第 35 卷 第 6 期 应用数学学报 Vol. 35 No. 6
2012 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2012

Banach 空间中变分不等式的例外簇与严格可行性问题 *

王 敏
(四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610068)
(绵阳师范学院数学与计算机科学学院，绵阳 621000)
(E-mail: muminzi@163.com)
周 密
(三亚学院理工分院，三亚 572022)
(E-mail: mizhou330@126.com)

摘 要 本文在 Banach 空间中对变分不等式的例外簇，严格可行性及解的存在性三者之间的关系进行了研究，将补问题中的相应结果进行了推广．首先通过定义一类新的例外簇，在映射为拟单调的情况下，证明了变分不等式解的存在性与例外簇之间的关系，即若变分不等式不存在例外簇，则解一定存在．其次主要证明了变分不等式的严格可行性与例外簇之间的关系，即若变分不等式存在严格可行性，则例外簇不存在.

关键词 变分不等式；例外簇；严格可行性；拟单调映射
MR(2000) 主题分类 47J20; 49J40; 58E35
中图分类 O22; O177.92

1 引言

变分不等式及其应用是现代非线性分析的重要组成部分，具有非常重要的研究价值，其中与变分不等式解的存在性相关的课题是重要的研究方向之一．在变分不等式解的存在性问题上，已经有众多研究成果利用了不同的方法，例如不动点定理、KKM 定理、拓扑度理论及各种强制性条件等．自从 1997 年 Isac G[1] 利用拓扑度引出了关于映射的例外簇这一新概念以来，以 Isac G[2,3] 为首的学者在 1997 年至 2000 年间研究了大

本文 2010 年 12 月 1 日收到．2012 年 9 月 25 日收到修改稿.
* 海南省自然科学基金 (No.110009) 及四川省绵阳师范学院青年基金 (No.MA2010008) 资助项目.

量补问题中解的存在性与例外簇的相关问题. Zhao Y B[4] 于 1997 年在欧几里德空间 R^n 中，将例外簇这一概念首次拓展到了变分不等式问题中，随之在 1997 年至 1999 年间关于变分不等式解的存在性与例外簇的研究成果纷纷涌现，详见 [4–8]. 在利用例外簇对补问题或变分不等式问题解的存在性研究中，通常采用如下方法：如果补问题或变分不等式问题不存在解，则某个例外簇一定存在. 随之便可得到解的存在性结果；如果补问题或变分不等式问题的某个例外簇不存在，则该问题的解一定存在.

在研究例外簇与解的存在性问题的同时，基于可行性性质在补问题及变分不等式研究中的重要作用，关于可行性与例外簇及解的存在性之间的研究也开始发展. 2000 年 Isac G 在 [3] 中提到补问题解的存在性蕴含了可行性，但反之则不然，并给出了反例，但定理 5.2 在欧几里德空间 R^n 中通过定义关于连续映射 f 的例外簇概念，证明了补问题或者具有可行性，或者存在例外簇的择一性结论，随之根据注 5.1 得到了补问题解的存在性，并将这一结论推广至了无穷维的 Hilbert 空间，这就说明利用例外簇可以证明在一定条件下补问题的可行性可以蕴含解的存在性. 2001 年，Isac G 在 [9] 中进一步研究了补问题的严格可行性与例外簇之间的关系，文献在无穷维 Hilbert 空间 $(H,\langle\cdot\rangle)$ 中考虑，定理 6.1 中假设 $K\subseteq H$ 为闭的 well-based 点凸锥， $f:H\to H$ 为完全上半连续映射， f 关于集合 K 为伪单调映射，定理证明了如果补问题具有严格可行性，则映射 f 不具有文中定义 4.2 性质的例外簇，再根据定理 4.1 可得补问题解的存在性. 本文在 Banach 空间中对变分不等式问题的严格可行性与例外簇之间的关系进行了研究，针对拟单调映射主要证明了变分不等式问题如果具有严格可行性则例外簇不存在的结论，从而得到了变分不等式解的存在性，将 [9] 中关于补问题的相关结论进行了进一步推广.

2　预备知识

下面给出本文讨论的变分不等式问题，记为 GVIP (F,K).

设 X 为自反 Banach 空间， $K\subseteq X$ 为非空闭凸集， $F:X\to 2^{X^*}$ 为集值映射，GVIP (F,K) 即找到 $x_0\in K$ 及 $x_0^*\in F(x_0)$ 使得

$$\langle x_0^*, x-x_0\rangle \geq 0,\qquad \forall\, x\in K.$$

以下介绍关于集合 K 及映射 F 的一些基本定义.

定义 2.1 设 $K\subseteq X$ 为 Banach 空间 X 中的非空闭凸集，则

$$\begin{aligned}
&K^+=\big\{x^*\in X^*\mid \langle x^*,x\rangle\geq 0,\ \forall\, x\in K\big\},\\
&\operatorname{barr}(K)=\Big\{x^*\in X^*|\sup_{x\in K}\langle x^*,x\rangle<+\infty\Big\},\\
&N_K(x_0)=\big\{x^*\in K^*|\langle x^*,x-x_0\rangle\leq 0,\ \forall\, x\in K\big\}
\end{aligned}$$

分别称为集合 K 的正极锥，闸锥及 K 在 x_0 这一点的法锥，明显地， $K^+\subseteq -\operatorname{barr}(K)$.

另若 $F(K)\cap \operatorname{int}(-\operatorname{barr} K)\neq\emptyset$, 则称变分不等式问题 GVIP (F,K) 具有严格可行性.

定义 2.2 设 $K\subseteq X$ 为 Banach 空间 X 中的非空闭凸集, $F:X\to 2^{X^*}$ 为集值映射，若对于任意 $x,y\in K$ 及 $x^*\in F(x)$, $y^*\in F(y)$, 有

$$\langle x^*,y-x\rangle>0\Rightarrow\langle y^*,y-x\rangle\geq 0,$$

则称映射 F 为集合 K 上的拟单调映射.

定义 2.3 设 X 为 Banach 空间, $T:X\to 2^{X^*}$ 为集值映射，若对任意开集 $V\subseteq X$, $\big\{x\in X\mid T(x)\subseteq V\big\}$ 为开集，则称映射 T 为 X 上的上半连续映射.

若对任意有界集合 $K\subseteq X$, $T(K)=\bigcup\limits_{x\in K}T(x)$ 为相对紧集，则称映射 T 为 X 上的完全上半连续映射.

定义 2.4 若集值映射 $F:X\to 2^{X^*}$ 对任意 $x\in X$ 可表示为 $F(x)=x-T(x)$, 其中 $T:X\to 2^{X^*}$ 为完全上半连续映射，则称映射 F 具有完全上半连续域.

下面介绍关于广义投影算子的一些基本定义及定理，可参看 [10].

定义 2.5 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间，若映射 $J:X\to X^*$ 满足如下性质

$$J(x)=\{x^*\in X^*:\langle x^*,x\rangle=\|x^*\|\cdot\|x\|=\|x^*\|^2=\|x\|^2\},$$

其中 $\|x^*\|$ 表示对偶空间 X^* 的 X^*- 范数, $\|x\|$ 表示原空间 X 中的 X- 范数，则称映射 $J:X\to X^*$ 为正规对偶映射. 显然，当 X 为自反 Banach 空间时, $J(x)=x$ 同样满足上述正规对偶映射的定义.

设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, $K\subseteq X$ 为非空闭凸集, 考虑如下函数 $V:K^*\times K\to R$,

$$V(x^*,x)=\|x^*\|^2-2\langle x^*,x\rangle+\|x\|^2.$$

显然，因为 $V(x^*,x)\geq(\|x^*\|-\|x\|)^2$, 故函数 $V:K^*\times K\to R$ 为非负函数.

定义 2.6 设 $\pi_k:X^*\to K$, 若对于给定 $x^*\in X^*$, 找到 $x_0\in K$ 使得 $V(x^*,x_0)=\inf\limits_{x\in K}V(x^*,x)$ 具有唯一解，则 $\pi_K(x^*)=x_0$ 称为集合 K 上的广义投影算子.

定理 2.7[10] 设 $x^*\in X^*$, 则 $\pi_K(x^*)=x_0$ 当且仅当

$$\langle x^*-J(x_0),x_0-x\rangle\geq 0,\qquad\forall\, x\in K.$$

注 2.8 设 $x^*\in X^*$, 则 $\pi_K(x^*)=x_0$ 当且仅当 $x^*\in J(x_0)+N_K(x_0)$. 事实上，由定理 2.7 知 $\pi_K(x^*)=x_0$ 当且仅当对任意 $x\in K$, 有 $\langle x^*-J(x_0),x_0-x\rangle\geq 0$, 即 $x^*\in J(x_0)+N_K(x_0)$.

定理 2.9[10] 设 $F:X\to X^*$, $K\subseteq X$ 为非空闭凸集, α 为任意固定正数, 则 $x_0\in K$ 为变分不等式问题的解当且仅当 x_0 为映射

$$\Phi_K(x)=\pi_K(J(x)-\alpha F(x)),\qquad x\in X$$

的不动点，即 $x_0=\pi_K(J(x_0)-\alpha F(x_0))$.

下面介绍 Leray-Schauder type 选择定理.

定理 2.10[11]　设 X 为局部凸空间，∂X 表示其边界，$K\subseteq X$ 为非空闭子集且 $0\in\operatorname{int}(K)$，$f:K\to 2^{X^*}$ 为具有非空紧缩值的上半连续映射. 若映射 f 不具有不动点，则 f 满足如下 Leray-Schauder 条件，即存在 $(\lambda^*,x^*)\in(0,1)\times\partial X$ 使得 $x^*\in\lambda f(x^*)$.

3　主要结论

下面给出本文讨论的例外簇的定义.

定义 3.1　设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，$K\subseteq X$ 为非空闭凸集，映射 $F:X\to 2^{X^*}$ 关于集合 K 可表示为 $F(x)=x-T(x)$, 其中 $T:X\to 2^{X^*}$ 为集值映射，若序列 $\{x_r\}_{r>0}\subset K$ 满足如下条件：

(i)　当 $r\to+\infty$ 时 $\|x_r\|\to+\infty$,

(2)　对任意 $r>0$, 存在 $y_r\in T(x_r)$ 及实数 $\mu_r>1$ 使得 $\mu_r x_r\in K$，$y_r-\mu_r x_r\in N_K(\mu_r x_r)$ 且 $\langle\mu_r x_r-y_r,\mu_r x_r-x_r\rangle=0$, 其中 $N_K(\mu_r x_r)$ 表示集合 K 在 $\mu_r x_r$ 处的法锥，则称序列 $\{x_r\}_{r>0}\subset K$ 为关于映射 F 的例外簇.

以下定理利用广义投影算子及 Leray-Schauder type 选择定理证明了变分不等式解的存在性与例外簇之间的关系.

定理 3.2　设 X 为自反 Banach 空间，$K\subseteq X$ 为非空有界闭凸集，$F:X\to 2^{X^*}$ 具有完全上半连续域，即可表示为 $F(x)=x-T(x)$, 其中 $T:X\to 2^{X^*}$ 为完全上半连续映射，则变分不等式问题 GVIP (F,K) 或者存在解，否则映射 F 存在关于集合 K 的例外簇.

证　取 $J(x)=x$, $\alpha=1$ 由定理 2.9 知变分不等式问题有解当且仅当

$$\Phi_K(x)=\pi_K(x-F(x))=\pi(T(x)),\qquad x\in X$$

具有不动点，且均在集合 K 中.

对任意 $r>0$, 定义闭凸集

$$D_r=\{x\in X:\|x\|\le r\}$$

因 $0\in\operatorname{int}(D_r)$, 故 D_r 具有非空内部.

下面就关于变分不等式问题 GVIP (F,K) 解的存在性分情况讨论.

(I)　若 GVIP (F,K) 存在解，则定理得证.

(II)　若 GVIP (F,K) 解不存在，下面证明例外簇的存在性.

若 GVIP (F,K) 解不存在，则映射 $\Phi_K(x)$ 关于任意集合 D_r 均不存在不动点. 事实上，若映射 $\Phi_K(x)$ 在某一集合 D_r 上存在不动点，则由定理 2.9 知 GVIP (F,K) 解存在，于是产生矛盾.

因 $T:X\to 2^{X^*}$ 为完全上半连续映射，且 π_K 在任意有界子集上一致连续，故在集合 D_r 上的映射 Φ_K 满足定理 2.10 的条件，根据 Leray-Schauder 选择定理可知，存在

$x_r \in \partial D_r$ 及 $\lambda_r \in (0,1)$ 使得 $x_r = \lambda_r \Phi(x_r) = \lambda_r \pi(T(x_r))$, 即 $\frac{x_r}{\lambda_r} = \Phi(x_r) = \pi(T(x_r))$. 由注 2.8 知, $T(x_r) \in \frac{x_r}{\lambda_r} + N_K(\frac{x_r}{\lambda_r})$. 对任意 $r > 0$, 设 $\mu_r = \frac{1}{\lambda_r}$, 有

(i) 对任意 $r > 0$, $\|x_r\| = r$ 及 $\mu_r > 1$, 并且当 $r \to +\infty$ 时 $\| x_r \| \to +\infty$,

(ii) 对任意 $r > 0$, $\mu_r x_r \in K$, $T(x_r) - \mu_r x_r \in N_K(\mu_r x_r)$ 及 $\langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_r \rangle = 0$, 因此 $\{x_r\}_{r>0} \subset K$ 为关于映射 F 的例外簇. 证毕.

下面讨论变分不等式的严格可行性与例外簇之间的关系. 首先给出 well-positioned 集合的定义.

定义 3.3 设 X 为自反 Banach 空间, $K \subseteq X$ 为非空子集, 若存在 $\overline{x} \in X$ 及 $\overline{g}^* \in X^*$ 使得 $\langle \overline{g}^*, x - \overline{x} \rangle \geq \|x - \overline{x}\|$, $\forall\, x \in K$, 则称集合 K 为 well-positioned 集.

定理 3.4 设 X 为自反 Banach 空间, $K \subseteq X$ 为非空闭凸子集且为 well-positioned 集, $F : X \to 2^{X^*}$ 具有完全上半连续域, 即可表示为 $F(x) = x - T(x)$, 其中 $T : X \to 2^{X^*}$ 为具有紧缩值的完全上半连续映射. 若映射 F 关于集合 K 为拟单调映射且变分不等式问题 GVIP (F, K) 具有严格可行性, 则映射 F 不存在关于集合 K 的例外簇.

证 假设映射 F 存在关于集合 K 的例外簇 $\{x_r\}_{r>0} \subset K$ 使得

(i) 当 $r \to +\infty$ 时 $\| x_r \| \to +\infty$,

(ii) 对任意 $r > 0$, 存在 $y_r \in T(x_r)$ 及实数 $\mu_r > 1$ 使得 $\mu_r x_r \in K$, $y_r - \mu_r x_r \in N_K(\mu_r x_r)$ 且 $\langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_r \rangle = 0$, 其中 $N_K(\mu_r x_r)$ 表示集合 K 在 $\mu_r x_r$ 处的法锥.

选取 $x_0 \in K$, $y_0 \in T(x_0)$ 使得 $x_0 - y_0 \in F(x_0) \cap \operatorname{int}(K^+) \subset F(x_0) \cap \operatorname{int}(-\operatorname{barr} K)$. 下面证明对于任意 $r > r_0 > 0$ 有 $\langle x_0 - y_0, x_r - x_0 \rangle \geq 0$.

因 K 为 well-positioned 集, 则存在 $\overline{x} \in X$ 及 $\overline{g}^* \in X^*$ 使得

$$\langle \overline{g}^*, x - \overline{x} \rangle \geq \|x - \overline{x}\|, \qquad \forall\, x \in K.$$

又因 X 为自反 Banach 空间, 故 K 为局部紧凸集, 因此集合 $D = \big\{x \in K | \langle \overline{g}^*,\ x \rangle = 1\big\}$ 在 X 上也为紧集, 又

$$\begin{aligned}
&\langle x_0 - y_0, x_r - x_0 \rangle = \langle x_0 - y_0, x_r - \overline{x} + \overline{x} - x_0 \rangle \\
=&\Big\langle x_0 - y_0, \frac{x_r - \overline{x}}{\langle \overline{g}^*, x_r - \overline{x} \rangle} \Big\rangle \langle \overline{g}^*, x_r - \overline{x} \rangle - \langle x_0 - y_0, x_0 - \overline{x} \rangle,
\end{aligned}$$

且 D 为紧集, $\langle x_0 - y_0, x \rangle$ 为连续的并且 $\frac{x_r - \overline{x}}{\langle \overline{g}^*, x_r - \overline{x} \rangle} \in D$, $x_0 - y_0 \in \operatorname{int} K^+$, 则

$$\Big\langle x_0 - y_0, \frac{x_r - \overline{x}}{\langle \overline{g}^*, x_r - \overline{x} \rangle} \Big\rangle \geq \varepsilon > 0,$$

其中 $\varepsilon = \min\limits_{x \in D} \langle x_0 - y_0, x \rangle > 0$. 因此有

$$\begin{aligned}
&\langle x_0 - y_0, x_r - x_0 \rangle \geq \varepsilon \langle \overline{g}^*, x_r - \overline{x} \rangle - \langle x_0 - y_0, x_0 - \overline{x} \rangle \\
\geq& \varepsilon \|x_r - \overline{x}\| - \langle x_0 - y_0, x_0 - \overline{x} \rangle > 0, \qquad \forall\, r > r_0,
\end{aligned}$$

其中 $r_0 > 0$ 使得 $\|x_{r_0} - \overline{x}\| > \frac{\langle x_0 - y_0, x_0 - \overline{x} \rangle}{\varepsilon}$, 再由映射 F 的拟单调性得对任意 $r > r_0$ 及 $x_r \in K$, $y_r \in T(x_r)$ 有

$$\langle x_r - y_r, x_r - x_0 \rangle \geq 0.$$

下面说明矛盾 $\langle x_r - y_r, x_r - x_0\rangle < 0$.

由例外簇定义的条件 (ii) 知， $y_r - \mu_r x_r \in N_K(\mu_r x_r)$, 即

$$\langle y_r - \mu_r x_r, x - \mu_r x_r\rangle \le 0, \qquad \forall\, x \in K.$$

因 $x_0 \in K$, 故有

$$\langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_0\rangle = {\mu_r}^2\|x_r\|^2 - \mu_r\langle x_r, x_0\rangle - \mu_r\langle y_r, x_r\rangle + \langle y_r, x_0\rangle, \tag{1}$$

并且

$$\langle x_r - y_r, x_r - x_0\rangle = \|x_r\|^2 - \langle x_r, x_0\rangle - \langle y_r, x_r\rangle + \langle y_r, x_0\rangle. \tag{2}$$

将上述两式右端相减并由例外簇定义的条件 (ii) 得

$$\begin{aligned}
&{\mu_r}^2\|x_r\|^2 - \mu_r\langle x_r, x_0\rangle - \mu_r\langle y_r, x_r\rangle + \langle y_r, x_0\rangle - \|x_r\|^2 - \langle x_r, x_0\rangle - \langle y_r, x_r\rangle + \langle y_r, x_0\rangle\\
=&({\mu_r}^2 - 1)\|x_r\|^2 + (1-\mu_r)\langle x_r, x_0\rangle + (1-\mu_r)\langle y_r, x_r\rangle\\
=&({\mu_r}^2 - 1)\|x_r\|^2 + (1-\mu_r)\langle x_r, x_0\rangle + (1-\mu_r)\langle y_r, x_r\rangle\\
=&(1-\mu_r)\|x_r\|^2 + (1-\mu_r)\langle x_r, x_0\rangle = (1-\mu_r)\big[\langle x_r, x_0\rangle - \|x_r\|^2\big].
\end{aligned} \tag{3}$$

由例外簇定义的条件 (i) 可知当 $r \to +\infty$ 时， $\|x_r\| \to +\infty$, 则存在 $r_1 > 0$ 使得对任意 $r > r_1$ 有 $\|x_r\| > \|x_0\|$. 因此，对任意 $r > \max\{r_0, r_1\}$, 可得

$$\langle x_r, x_0\rangle - \|x_r\|^2 \le \|x_r\|\cdot\|x_0\| - \|x_r\|^2 = \|x_r\|\left[\|x_0\| - \|x_r\|\right] < 0.$$

将 (1), (2) 两式左端相减并且根据 (3) 式可得

$$\langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_0\rangle - \langle x_r - y_r, x_r - x_0\rangle = (1-\mu_r)\big[\langle x_r, x_0\rangle - \|x_r\|^2\big] > 0.$$

再由例外簇定义的条件 (ii), $y_r - \mu_r x_r \in N_K(\mu_r x_r)$ 及 $x_0 \in K$, 有 $\langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_0\rangle \le 0$, 因此

$$\langle x_r - y_r, x_r - x_0\rangle < \langle \mu_r x_r - y_r, \mu_r x_r - x_0\rangle \le 0.$$

故对任意 $r > \max\{r_0, r_1\}$, 有 $0 \le \langle x_r - y_r, x_r - x_0\rangle < 0$.

上述矛盾说明映射 F 不存在例外簇.

注 3.5 由定理 3.4 可知，若变分不等式问题 GVIP (F, K) 存在严格可行性则例外簇不存在，随之由定理 3.3 知 GVIP (F, K) 的解存在.

致谢. 在此对审稿专家针对本文提出的宝贵意见和建议由衷的表示感谢.

参 考 文 献

[1] Isac G, Bulavski V, Kalashnikov V. Exceptional Families, Topological Degree, and Complementarity Problems. *Journal of Global Optimization*, 1997, 10: 207–225

[2] Bulavski V A, Isac G, Kalashnikov V V. Application of Topological Degree Theory to Complementarity Problems, Multilevel Optimization: Alogorithms and Applications. Edited by A. Migdalas et al., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1998: 333–358

[3] Isac G. Exceptional Family of Elements, Feasibility and Complementarity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2000, 104(3): 577–588

[4] Zhao Y B. Exceptional Family and Finite-dimensional Variational Inequality over Polyhedral Convex Sets. *Applied Mathematics and Computation*, 1997, 87: 111–126

[5] Isac G. Exceptional Family of Elements and the Sovabiity of Vational Inequalities for Unbounded Sets in Infinite Dimensional Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 246: 544–556

[6] Zhao Y B, Han J Y, Qi H D. Exceptional Families and Existence Theorems for Variational Inequality Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, 101(2): 475–495

[7] Zhao Y B, Han J Y. Exceptional Family of Elements for Variational Inequality Problem and Its Applications. *Journal of Global Optimization*, 1999, 14: 313–330

[8] Wamg Zhongbao, Huang Nanjing. Exceptional Family of Elements for a Generalized Set-valued Variational Inequality in Banach Spaces. *Optimization*, 2001: 1–14

[9] Isac G, Kalashnikov V. Exceptional Family Of Elements, Leray-Schauder Alternative, Pseudomonotone Operators And Complementarity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, 109(1): 69–83

[10] Alber Y. Metric and Generalized Projection Operators in Bananch Spaces: Projecties and Applicationa. In: Kartsatos, A. (Ed.), Theory and Applications of Nonlinear Operators of Monatnic and Accretive Type. New York: Marcel Dekker, 1996: 15–50

[11] Ben-El-Mechaiekh H, Chebbi S, Florenzano M. A Leray-Schauder Type Theorem for Approximable Maps: Simple Proof. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1998, 126: 2345–2349

[12] Alber Y, GuerreDelabriere S. Problems of Fixed Point Theory in Hilbert and Banach Spaces. *Funct., Differ. Equ.*, 1994, 2: 5–10

[13] Alber Y, Reich S. An Iterative Method for Solving a Class of Nonlinear Operator Equations in Banach Spaces. *Panamerican Math. J.*, 1994, 4: 39–54

[14] Alber Y, Notik A. On Some Estimates for Projection Operator in Bananch Spaces. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1995, 2: 47–56

[15] Alber Y, GuerreDelabriere S. Principle of Weakly Contractive Maps in Hilbert Spaces. *Oper. Theory Adv. Appl.*, 1997, 98: 7–22

[16] Alber Y, GuerreDelabriere S, Zalenko L. The Principle of Weakly Contractive Maps in Metric Spaces. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1998, 5: 45–68

[17] Alber Y, GuerreDelabriere S. On the Projection Methods for Fixed Point Problems. *Analysis*, 2001, 21: 17–39

[18] Huang Nanjing, Gao Chengjia, Huang Xiaoping. Exceptional Family of Elements and Feasibility for Nonlinear Complementarity Problem. *Journal of Global Optimization*, 2003, 25: 337–344

[19] He Y R. Stable Pseudomonotone Variational Inequality in Reflexive Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 330: 352–363

[20] He Y R, Mao X Z, Zhou M. Strict Feasibility of Variational Inequalities in Reflexive Banach Spaces. *Acta Mathematica Sinica* (English Series), 2007, 3: 563–570

[21] He YR, Ng K F. Strict Feasibility of Generalized Complementarity Problems. *Journal of the Australian Mathematical Society* (Series A), 2006, 81(1): 15–20

[22] Kien B T, Yao J C, Yen N D. On the Solution Existence of Pseudomonotone Variational Inequalities. *Journal of Global Optimization*, 2008, 41(1): 135–145

[23] Konnov I V. On Quasimonotone Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, 1: 65–181

[24] Pascali D, Sburlan S. Nonlinear Mappings of Monotone Type. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1978

[25] Simons S. Minimax and Monotonicity. Berlin: Springer-Verlag, 1998

Exceptional Families of Elements and Feasibility for Variational Inequality Problems in Banach Spaces

WANG Min

(*Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610068)

(*Department of Mathematics and Computer Science, Mianyang Normal University, Mianyang* 621000)

(*E-mail: muminzi@163.com*)

ZHOU Mi

(*small Faculty of Technology, Sanya College, Sanya* 572022)

(*E-mail: mizhou330@126.com*)

Abstract In this paper, we apply the exceptional families of elements to the study of feasibility of general variational inequality problems with quasimonotone operator. This generalized the corresponding results from complementarity problems to variational inequality problems. We also show that for a quasimonotone operator, the solvability of a general variational inequality problem is equivalent to the property of the function to be without the exceptional families of elements by using the generalized projection operator and the Leray-Schauder type alternative.

Key words exceptional families of elements; quasimonotone operator; generalized projection operator; feasibility; variational inequality problems

MR(2000) Subject Classification 47J20; 49J40; 58E35

Chinese Library Classification O22; O177.92