

# 一类变式 Boussinesq 系统的行波解\*

邓圣福

(湛江师范学院数学与计算科学学院, 湛江 524048)

(E-mail: sf\_deng@sohu.com)

郭柏灵

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

**摘 要** 本文研究一类变式 Boussinesq 系统

$$\eta_t + ((1 + \alpha\eta)w)_x - \frac{\beta}{6}w_{xxx} = 0, \quad w_t + \alpha ww_x + \eta_x - \frac{\beta}{2}w_{xxt} = 0,$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  都是正常数. 许多逼近模型都能从此系统中被推导出, 比如 Boussinesq 系统和两分量 Camassa-Holm 系统等. 本文利用平面动力系统方法研究它的行波解及相图, 得到了孤立波解, 广义扭波解, 广义反扭波解, 紧孤立波解和周期波解, 并给出了这些解的数值模拟.

**关键词** 孤立波解; 广义(反)扭波解; 紧孤立波解; 周期波解

**MR(2000) 主题分类** 34C25; 34C37; 76B25

**中图分类号** O175.12

## 1 引言

在研究重力场作用下无粘性, 不可压, 有自由表面的流体问题时, Whitham<sup>[1]</sup> 推导出一类变式 Boussinesq 系统(见 [1] 中第 465 页的 (13.101) 式)

$$\eta_t + ((1 + \alpha\eta)w)_x - \frac{\beta}{6}w_{xxx} = 0, \quad w_t + \alpha ww_x + \eta_x - \frac{\beta}{2}w_{xxt} = 0, \quad (1.1)$$

其中  $\alpha = \frac{a}{h}$ ,  $\beta = \frac{h^2}{l^2}$ ,  $a$  是振幅,  $h$  是深度,  $l$  是波长. 利用 (1.1), Whitham<sup>[1]</sup> 对流体问题作了进一步逼近, 得到下面系统(见 [1] 中第 466 页的第一个系统)

$$\eta_t + ((1 + \alpha\eta)w)_x = 0, \quad w_t + \alpha ww_x + \eta_x - \frac{\beta}{3}w_{xxt} = 0. \quad (1.2)$$

本文 2010 年 9 月 13 日收到. 2012 年 7 月 21 日收到修改稿.

\* 教育部留学回国人员科研启动基金 ((2012)940), 广东省自然科学基金博士启动 (S2011040000464), 广东省高等学校科技创新 (2012KJCX0074), 湛江师范学院博士专项基金 (ZL1101) 资助项目.

由系统 (1.2), Whitham<sup>[1]</sup> 推导出 Boussinesq 系统和 KdV 方程. Constantin 和 Ivanov<sup>[2]</sup> 也从系统 (1.2) 推导出了许多著名的方程, 如 Hunter-Saton 方程, Camassa-Holm 方程和两分量 Camassa-Holm 系统等. 这些方程的行波解已被广泛地研究, 比如参见 [3-8]. 本文主要研究系统 (1.1) 的行波解. 利用平面动力系统方法我们不仅给出它的相图, 也给出孤立波解, 广义扭波解, 广义反扭波解, 紧孤立波解和周期孤波解的参数表达形式. 最后用 Mathematica 软件, 我们模拟这些解, 从而验证了理论的正确性.

## 2 行波系统

设系统 (1.1) 的行波解有形式:  $\eta(t, x) = \eta(\xi)$ ,  $w(t, x) = w(\xi)$ , 其中  $\xi = x - ct$ , 非零常数  $c$  表示波速. 将它们代入系统 (1.1) 中并关于  $\xi$  积分得到

$$-c\eta + (1 + \alpha\eta)w - \frac{\beta}{6}w_{\xi\xi} = A, \quad (2.1)$$

$$-cw + \frac{\alpha}{2}w^2 + \eta + \frac{c\beta}{2}w_{\xi\xi} = B, \quad (2.2)$$

其中  $A$  和  $B$  是积分常数. 从 (2.2) 式中解出  $\eta$ , 我们有

$$\eta = cw - \frac{\alpha}{2}w^2 - \frac{c\beta}{2}w_{\xi\xi} + B. \quad (2.3)$$

再由 (2.1) 式得

$$\left(-\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6}\right)w_{\xi\xi} = A - w - (\alpha w - c)\left(cw - \frac{\alpha}{2}w^2 + B\right) \triangleq f(w). \quad (2.4)$$

令  $v = w_{\xi}$ , 上面方程可写为

$$w_{\xi} = v, \quad v_{\xi} = \frac{f(w)}{-\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6}}. \quad (2.5)$$

因为  $\alpha$  和  $\beta$  都有物理意义, 我们假定它们都是正常数. 若  $c < 0$ , 容易验证在变换  $(w, \xi, A, c) \rightarrow (-w, -\xi, -A, -c)$  下系统 (2.5) 并没有改变, 所以我们只考虑  $c > 0$  的情形.

若

$$B = \frac{1 - 18c^2 + 45c^4 - 54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \quad (2.6)$$

则

$$f(w) = \left(-\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6}\right)\tilde{f}(w),$$

其中

$$\tilde{f}(w) = \frac{1}{3c^2\alpha\beta}(-3c\alpha^2w^2 + (\alpha + 6c^2\alpha)w - c + 15c^3 - 18Ac^2\alpha).$$

下面分两种情形来研究系统 (2.5):  $B$  满足 (2.6) 和  $B$  不满足 (2.6).

### 3 B 满足 (2.6)

此时, 系统 (2.5) 变为

$$w_\xi = v, \quad v_\xi = \tilde{f}(w). \quad (3.1)$$

它的首次积分为

$$H(w, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{\alpha}{3c\beta} w^3 - \frac{1+6c^2}{6c^2\beta} w^2 + \frac{1-3c(5c-6A\alpha)}{3c\alpha\beta} w. \quad (3.2)$$

对于给定的初值, 利用 (3.2) 和 [9] 中的公式, 可以得到系统 (3.1) 的精确解的参数表达形式. 现在我们给出孤立波解和周期波解的参数表达形式, 并且只考虑

$$A < \frac{1+216c^4}{216c^3\alpha}. \quad (3.3)$$

显然,  $\tilde{f}(w)$  有两个不同的根  $w_1 = \frac{1+6c^2-\sqrt{1+216c^3(c-A\alpha)}}{6c\alpha}$  和  $w_2 = \frac{1+6c^2+\sqrt{1+216c^3(c-A\alpha)}}{6c\alpha}$ , 并且  $\tilde{f}'(w_1) = \frac{\sqrt{1+216c^3(c-A\alpha)}}{3c^2\beta} > 0$  和  $\tilde{f}'(w_2) = -\frac{\sqrt{1+216c^3(c-A\alpha)}}{3c^2\beta} < 0$ . 因此, 系统 (3.1) 有两个平衡点  $(w_1, 0)$  和  $(w_2, 0)$ .  $(w_1, 0)$  是鞍点,  $(w_2, 0)$  是中心. 当  $w_1 > 0$  时, 系统 (3.1) 的相图见图 1.

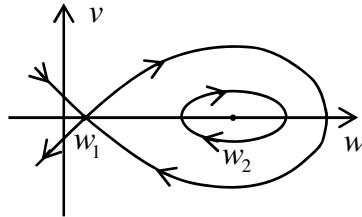


图 1 当  $w_1 > 0$  时, 系统 (3.1) 的相图.

**定理 3.7 (孤立波解)** 设 (3.3) 成立,  $B$  满足 (2.6). 取初值  $(w_0, v_0)$ , 其中  $v_0 \geq 0$ ,  $w_1 < w_0$ ,  $(w_0, v_0)$  满足  $H(w_0, v_0) = H(w_1, 0)$ , 则系统 (1.1) 有一个孤立波解  $(\tilde{\eta}_1(\xi), \tilde{w}_1(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_1$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_1(\xi) = \begin{cases} \phi_1(\xi), & \xi \in (-\infty, T_1], \\ \phi_1(-\xi + 2T_1), & \xi \in (T_1, \infty), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\phi_1(\xi) = r_0 - \left( \sqrt{r_0 - w_1} - \frac{2\sqrt{r_0 - w_1}(\sqrt{r_0 - w_1} - \sqrt{r_0 - w_0})e^{\sqrt{\frac{2\alpha}{3c\beta}}\sqrt{r_0 - w_1}\xi}}{\sqrt{r_0 - w_0} + \sqrt{r_0 - w_1} + (\sqrt{r_0 - w_1} - \sqrt{r_0 - w_0})e^{\sqrt{\frac{2\alpha}{3c\beta}}\sqrt{r_0 - w_1}\xi}} \right)^2, \quad (3.5)$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{3c\beta}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{r_0 - w_1}} \ln \left( \frac{\sqrt{r_0 - w_1} + \sqrt{r_0 - w_0}}{\sqrt{r_0 - w_1} - \sqrt{r_0 - w_0}} \right), \quad r_0 = -2w_1 + \frac{1+6c^2}{2c\alpha}. \quad (3.6)$$

证 由  $H(w, v) = H(w_1, 0)$  可知  $v = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{3c\beta}}(w - w_1)\sqrt{r_0 - w}$ . 设  $v > 0$ , 由系统 (3.1) 的第一个方程, 我们得到

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{w_0}^w \frac{du}{v} = \sqrt{\frac{3c\beta}{2\alpha}} \int_{w_0}^w \frac{1}{(u - w_1)\sqrt{r_0 - u}} du \\ &= \sqrt{\frac{3c\beta}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{r_0 - w_1}} \ln \left( \frac{\sqrt{r_0 - w_1} - \sqrt{r_0 - w}}{\sqrt{r_0 - w_1} + \sqrt{r_0 - w}} \frac{\sqrt{r_0 - w_1} + \sqrt{r_0 - w_0}}{\sqrt{r_0 - w_1} - \sqrt{r_0 - w_0}} \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

从 (3.7) 式中解出以  $\xi$  为自变量的  $w$ , 再用  $\phi_1$  替换  $w$ , 即得 (3.5). 注意到如果用  $-\xi$  代替  $\xi$ ,  $-v$  代替  $v$ , 系统 (3.1) 并不改变. 从而定理得证.

**注 3.1** 取  $c = 2, \alpha = 3, A = 0.6, \beta = 1$  和  $w_0 = 1$ . 显然 (3.3) 成立,  $B = -0.5954, w_1 = 0.1773, w_2 = 1.2116, r_0 = 1.7287$  和  $v_0 = 0.7023$ .  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 2 (1).

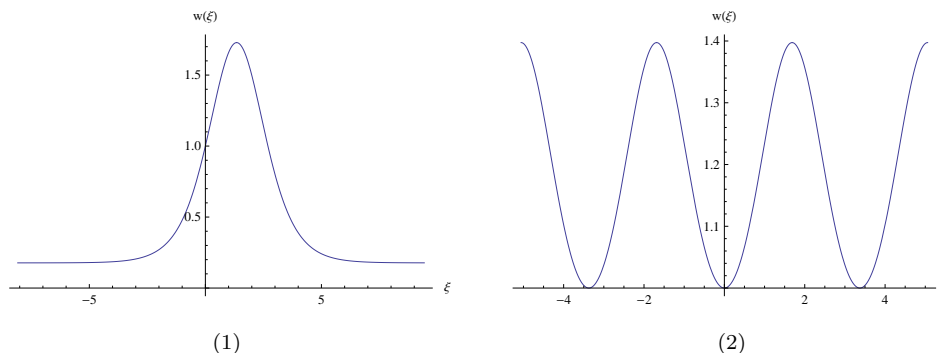


图 2 系统 (3.1) 中  $w(\xi)$  的图形. (1) 孤立波解. (2) 周期波解.

**定理 3.2** (周期波解) 设 (3.3) 成立,  $B$  满足 (2.6). 取初值  $(w_0, 0)$ ,  $w_1 < w_0 < w_2$ , 则系统 (1.1) 有一个周期波解  $(\tilde{\eta}_2(\xi), \tilde{w}_2(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_2$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_2(\xi) = \begin{cases} \phi_2(\xi - 2nT_2), & \xi \in (2nT_2, (2n + 1)T_2], \\ \phi_2(-\xi + 2nT_2), & \xi \in ((2n - 1)T_2, 2nT_2], \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\phi_2(\xi) = w_0 + \frac{(r_2 - w_0)(w_0 - r_1)\text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{6c\beta}}\sqrt{r_2 - r_1}\xi, \sqrt{\frac{r_2 - w_0}{r_2 - r_1}}\right)}{r_2 - r_1 - (r_2 - w_0)\text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{6c\beta}}\sqrt{r_2 - r_1}\xi, \sqrt{\frac{r_2 - w_0}{r_2 - r_1}}\right)}, \tag{3.9}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{6c\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{r_2 - r_1}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{r_2 - w_0}{r_2 - r_1}}\right), \tag{3.10}$$

$n$  是整数,  $r_1$  和  $r_2$  是方程  $H(w, 0) = H(w_0, 0)$  的两个解,  $r_1 < w_0 < r_2$ ,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + 6c^2 - 2c\alpha w_0}{4c\alpha} - h_1, & r_2 &= \frac{1 + 6c^2 - 2c\alpha w_0}{4c\alpha} + h_1, \\ h_1 &= \frac{\sqrt{1 + 276c^4 + 4c\alpha w_0 + 24c^3\alpha(-12A + w_0) - 4c^2(1 + 3\alpha^2 w_0^2)}}{4c\alpha}, \end{aligned}$$

$F$  是第一类椭圆积分, 即  $F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ .

证 由  $H(w, v) = H(w_0, 0)$  得  $v = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{3c\beta}} \sqrt{(w - r_1)(w - w_0)(r_2 - w)}$ . 利用系统 (3.1) 的第一个方程和 [2] 中的公式, 对  $v > 0$  我们得到

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{w_0}^w \frac{du}{v} = \sqrt{\frac{3c\beta}{2\alpha}} \int_{w_0}^w \frac{1}{\sqrt{(w - r_1)(w - w_0)(r_2 - w)}} du \\ &= \sqrt{\frac{6c\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{r_2 - r_1}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(r_2 - r_1)(w - w_0)}{(r_2 - w_0)(w - r_1)}}, \sqrt{\frac{r_2 - w_0}{r_2 - r_1}}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

从 (3.11) 式中解出以  $\xi$  为自变量的  $w$  并用  $\phi_2$  代替  $w$ , 即得 (3.9). 注意到如果用  $-\xi$  代替  $\xi$ ,  $-v$  代替  $v$ , 系统 (3.1) 并不改变, 从而定理得证.

**注 3.2** 取  $c = 2$ ,  $\alpha = 3$ ,  $A = 0.6$ ,  $\beta = 1$ ,  $w_0 = 1$  及  $v_0 = 0$ . 显然 (3.3) 成立,  $B = -0.5954$ ,  $w_1 = 0.1773$ ,  $w_2 = 1.2116$ ,  $r_1 = -0.3141$  及  $r_2 = 1.3974$ .  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 2 (2).

#### 4 B 不满足 (2.6)

由于系统 (2.5) 有一条奇直线  $w = \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ , 所以我们先做变换  $d\xi = \left(-\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6}\right)d\tau$ , 可把系统 (2.5) 转化为正则系统

$$w_\tau = \left(-\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6}\right)v, \quad v_\tau = f(w). \quad (4.1)$$

系统 (4.1) 和 (2.5) 有首次积分

$$\begin{aligned} H_1(w, v) &= v^2 - \frac{2}{54c^4\alpha^2\beta}(-18c^3\alpha^3w^3 + 3c\alpha(3c\alpha + 18c^3\alpha)w^2 \\ &\quad + 6c\alpha(-1 + 15c^2 + 18Bc^2\alpha)w \\ &\quad + 2(1 - 9c^2(2 - 5c^2 + 2B\alpha + 6A\alpha)) \ln|1 - 3c^2 + 3c\alpha w|), \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中  $w \neq \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 显然除了奇直线  $w = \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  外, 系统 (2.5) 和系统 (4.1) 有相同的拓扑相图. 经过计算可得  $f'(w) = \frac{3\alpha^2}{2}w^2 - 3c\alpha w - 1 + c^2 - B\alpha$ . 下面我们分三种情形来分析系统 (4.1):  $f'(w)$  无实根,  $f'(w)$  有唯一实根和  $f'(w)$  有两个实根.

##### 4.1 $f'(w)$ 无实根

此情形表明  $B < -\frac{2+c^2}{2\alpha}$  及  $f'(w) > 0$ . 注意到  $f(\infty) = \infty$  和  $f(-\infty) = -\infty$ . 因此,  $f(w)$  只有一个实根  $w_1$ , 从而系统 (4.1) 只有一个平衡点  $(w_1, 0)$ . 如果

$$\frac{1 - 18c^2 + 45c^4 - 54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha} < B < -\frac{2 + c^2}{2\alpha}, \quad (4.3)$$

则

$$f\left(\frac{-1 + 3c^2}{3c\alpha}\right) = \frac{-1 + 9c^2(2 - 5c^2 + 2B\alpha + 6A\alpha)}{54c^3\alpha} > 0$$

且  $w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ , 故  $(w_1, 0)$  是鞍点. 如果

$$B < \min \left\{ \frac{1 - 18c^2 + 45c^4 - 54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}, \tag{4.4}$$

则

$$f\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) = \frac{-1+9c^2(2-5c^2+2B\alpha+6A\alpha)}{54c^3\alpha} < 0$$

且  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ , 故  $(w_1, 0)$  是中心. 系统 (4.1) 的相图见图 3.

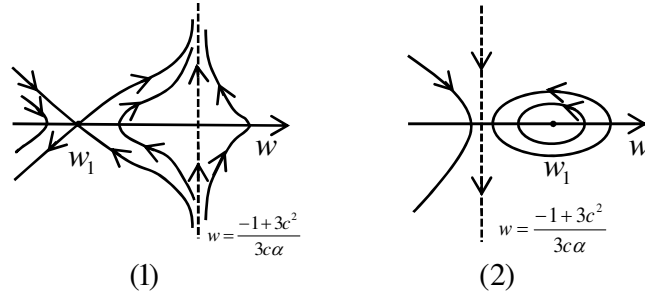


图 3 系统 (4.1) 的相图.

- (1)  $\frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha} < B < -\frac{2+c^2}{2\alpha}$  (或  $B = -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $A > \frac{c}{\alpha} + \frac{1}{54c^3\alpha}$ ,  
或  $A > \frac{9c+\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$ ,  $B > \max \left\{ \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}$ ).
- (2)  $B < \min \left\{ \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}$   
(或  $B = -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $A \neq \frac{c}{\alpha}$ ,  $A < \frac{c}{\alpha} + \frac{1}{54c^3\alpha}$ , 或  $B = -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $A = \frac{c}{\alpha}$ ,  
或  $B > -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $B \neq \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}$ ,  $A < \frac{9c-\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$ ,  
或  $A > \frac{9c+\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$ ,  $-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}$ ).

**定理 4.1** (广义 (反) 扭波解) 设 (4.3) 成立. 取初值  $(w_0, v_0)$ ,  $w_1 < w_0 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ ,  $v_0 > 0$  (或  $v_0 < 0$ ), 且  $(w_0, v_0)$  满足  $H(w_0, v_0) = H(w_1, 0)$ , 则系统 (1.1) 有一个广义 (反) 扭波解  $(\tilde{\eta}_3(\xi), \tilde{w}_3(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_3$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_3(\xi) = \phi_3(\xi), \quad \xi \in (-\infty, T_3) \quad (\text{或 } \xi \in (-T_3, \infty)), \tag{4.5}$$

$$T_3 = \int_{w_0}^{\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}} \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}, \tag{4.6}$$

$\phi_3(\xi)$  是  $\xi = \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}$  (或  $\xi = -\int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}$ ) 的反函数.

**定理 4.2** (紧孤立波解) 设 (4.3) 成立. 取初值  $(w_0, 0)$ ,  $w_1 < w_0 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  (或  $w_0 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ ), 则系统 (1.1) 有一个紧孤立波解  $(\tilde{\eta}_4(\xi), \tilde{w}_4(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_4$  由

(2.3) 给出,

$$\tilde{w}_4(\xi) = \begin{cases} \phi_4(\xi), & \xi \in [0, T_4) \quad (\text{或 } \xi \in (T_4, 0]), \\ \phi_4(-\xi), & \xi \in (-T_4, 0) \quad (\text{或 } \xi \in (0, -T_4)), \end{cases} \quad (4.7)$$

$$T_4 = \int_{w_0}^{\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}} \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}, \quad (4.8)$$

$\phi_4(\xi)$  是  $\xi = \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}$  (或  $\xi = -\int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}$ ) 的反函数.

注 取  $c = 2, \alpha = 3, A = 1, \beta = 1, B = -2, w_0 = 0.6$ , 则 (4.3) 成立,  $w_1 = 0.5575$ ,  $\frac{-1+3c^2}{3c\alpha} = \frac{11}{18}$ ,  $v_0 = \pm 0.2950$ . 当  $v_0 = 0.2950$  (或  $v_0 = -0.2950$ ) 时,  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 4 (1) (或 (2)). 取  $(w_0, v_0) = (0.6, 0)$ , 则  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 4 (3).

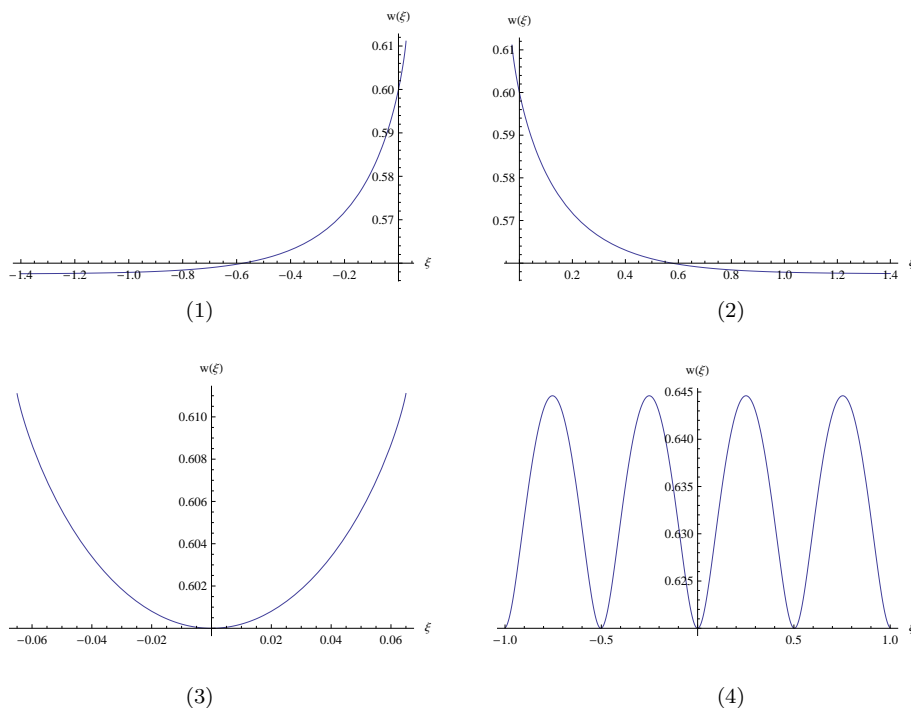


图 4 系统 (1.1) 中  $w(\xi)$  的图形. (1) 广义扭波解. (2) 广义反扭波解. (3) 紧孤立波解. (4) 周期波解.

**定理 4.3** (周期波解) 假设 (4.4) 成立. 取初值  $(w_0, 0)$ ,  $\frac{-1+3c^2}{3c\alpha} < w_0 < w_1$ , 则系统 (1.1) 有一个周期波解  $(\tilde{\eta}_5(\xi), \tilde{w}_5(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_5$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_5(\xi) = \begin{cases} \phi_5(\xi - 2nT_5), & \xi \in (2nT_5, (2n+1)T_5], \\ \phi_5(-\xi + 2nT_5), & \xi \in ((2n-1)T_5, 2nT_5], \end{cases} \quad (4.9)$$

$$T_5 = \int_{w_0}^{\hat{w}_0} \frac{du}{\sqrt{H_1(w_0, 0) - H_1(u, 0)}}, \quad (4.10)$$

$n$  是整数,  $\phi_5(\xi)$  是  $\xi = \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_0,0) - H_1(u,0)}}$  的反函数,  $\hat{w}_0$  是方程  $H(w,0) = H(w_0,0)$  的解且  $\hat{w}_0 > w_0$ .

**注 4.2** 取  $c = 2$ ,  $\alpha = 3$ ,  $A = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $B = -4$ ,  $w_0 = 0.62$ ,  $v_0 = 0$ , 则 (4.4) 成立,  $w_1 = 0.6297$ ,  $\frac{-1+3c^2}{3c\alpha} = \frac{11}{18}$ .  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 4 (4).

#### 4.2 $f'(w)$ 有唯一实根

易得  $B = -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $f'(\frac{c}{\alpha}) = 0$ ,  $f(\frac{c}{\alpha}) = A - \frac{c}{\alpha}$ ,  $f(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}) = A - \frac{c}{\alpha} - \frac{1}{54c^3\alpha}$ , 故  $f(w)$  只有一个实根  $w_1$ .

当  $A \neq \frac{c}{\alpha}$  时,  $w_1 \neq \frac{c}{\alpha}$  和  $f'(w_1) > 0$ . 如果  $A > \frac{c}{\alpha} + \frac{1}{54c^3\alpha}$ , 则  $w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ , 系统 (4.1) 只有一个平衡点  $(w_1, 0)$  且是鞍点; 如果  $A < \frac{c}{\alpha} + \frac{1}{54c^3\alpha}$  且  $A \neq \frac{c}{\alpha}$ , 则  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ , 系统 (4.1) 只有一个平衡点  $(w_1, 0)$  且是中心. 系统 (4.1) 的相图见图 3.

当  $A = \frac{c}{\alpha}$  时, 易得  $f(w) = \frac{(-c+\alpha w)^3}{2\alpha}$ ,  $f(\frac{c}{\alpha}) = 0$ ,  $f'(\frac{c}{\alpha}) = 0$ . 故系统 (4.1) 可简化为

$$w_\tau = \left( -\frac{c\beta\alpha}{2}w + \frac{c^2\beta}{2} - \frac{\beta}{6} \right)v, \quad v_\tau = \frac{(-c+\alpha w)^3}{2\alpha}. \quad (4.11)$$

令  $\tilde{w} = w - w_0$ , 其中  $w_0 = \frac{c}{\alpha}$ , 则系统 (4.11) 变为

$$\tilde{w}_\tau = -\frac{\beta}{6}(1+3c\alpha\tilde{w})v, \quad \tilde{v}_\tau = \frac{\alpha^2}{2}\tilde{w}^3. \quad (4.12)$$

由 [10] 中 132 页的定理 7.2, 知系统 (4.12) (或系统 (4.1)) 的平衡点  $(0, 0)$  (或  $(w_1, 0)$ ) 是中心. 系统 (4.1) 的相图见图 3 (2). 同样我们可以得到广义 (反) 扭波解, 紧孤立波解, 周期波解.

#### 4.3 $f'(w)$ 有两个实根

显然  $B > -\frac{2+c^2}{2\alpha}$  且  $f'(w)$  的实根为  $\tilde{w}_1 = \frac{3c-\sqrt{3}\sqrt{2+c^2+2B\alpha}}{3\alpha}$  和  $\tilde{w}_2 = \frac{3c+\sqrt{3}\sqrt{2+c^2+2B\alpha}}{3\alpha} > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 如果

$$A = \frac{9c - \sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \quad (4.13)$$

则  $f(\tilde{w}_1) = 0$ ; 如果

$$A < \frac{9c - \sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \quad (4.14)$$

则  $f(\tilde{w}_1) < 0$ ; 如果

$$A > \frac{9c - \sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \quad (4.15)$$

则  $f(\tilde{w}_1) > 0$ ; 如果

$$A = \frac{9c + \sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \quad (4.16)$$

则  $f(\tilde{w}_2) = 0$ ; 如果

$$A > \frac{9c + \sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \quad (4.17)$$



则  $f(\tilde{w}_2) > 0$ ; 如果

$$A < \frac{9c + \sqrt{3}(2 + c^2 + 2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}, \tag{4.18}$$

则  $f(\tilde{w}_2) < 0$ .  $f$  的图形见图 5.

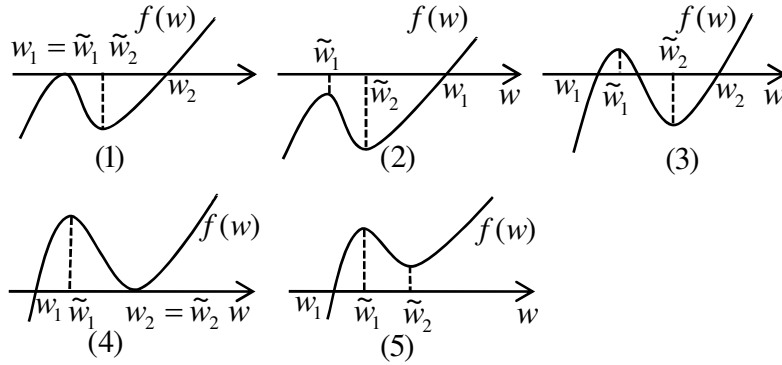


图 5  $f(w)$  的图形.

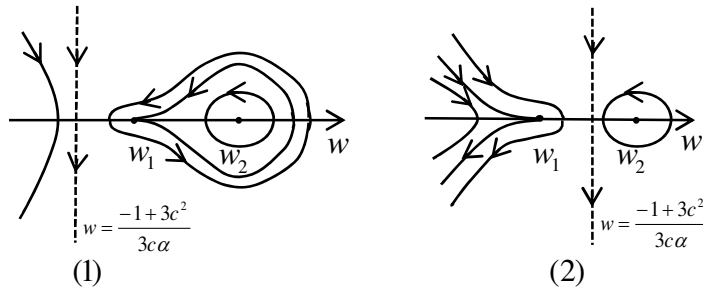


图 6 当  $B \neq \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}$ ,  $B > -\frac{2+c^2}{2\alpha}$ ,  $A = -\frac{-9c+\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$  时, 系统 (4.1) 的相图.

(1)  $-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha}$ . (2)  $B > \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha}$ .

情形 1  $A$  满足 (4.13).

$f$  的图形见图 5(1).  $f$  有两个实根  $w_1 = \tilde{w}_1$  和  $w_2$ .  $(w_2, 0)$  是中心. 因为  $B$  不满足 (2.6), 可得  $w_1 \neq \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 如果

$$B > \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} \quad \text{且} \quad B \neq \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \tag{4.19}$$

则  $w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ ; 如果

$$-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} \quad \text{且} \quad B \neq \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \tag{4.20}$$

则  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 令  $\tilde{w} = w - w_1$ , 系统 (4.1) 可化为

$$\tilde{w}_\tau = \frac{\beta}{6}v(-3c\alpha\tilde{w} - 1 + 3c^2 - 3c\alpha w_1), \quad v_\tau = \frac{\alpha}{2}\tilde{w}^2(\alpha\tilde{w} - 3c + 3\alpha w_1). \quad (4.21)$$

由 [10] 中 132 页的定理 7.3 知, 平衡点  $(0, 0)$  (或系统 (4.1) 的平衡点  $(w_1, 0)$ ) 是尖点. 系统 (4.1) 的相图见图 6.

**定理 4.4** (周期波解) 设 (4.13) 和 (4.20) (或 (4.19)) 成立. 取初值  $(w_0, 0)$ ,  $\frac{-1+3c^2}{3c\alpha} < w_0 < w_2$ ,  $w_0 \neq w_1$ , 则系统 (1.1) 有一个周期波解  $(\tilde{\eta}_6(\xi), \tilde{w}_6(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_6$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_6(\xi) = \begin{cases} \phi_6(\xi - 2nT_6), & \xi \in (2nT_6, (2n+1)T_6], \\ \phi_6(-\xi + 2nT_6), & \xi \in ((2n-1)T_6, 2nT_6], \end{cases} \quad (4.22)$$

$$T_6 = \int_{w_0}^{\hat{w}_0} \frac{du}{\sqrt{H_1(w_0, 0) - H_1(u, 0)}}, \quad (4.23)$$

$n$  是整数,  $\phi_6(\xi)$  是  $\xi = \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_0, 0) - H_1(u, 0)}}$  的反函数,  $\hat{w}_0$  是方程  $H(w, 0) = H(w_0, 0)$  的解且  $\hat{w}_0 > w_0$ .

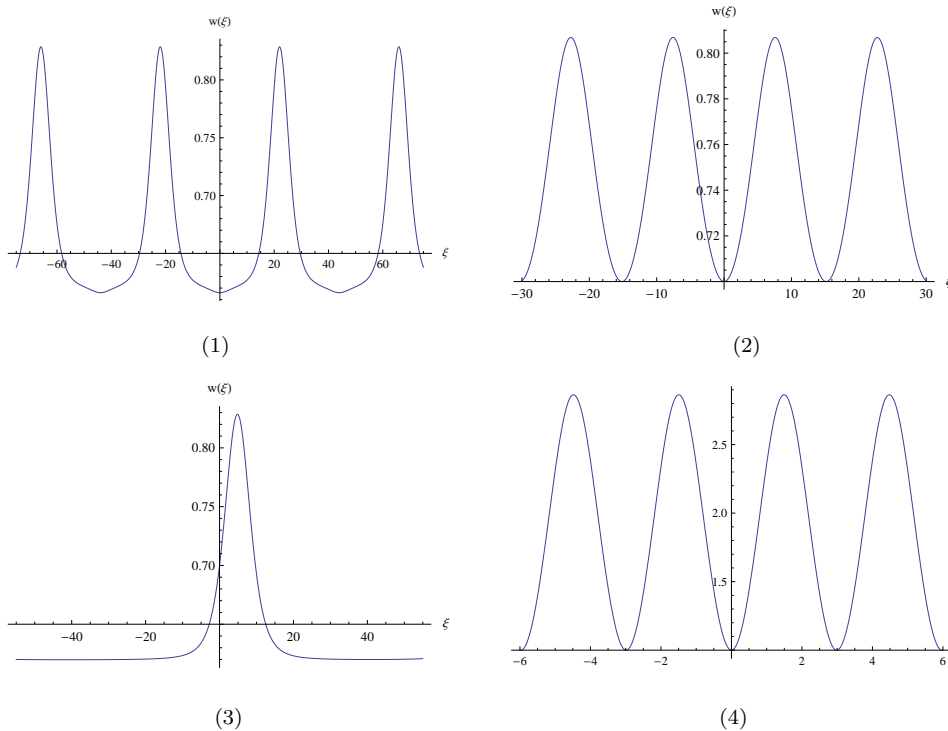


图 7 系统 (1.1) 中  $w(\xi)$  的图形. (1) 周期波解. (2) 周期波解. (3) 孤立波解. (4) 周期波解.

**定理 4.5** (孤立波解) 设 (4.13) 和 (4.20) 成立. 取初值  $(w_0, v_0)$ ,  $w_1 < w_0 < \hat{w}_0$ , 其

中  $H(w_0, v_0) = H(w_1, 0)$ , 则系统 (1.1) 有一个孤立波解  $(\tilde{\eta}_7(\xi), \tilde{w}_7(\xi))^T$ , 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\tilde{\eta}_7$  由 (2.3) 给出,

$$\tilde{w}_7(\xi) = \begin{cases} \phi_7(\xi), & \xi \in (-\infty, T_7], \\ \phi_7(-\xi + 2T_7), & \xi \in (T_7, \infty), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$T_7 = \int_{w_0}^{\hat{w}_0} \frac{du}{\sqrt{H_1(w_0, 0) - H_1(u, 0)}}, \quad (4.25)$$

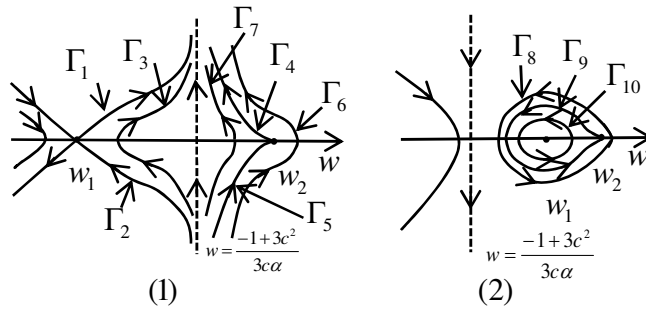
$\phi_7(\xi)$  是  $\xi = \int_{w_0}^w \frac{du}{\sqrt{H_1(w_1, 0) - H_1(u, 0)}}$  的反函数,  $\hat{w}_0$  是方程  $H(w, 0) = H(w_1, 0)$  的解且  $\hat{w}_0 > w_0$ .

**注 4.3** (1) 取  $c = 2, \alpha = 3, \beta = 1, B = -0.99$ , 则  $A = 0.6657$ , (4.13) 和 (4.20) 成立,  $w_1 = 0.6195, w_2 = 0.7609, \frac{-1+3c^2}{3c\alpha} = \frac{11}{18}$ . 当  $(w_0, v_0) = (0.616, 0)$  (或  $(w_0, v_0) = (0.7, 0)$ ) 时,  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 7 (1)(或 (2)). 若  $w_0 = 0.7$ , 从方程  $H(w_1, 0) = H(w_0, v_0)$  中可解出  $v_0 = 0.0266$ . 当  $(w_0, v_0) = (0.7, 0.0266)$  时,  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 7(3).

(2) 取  $c = 2, \alpha = 3, \beta = 1, B = 1$ , 则  $A = -2$ , (4.13) 和 (4.19) 成立,  $w_1 = 0, w_2 = 2, \frac{-1+3c^2}{3c\alpha} = \frac{11}{18}$ . 当  $(w_0, v_0) = (1, 0)$  时,  $\tilde{w}(\xi)$  的图形见图 7 (4).

**情形 2**  $A$  满足 (4.14).

由于  $f(\tilde{w}_1) < 0$  (见图 5(2)), 可得系统 (4.1) 只有一个平衡点  $(w_1, 0)$  且是中心, 其中  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 系统 (4.1) 的相图见图 3 (2). 同样我们可以得到它的周期波解.



**图 8** 当  $B > -\frac{2+c^2}{2\alpha}$  和  $A = \frac{9c+\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$  时, 系统 (4.1) 的相图.

(1)  $B > \max\left\{\frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha}\right\}$ . (2)  $-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}$ .

**情形 3**  $A$  满足 (4.17).

注意到 (4.15) 成立且  $f(\tilde{w}_1) > 0, f(\tilde{w}_2) > 0$  (见图 5(5)), 故系统 (4.1) 只有一个平衡点  $(w_1, 0)$ . 如果

$$B > \max\left\{\frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha}\right\}, \quad (4.26)$$

则  $w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  且  $(w_1, 0)$  是鞍点; 如果

$$-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \quad (4.27)$$

则  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  且  $(w_1, 0)$  是中心. 系统 (4.1) 的相图见图 3. 同样我们可以得到广义 (反) 扭波解, 紧孤立波解和周期波解.

**情形 4**  $A$  满足 (4.16).

注意到 (4.15) 成立且  $f(\tilde{w}_1) > 0, f(\tilde{w}_2) = 0$  (见图 5(4)), 故系统 (4.1) 有两个平衡点  $(w_1, 0)$  和  $(w_2, 0) = (\tilde{w}_2, 0)$ . 若 (4.26) 成立, 则  $w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  且  $(w_1, 0)$  是鞍点; 若 (4.27) 成立, 则  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$  且  $(w_1, 0)$  是中心. 由 [10] 中 132 页的定理 7.3, 可知  $(w_2, 0)$  是尖点. 系统 (4.1) 的相图见图 8.

$\Gamma_1$  和  $\Gamma_4$  对应于广义扭波解,  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_5$  对应于广义反扭波解,  $\Gamma_3, \Gamma_6$  和  $\Gamma_7$  对应于紧孤立波解,  $\Gamma_9$  对应于孤立波解,  $\Gamma_8$  和  $\Gamma_{10}$  对应于周期波解.

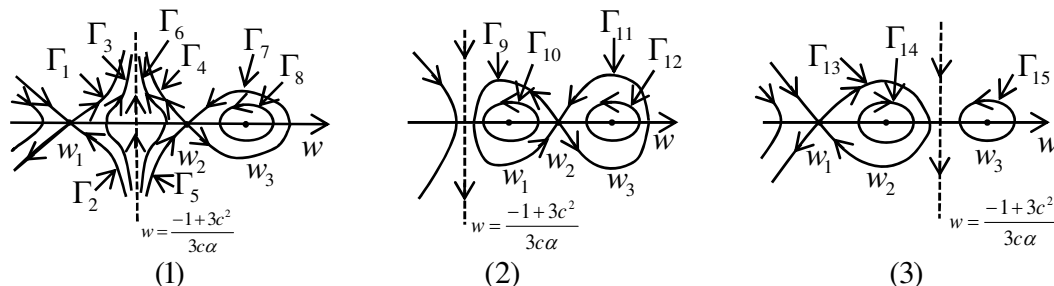


图 9 当  $B > -\frac{2+c^2}{2\alpha}, \frac{9c-\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha} < A < \frac{9c+\sqrt{3}(2+c^2+2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha}$  时, 系统 (4.1) 的相图.

- (1)  $B > \max \left\{ \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, -\frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}.$
- (2)  $-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \min \left\{ \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}.$
- (3)  $\frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}.$

**情形 5**  $A$  满足 (4.15) 和 (4.18).

显然

$$\frac{9c - \sqrt{3}(2 + c^2 + 2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha} < A < \frac{9c + \sqrt{3}(2 + c^2 + 2B\alpha)^{3/2}}{9\alpha},$$

故

$$f(\tilde{w}_1) > 0, \quad f(\tilde{w}_2) < 0,$$

$f(w)$  有三个实根  $w_1 < \tilde{w}_1 < w_2 < \tilde{w}_2 < w_3$ . 系统 (4.1) 有三个平衡点  $(w_1, 0), (w_2, 0)$  和  $(w_3, 0)$ . 易知  $(w_3, 0)$  是中心. 如果 (4.26) 成立, 则

$$f\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) > 0, \quad w_1 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha} < w_2,$$

故  $(w_1, 0)$  和  $(w_2, 0)$  是鞍点; 如果

$$-\frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \min \left\{ \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} \right\}, \quad (4.28)$$

则

$$f\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) < 0, \quad f'\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) > 0,$$

故  $w_1 > \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 于是  $(w_1, 0)$  是中心而  $(w_2, 0)$  是鞍点; 如果

$$\frac{1}{6c^2\alpha} - \frac{2+c^2}{2\alpha} < B < \frac{1-18c^2+45c^4-54Ac^3\alpha}{18c^2\alpha}, \quad (4.29)$$

则

$$f\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) < 0, \quad f'\left(\frac{-1+3c^2}{3c\alpha}\right) < 0,$$

故  $w_2 < \frac{-1+3c^2}{3c\alpha}$ . 于是  $(w_1, 0)$  是鞍点而  $(w_2, 0)$  是中心. 系统 (4.1) 的相图见图 9. 同样, 我们知道  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_4$  对应于广义扭波解,  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_5$  对应于广义反扭波解,  $\Gamma_3$  和  $\Gamma_6$  对应于紧孤立波解,  $\Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{11}$  及  $\Gamma_{13}$  对应于孤立波解,  $\Gamma_8, \Gamma_{10}, \Gamma_{12}, \Gamma_{14}$  及  $\Gamma_{15}$  对应于周期波解.

**致谢** 本文作者对审稿人提出的宝贵意见表示衷心的感谢!

### 参 考 文 献

- [1] Whitham G B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974
- [2] Constantin A, Ivanov R I. On an Integrable Two-Component Camassa-Holm Shallow Water System. *Phys. Lett. A*, 2008, 372: 7129–7132
- [3] Li J, Chen G. Bifurcations of Travelling Wave Solutions for Four Classes of Nonlinear Wave Equations. *Internat. J. of Bifur. Chaos*, 2005, 15: 3973–3998
- [4] Li J, Li Y. Bifurcations of Travelling Wave Solutions for a Two-component Camassa-Holm Equation. *Acta Math. Sinica (English Series)*, 2008, 24: 1319–1330
- [5] Li J, Zhang Y. Exact Loop Solutions, Cusp Solutions, Solitary Wave Solutions and Periodic Wave Solutions for the Special CH-DP Equation. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2009, 10: 2502–2507
- [6] Liu Z R, Guo B L. Periodic Blow-Up Solutions and Their Limit Forms for the Generalized Camassa-Holm Equation. *Progress in Natural Science*, 2008, 18: 259–266
- [7] Tang M Y, Zhang W L. Four Types of Bounded Wave Solutions of CH- $\gamma$  Equation. *Science in China, Ser. A*, 2007, 50: 132–152
- [8] Zhang W L. General Expressions of Peaked Traveling Wave Solutions of CH- $\gamma$  and CH Equations. *Science in China, Ser. A*, 2004, 47: 862–873
- [9] Gradshteyn I S, Ryzhik L M. *Table of Integrals, Series and Products*. 6th ed., New York, NY, USA: Academic, 2000
- [10] Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z, Dong Z X. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Providence: American Mathematical Society, 1991

## Travelling Wave Solutions of a Variant of the Boussinesq System

DENG SHENGFU

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal University, Zhanjiang 524048)

(E-mail: sf\_deng@sohu.com)

GUO BOLING

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

**Abstract** This paper considers a variant of the Boussinesq system

$$\eta_t + ((1 + \alpha\eta)w)_x - \frac{\beta}{6}w_{xxx} = 0, \quad w_t + \alpha ww_x + \eta_x - \frac{\beta}{2}w_{xt} = 0,$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are positive constants. A lot of approximate models like the Boussinesq system and the two-component Camassa-Holm system can be derived from this system. We here study its travelling wave solutions and analyze its phase portraits by applying the qualitative analysis methods of planar autonomous systems. We obtain its solitary wave solutions, kink-like or antikink-like wave solutions, compacton-like wave solutions and periodic wave solutions. Some numerical simulations of its solutions are also given.

**Key words** solitary wave solutions; kink-like or antikink-like wave solutions;  
compacton-like wave solutions; periodic wave solutions

**MR(2000) Subject Classification** 34C25; 34C37; 76B25

**Chinese Library Classification** O175.12