdot\Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{nq}{2}+1)\Gamma(n)}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

注意到 [6]

$$\int_S\zeta^m\bar{\zeta}^l\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)=\begin{cases}0, & m\ne l,\\ \dfrac{(n-1)!m!}{(n-1+|m|)!}, & m=l,\end{cases}$$

其中 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, $l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 为多重指标, $|m|=m_1+m_2+\cdots+m_n$. 易知 $g\in L_{q,k}(S)$ 及 $||g||_{L_q}=1$.

故

$$\begin{aligned}E_k(\mathcal{D}_p,H^p)\ge&E_k(h,H^p)\ge\big|\langle h,g\rangle\big|\\ &=\frac{\Gamma(k)}{n^{\frac{1}{p}}\Gamma(k+n)}\cdot\Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kq}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\simeq k^{-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

上最后一步利用了

$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \simeq k^{a-b}, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

现给出 $F_k(\mathcal{D}_p, H^p)$ 的一个精确上界.

对任 $f\in\mathcal{D}_p$, 由引理 3.2 和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
&|f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-Q_{k,p}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})|^p\\
\leq&\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|f'_\zeta(re^{it})|r^kP(re^{it},e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\Big)^p\\
\leq&\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|f'_\zeta(re^{it})|^pP(re^{it},e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,r^{2n-1+p}\,\mathrm{d}r\Big)\\
&\times\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}r^{(k-2n+1-p)q}P(re^{it},e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,r^{2n-1+p}\,\mathrm{d}r\Big)^{\frac{p}{q}}\\
\leq&\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|f'_\zeta(re^{it})|^pP(re^{it},e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,r^{2n-1+p}\,\mathrm{d}r\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

上最后一步利用了假设 $k>\frac{2n}{p}$, 这意味着 $kq-2nq+2n>0$.

在 $[0,2\pi]$ 上对 θ 积分并利用 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\\
\leq&\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|f'_\zeta(re^{it})|^pdt\,r^{2n-1+p}\,\mathrm{d}r\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

在 S 上积分并再次利用 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}
&\int_S|f(\rho^2\zeta)-Q_{k,\rho}(f)(\rho^2\zeta)|^p\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
=&\int_S\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
\leq&\int_S\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|f'_\zeta(re^{it})|^p\,\mathrm{d}t\,r^{2n-1+p}\,\mathrm{d}r\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
=&\int_S\frac{1}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}|\mathcal{R}f(re^{it}\zeta)|^p\,\mathrm{d}t\,r^{2n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}\\
=&2\int_0^1\int_S|\mathcal{R}f(r\zeta)|^p\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,\mathrm{d}r\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}\\
=&\frac{1}{n}||f||^p_{\mathcal{D}_p}\cdot\Big(\frac{q}{2}(k-2n)+n\Big)^{-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

故对 $f\in\mathcal{D}_p$,

$$||f(\rho\cdot)-Q_{k,\rho}(f)(\rho\cdot)||_{L_p(S)}\leq\frac{((\frac{q}{2})(k-2n)+n)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}}, \qquad \forall\,\rho\in[0,1).$$

对上不等式取极限 $\rho \to 1^-$. 考虑到极限关系

$$Q_{k,\rho}(f)(\rho\cdot) \longrightarrow \sigma_k(f)(\cdot),$$

并利用 Riesz 定理 [13]

$$||f(\cdot) - f(\rho\cdot)||_{L_p(S)} \longrightarrow 0, \qquad \rho \to 1^-,$$

最后得到

$$||f - \sigma_k(f)||_{H^p} \le \frac{((\frac{q}{2})(k-2n)+n)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}}.$$

因为 f 为 $\mathcal{D}_p$ 中任给函数，故

$$||F_k(\mathcal{D}_p, H^p)|| \le \frac{((\frac{q}{2})(k-2n)+n)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}} \simeq k^{-\frac{1}{q}}.$$

(b) 同上，令 f 为 $\mathcal{D}_p$ 中任给函数. 由引理 3.2, 利用上面同样方法可得

$$\begin{aligned}
&\int_S |f(\rho^2\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
=&\int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\theta}\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2 e^{i\theta}\zeta)|^p \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
\le&\int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} |\mathcal{R}f(re^{it}\zeta)| r^{k-1} P(re^{it}, e^{i\theta})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\Big|^p \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\\
\le&2\int_0^1 r^{k-1}\int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}r \cdot \Big(\frac{2}{k}\Big)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned} \tag{8}$$

其中上式最后一步由 Hölder 不等式得到.

故，采用前面 (a) 的相同证明，可得估计

$$k^{\frac{1}{q}}||f - \sigma_k(f)||_{H^p} \le 2\Big\{\int_0^1 r^{k-1}\int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}r\Big\}^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

最后指出，对任固定的 $\varepsilon > 0$ 和所有 $k \ge 2n$, 都存在固定的 R, $0 < R < 1$, 满足

$$\int_R^1 r^{k-1}\int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}r \le \varepsilon. \tag{10}$$

注意到

$$\int_0^R r^{k-1}\int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}r \le R^{k-2n}||f||_{\mathcal{D}_p} \le R^{k-2n}. \tag{11}$$

故由 (9)–(11), 可得

$$k^{\frac{1}{q}}||f - \sigma_k(f)||_{H^p} \le 2(\varepsilon + R^{k-2n})^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \qquad k \longrightarrow \infty.$$

定理得证.

定理 3.6 设 $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任 $k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
k^{-1} \simeq & \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+n)} \cdot \Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kq}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\le & E_k(H_p^1, H^p) \le F_k(H_p^1, H^p) \le \frac{2}{k}.
\end{aligned}
$$

证 取

$$
h(z) = \frac{z_1^k}{k}\Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)\Gamma(n)}\Big)^{\frac{1}{p}}
$$

和

$$
g(\zeta) = \zeta_1^k \cdot \Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{nq}{2}+1)\Gamma(n)}\Big)^{\frac{1}{q}}.
$$

容易计算出， $||h(z)||_{H_p^1}=1$, 故

$$
h(z) \in H_p^1.
$$

类似定理 3.5 中 (a) 的证明，可得

$$
\begin{aligned}
E_k(\mathcal{D}_p, H^p) \ge & E_k(h, H^p) \ge \big|\langle h, g\rangle\big| \\
= & \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+n)} \cdot \Big(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kq}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kp}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\simeq & k^{-1}.
\end{aligned}
$$

设 $f \in H_p^1$. 由于

$$
\sup_{0<r<1} \int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta) \le 1,
$$

由 (8) 式可得 $\forall \rho \in [0,1)$,

$$
\begin{aligned}
\int_S |f(\rho^2\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta) \le & 2\int_0^1 r^{k-1} \int_S |\mathcal{R}f(r\zeta)|^p \,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}r \cdot \Big(\frac{2}{k}\Big)^{\frac{p}{q}} \\
\le & \frac{2}{k} \cdot \Big(\frac{2}{k}\Big)^{\frac{p}{q}} = \Big(\frac{2}{k}\Big)^p.
\end{aligned} \tag{12}
$$

由 (12) 式，依照定理 3.5 中 (a) 的证明，取极限 $\rho \to 1^-$, 可得所需结果.

注 由定理 3.6, 我们注意到：当 $n=1$ 时，即

$$
\frac{1}{k} \le E_k(H_p^1, H^p) = F_k(H_p^1, H^p) \le \frac{2}{k}.
$$

这就与 Savchuk 在 [2] 中的结论完全一致.

参 考 文 献

[1] Garnett J B. Bounded Analytic Functions. New York: Academic Press, 1981

[2] Savchuk V V. Approximation of Functions of Dirichlet Class by Fejér Means. *Math. Notes*, 2007, 81(5): 665–670
[3] Zygmund A. Trigonometric Series, Vol. 1. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1959
[4] Pinkus A. N-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985
[5] Stechkin S B. Estimate of the Remainder of the Taylor Series for Certain Classes of Analytic Functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1953, 17(5): 461–472
[6] Storoženko È A. Approximation of Functions of Class H^p, $0<p\leq 1$. *Math. USSR Sb.*, 1978, 34(4): 527–545
[7] Zygmund A. On the Degree of Approximation of Functions by Fejér Means. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, 51: 274–278
[8] Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer-Verlag, 1980
[9] Ren G B. Mixed Norm Spaces, Their Bergman Type Operators and Coefficient Multipliers. Hefei: USTC, 1997
[10] Jevtic M. Bounded Projections and Duality in Mixed-norm Spaces of Analytic Functions. *Complex Variables*, 1987, 8(3-4): 293–301
[11] Shi J H. Duality and Multipliers of Mixed Norm Spaces in the Ball (I). *Complex Variables*, 1994, 25(2): 119–130
[12] Shi J H, Ren G B. Coefficient Multipliers of Mixed Norm Spaces in the Ball. *Science in China, Ser. A*, 2006, 49(11): 1491–1503
[13] Zhu K H. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Berlin: Springer-Verlag, 2004
[14] Devore R A, Lorentz G G. Construction Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993

Approximation of Fejér Means for Dirichlet Class

CHEN Yingwei WANG Zhijun WANG Zhanjing

(*College of Mathematics and Statistics,*
Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang 050061)

(*E-mail: cyingwei@mail.ustc.edu.cn*)

Abstract For Dirichlet class $\mathcal{D}_p$ in the unit ball $\mathbb{B}_n$ of $\mathbb{C}^n$, we get the inclusion relation between Dirichlet class and Hardy space, and then obtain the exact orders of best polynomial approximations and of upper bounds for deviations of Fejér means in the metric of Hardy space H^p.

Key words Dirichlet class; Hardy space; polynomial approximation; Fejér means
MR(2000) Subject Classification 41A17; 32A36
Chinese Library Classification O174.41