

界面脱胶圆夹杂对 SH 波散射的远场解¹⁾

赵嘉喜²⁾ 齐 辉³⁾

(哈尔滨工程大学建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 采用 Green 函数方法和复变函数法研究了 SH 波对界面脱胶圆夹杂的散射问题, 并给出了远场解答. 首先, 沿双质材料界面将整个空间分成上下两部分, 在下半空间, 给出了在水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源载荷作用时的位移函数, 取该位移函数作为 Green 函数. 其次, 在下半空间, 利用相关文献给出的 Green 函数, 在上下空间连接时在双质材料界面处满足连续性条件, 构造出半圆形脱胶裂纹, 进而求出应力和位移的表达式, 建立积分方程组, 给出了散射波远场位移模式和散射截面的解答, 分析了在不同参数变化时 SH 波散射的远场特性. 结果表明, 脱胶结构的存在对位移和散射截面有较大的放大作用.

关键词 界面, SH 波, Green 函数法, 圆柱形弹性夹杂, 散射截面

中图分类号: O23 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2009)01-047-05

FAR FIELD SOLUTION OF SH-WAVE SCATTERED BY AN INTERFACE CYLINDRICAL INCLUSION WITH DISCONNECTED CURVE¹⁾

ZHAO Jiayi²⁾ QI Hui³⁾

(Civil Engineering College, Harbin University of Engineering, Harbin 150001, China)

Abstract This paper investigates the far field solution of SH-wave scattered by an interface cylindrical inclusion with a disconnected curve near bi-media material by use of Green's function method and complex function method. First, along the interface of bi-media material, we divide the space into up and down parts. In the down part, a suitable Green's function for the present problem is constructed, which is the essential solution of the displacement field due to the out-plane harmonic line source load at the horizontal surface. Then in the up part, a suitable Green's function is used. Thereby the semicircular disconnected curve can be constructed when the two parts are bonded to be continuous in the interface impacted by SH-wave. And the expressions of the displacement field and the stress field are obtained and the integral equation is set up under this situation. The displacement mode of scattered wave at far field and scattering cross-section is obtained. Numerical results are illustrated and the influence of different parameters at far field is discussed. It is found that the displacement and scattering cross-section can be enlarged by the disconnected curve.

Key words interface, SH-wave, Green's function, cylindrical elastic inclusion, scattering cross-section

含有缺陷的结构动态响应是当今研究的热点之一, 为结构设计提供合理的参考依据. 双质材料广泛应用于工程材料中, 为了工程需要, 双质材料结构中会增加各种夹杂结构. 在外力作用时, 可能会造

成双质材料中起增强作用的夹杂材料与基体的连接不当, 出现脱胶现象. 含有脱胶结构的材料体在弹性波作用下动力问题, 一直受到很多学者的重视. 20 世纪 80 年代, Yang 等^[1] 曾对圆柱夹杂与基体

2008-03-25 收到第 1 稿, 2008-06-23 收到修改稿.

1) 黑龙江省自然科学基金项目资助 (A0206).

2) 赵嘉喜, 男, 博士生, 主要从事断裂理论研究. E-mail: zhaojiaxi1980@126.com

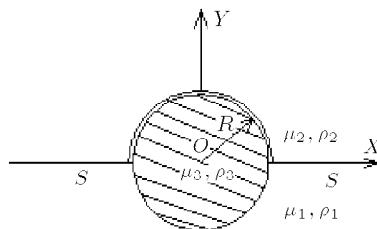
3) 齐辉, 男, 教授, 博士生导师, 主要从事弹性波理论研究. E-mail: qihui205@sina.com

有一处脱胶的情况进行了研究. 20 世纪末, 汪越胜等^[2~4] 采用求解奇异积分方程的方法, 较为系统地研究了裂纹体弹性波的散射问题. 刘殿魁等^[5] 采用求解弱奇异性积分方程组的方法, 研究了剪切波对界面裂纹的作用问题.

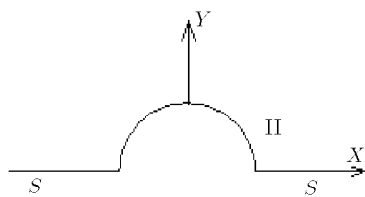
迄今为止, 在发表的诸多双质材料动力学反问题的研究成果中, 双质材料缺陷几乎都是以基体中脱胶夹杂以及界面圆孔和界面刚柱的形式出现^[1,4,6,7], 但对于含有脱胶结构的双质材料缺陷的散射问题却极少研究. 本文采用 Green 函数方法和复变函数法研究了 SH 波对双质材料附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的散射问题——双质材料缺陷和脱胶结构共同作用时引起的散射波远场位移模式和散射截面.

1 问题的表述

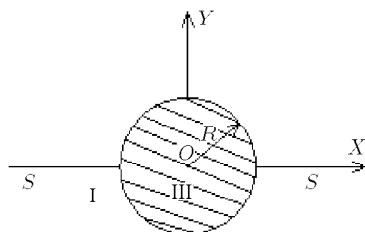
图 1(a) 表示的是双质材料附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的模型. 本文中, 可将模型沿双质材料界面分成两部分, 图 1(b) 表示在上半空间的介质中有一个半圆形孔洞, 图 1(c) 表示在下半空间的介质中含有一半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂.



(a) 问题的模型



(b) 含有半圆形孔洞的弹性半空间



(c) 弹性半空间含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂

图 1 双质材料附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂模型

2 Green 函数

2.1 基本方程

位移函数 W , 满足如下方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0 \quad (1)$$

式中, $k = \frac{\omega}{c_s}$, $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, ω 是位移函数 $W(x, y, t)$ 的圆频率, c_s 表示剪切波速, ρ, μ 分别是介质的密度和剪切模量.

在极坐标中, 相应的应力可以写为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \\ \tau_{\theta z} &= i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2.2 Green 函数 I

图 1(c) 表示一个在含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂的弹性半空间, 当其水平面 S 上任意一点承受时间谐和的出平面线源载荷 $\delta(|z - z_0|)$ 作用时, 我们将它分成 I 和 III 两部分, 满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= W^{(st)}, \quad r = R \\ \tau_{rz,1} &= \tau_{rz}^{(st)}, \quad r = R \\ \tau_{\theta z} &= \delta(z - z_0), \quad \theta = 0, \pi, |z_0| > R \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在半空间中由线源载荷产生的入射波 $W^{(i)}$

$$W^{(i)} = \frac{i}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_1 |z - z_0|) \quad (4)$$

由半圆形凹陷所激发的散射波 $W^{(s)}$

$$W^{(s)} = W_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_1 |z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\} \quad (5)$$

其中, A_m 是待定的系数, 由边界条件决定.

在区域 III, 构造一个驻波, 使其在边界“C”上满足应力自由, 在边界“C”满足应力和位移连续, 参考文献 [8] 的处理方法可得

$$W^{(st)} = W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \frac{J_{m-1}(k_3 R) - J_{m+1}(k_3 R)}{J_{n-1}(k_3 R) - J_{n+1}(k_3 R)} a_{mn} J_n(k_3 |z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^n \quad (6)$$

其中, W_0 是驻波的最大幅值, 取 1.

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n \\ \frac{1 - e^{-i(m-n)\pi}}{2\pi i(m-n)}, & m \neq n \end{cases} \quad (7)$$

在边界 \bar{S} 上满足

$$W^{(i)} + W^{(s)} = W^{(st)}, \quad \tau_{rz}^i + \tau_{rz}^s = \tau_{rz}^{(st)} \quad (8)$$

方程 (8) 就是确定 A_m, C_m 的无穷代数方程组。因此，介质 I 的 Green 函数 I 为

$$G_1 = W^{(i)} + W^{(s)} = \frac{i}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_1|z - z_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_1|z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\} \quad (9)$$

2.3 Green 函数 II

如图 1(b) 所示，参考文献 [6]，介质 II 中的 Green 函数 II，用复变函数法可求得

$$G_2 = W_{II}^{(i)} + W_{II}^{(s)} = \frac{i}{2\mu_2} H_0^{(1)}(k_2|z - z_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_2|z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\} \quad (10)$$

式中， B_m 为散射波的待定系数。

3 定解积分方程组

3.1 SH 波入射

图 2 表示的是全空间中 SH 波的入射示意图。其中入射波 $W^{(i)}$ ，反射波 $W^{(r)}$ ，折射波 $W^{(f)}$ 可参考文献 [6]，同时采用分区思想，即与 Green 函数 I 和 II 的相同的解法，可以求得区域 I，区域 II 中的散射波以及区域 III 中的驻波。

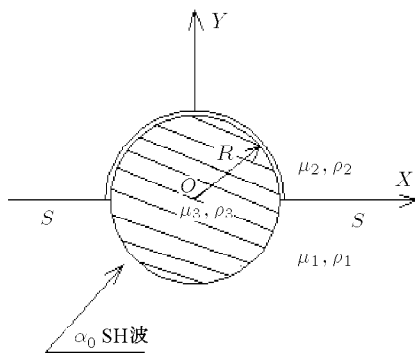


图 2 SH 波入射示意图

3.2 确定双质材料界面未知力系的积分方程组

上文中我们求得了介质 I 中的入射波 $W^{(i)}$ ，反射波 $W^{(r)}$ ，散射波 $W^{(s)}$ 和介质 II 中的折射波 $W^{(f)}$ ，散射波 $W^{(s)}$ 。可以采用文献 [6] 的“契合”方法来解决这类问题。同时利用“剖面”上应力连续性条件，可得待求外力系 $f_1(r_0, \theta_0)$ 的积分方程组

$$\int_R^{\infty} f_1(r_0, \pi) [G_1(r, \pi; r_0, \pi) + G_2(r, \pi; r_0, \pi)] dr_0 + \int_R^{\infty} f_1(r_0, 0) [G_1(r, \pi; r_0, 0) + G_2(r, \pi; r_0, 0)] dr_0 = (W_{II}^{(s)} - W_I^{(s)})|_{\theta = \pi} \quad (11)$$

$$\int_R^{\infty} f_1(r_0, \pi) [G_1(r, 0; r_0, \pi) + G_2(r, 0; r_0, \pi)] dr_0 + \int_R^{\infty} f_1(r_0, 0) [G_1(r, 0; r_0, 0) + G_2(r, 0; r_0, 0)] dr_0 = (W_{II}^{(s)} - W_I^{(s)})|_{\theta = 0} \quad (12)$$

式中， G_1, G_2 分别为介质 I, II 中的 Green 函数。上述定解积分方程组采用弱奇异积分方程组直接离散法进行求解。

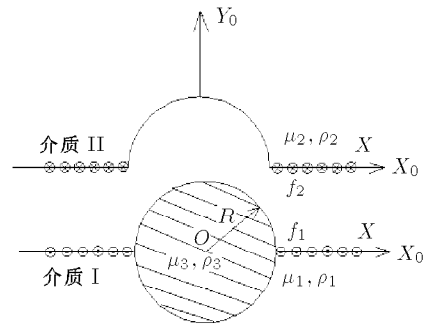


图 3 形成双质材料体

4 SH 波散射的远场解答

散射波场的各个分量包括几何波场对圆孔产生的散射波 $W^{(is)}$ ， $W^{(rs)}$ 和 $W^{(fs)}$ 以及界面附加外力系产生的散射波 $W^{(f1)}$ 和 $W^{(f2)}$ 。参考文献 [6] 的思路和方法，利用 Hankel 函数在宗量充分大时的渐近表达式 [9]，可求得介质 I, II 中的散射波的远场位移模式 $F^{(I)}(\theta)$ ， $F^{(II)}(\theta)$ 和散射截面 γ 。

5 算例和算例分析

给出不同材料组合时 SH 波入射引起的散射波远场位移模式随角度的分布变化以及散射截 (SCS) 随入射波数的变化。其中，上下介质不同材料的组合用两个与材料常数有关的无量纲参数 $\mu_2^* = \mu_2/\mu_1$ 和 $k_2^* = k_2/k_1$ 来表示，圆形弹性夹杂参数用参数比 $\mu_3^* = \mu_3/\mu_1$ 和 $k_3^* = k_3/k_1$ 来表示。

(1) 图 4 给出了 $k_1 R = 1.0$ ， $\mu_2^* = \mu_3^* = k_2^* = 1.0$ ， $\mu_3^* = 0.01$ ，当 SH 波垂直入射时，即可以退化成均匀介质中含有圆形孔洞的情况，采用本文方法求得的结果与文献 [6] 十分接近，图 5，图 6 给出的是 $k_1 R = 1.0, 2.0$ ， $\mu_2^* = \mu_3^* = \mu_3^* = 1.0$ ，当 k_2^* 不同时，散

射波远场位移模式的空间分布. 我们发现, 与文献 [6] 中的界面圆孔的情况相比, 含有半圆形脱胶处的远场位移幅值有较大程度的提高. 例如当 $k_1R = 1.0$, $\mu_2^* = k_2^* = k_3^* = \mu_3^* = 1.0$ 时, 半圆形脱胶 90° 处的幅值为 0.259, 比文献 [6] 中均匀介质圆孔 90° 处的数值增大了 1 倍多. 同时, 当固定圆形弹性夹杂的

参数, 双相介质不同材料组合时的远场位移模式的幅值偏高, 当入射波波数增加, 其在空间中的变化更为复杂.

(2) 图 7 给出了 $k_1R = \mu_2^* = k_3^* = k_2^* = 1.0$, $\mu_3^* = 0.01$ 时, SH 波垂直入射时散射截面随入射波数的变化, 此时可退化成均匀介质中含圆孔的情况, 并且得到的结果与文献 [6] 完全一致. 图 8, 图 9 给出的是 SH 波垂直入射时散射截面随入射波数的

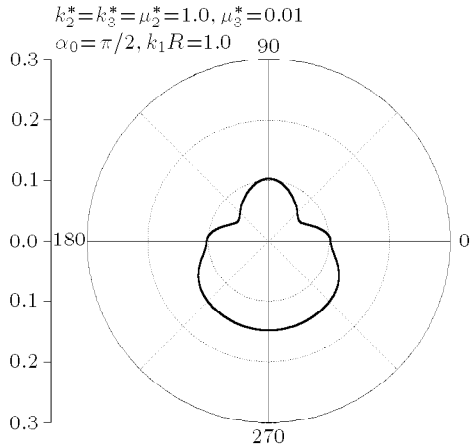


图 4 SH 垂直入射时散射波远场位移模式

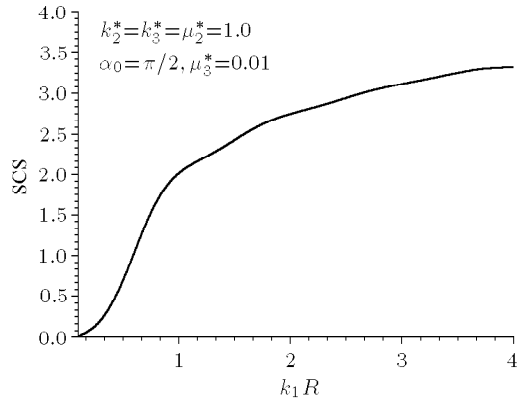


图 7 SH 波垂直入射时的散射截面随入射波波数的变化

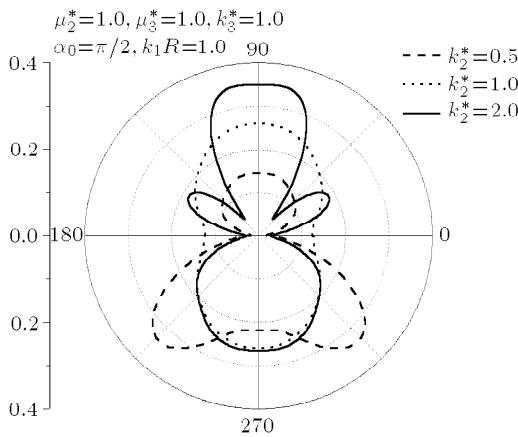


图 5 SH 垂直入射时散射波远场位移模式

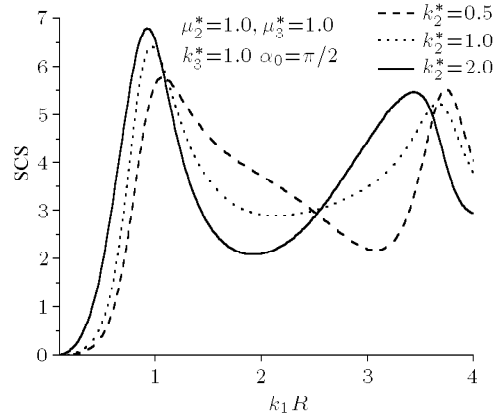


图 8 SH 波垂直入射时的散射截面随入射波波数的变化

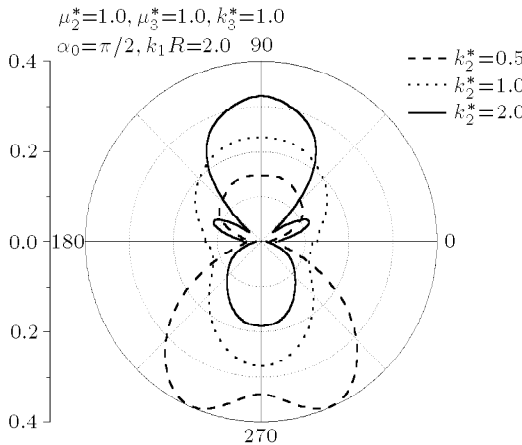


图 6 SH 垂直入射时散射波远场位移模式

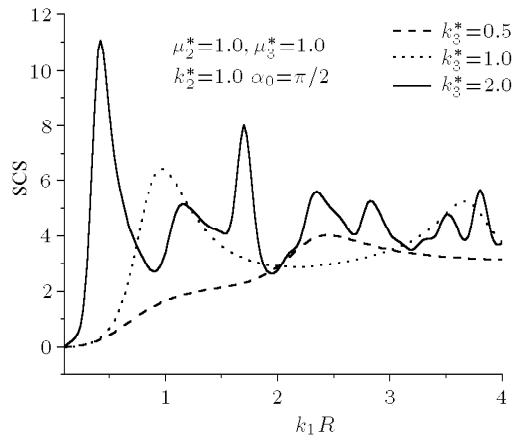


图 9 SH 波垂直入射时的散射截面随入射波波数的变化

变化曲线. 其中如图 8 所示, 固定 $\mu_2^* = 1.0$, 变化 k_2^* , 此时散射产生的总散射能量明显有别于均匀介质时的情况, 并有明显的方向性, k_2^* 越大, 出现峰值时的波数越小, 峰值就会越大, “低频”共振现象越明显. 如图 9 所示, 固定 μ_3^* , 变化 k_3^* , 可以看出, 随着波数的增大, 总散射能量会出现较强的波动性和震荡现象, 这是由于当夹杂内的波数很大时, 夹杂和介质进行了较复杂的能量分配.

6 结 论

本文采用 Green 函数方法和复变函数方法研究了界面脱胶圆夹杂对 SH 波散射的远场解, 得到了以下结论:

(1) 脱胶结构对散射波的远场位移影响很大, 相对于圆孔的情况, 远场位移幅值能提高数倍. 从能量的角度来看, 这主要是由于脱胶结构会吸收一部分能量, 促使能量重新分配, 从而引起脱胶以及附近区域位移和应力的急速增大.

(2) 随着入射波波数的增大, 散射截面会出现不同程度的“低频”共振现象. 同时, 双相介质材料差距越大, 峰值也会越大, 双相介质参数 k_2^* 越大, 散射波所带走的最大能量就越大. 此外, 圆形弹性夹杂的材料性质明显影响到散射波的能量分配, 并有可能带走很大的散射能量.

参 考 文 献

1 Norris A, Yang Y. Dynamic stress on a partially bonded fiber. *J Appl Mech*, 1991, 58: 404~409

- 2 Wang YS, Wang D. Shear wave scattering from a partially debonded elastic elliptic inclusion. *Mech Res Commu*, 1995, 22: 79~86
- 3 Wang YS, Wang D. Dynamic analysis of a buried rigid elliptic cylinder partially debonded from surrounding matrix under shear waves. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1995, 1: 51~63
- 4 汪越胜, 王铎. SH 波对有部分脱胶衬砌的圆形孔洞的散射. 力学学报, 1994, 26(4): 462~469(Wang Yuesheng, Wang Duo. Diffraction of SH-waves by a circular cavity with a particular debonded liner. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 26(4): 462~469(in Chinese))
- 5 史守峡, 杨庆山, 刘殿魁等. SH 波对圆形夹杂与裂纹的散射及其动应力集中. 复合材料学报, 2000, 17(3): 107~112(Shi Shouxia, Yang Qingshan, Liu Dianhui, et al. Dynamic stress concentration and scattering of SH-wave by circle intermixture and crack. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2000, 17(3): 107~112(in Chinese))
- 6 刘宏伟, 刘殿魁. 界面圆孔对 SH 波散射的远场解. 固体力学学报, 1999, 20(4): 349~355 (Liu Hongwei, Liu Diankui. Far field solution of SH-wave scattered by interface circular hole. *Acta Solida Mechanica Sinica*, 1999, 20(4): 349~355(in Chinese))
- 7 田家勇, 刘殿魁, 刘春旭. 界面固定圆形刚柱对 SH 波散射的远场解. 哈尔滨工程大学学报, 1999, 20(4): 90~97(Tian Jiayong, Liu Diankui, Liu Chunxu. Far field solution of SH-wave by interface cylindrical rigid inclusion. *Journal of Harbin Engineering University*, 1999, 20(4): 90~97(in Chinese))
- 8 刘殿魁, 王国庆. 浅埋圆形孔洞附近的半圆形凸起对 SH 波的散射. 力学学报, 2006, 3(2): 209~218(Liu Diankui, Wang Guoqing. Antplane SH-deformation of a semi-cylindrical hill above a subsurface cavity. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 3(2): 209~218(in Chinese))
- 9 鲍亦兴, 毛昭宙著. 刘殿魁, 苏先懋译. 弹性波的衍射与动应力集中. 北京: 科学出版社, 1993. 90~91

~~~~~  
(上接第 94 页)

联合颁发的奖励. 武际可教授本人于 2002 年被科技部、中宣部、中国科学技术协会授予全国科普先进工作称号. 《力学小问题》、《力学小问题及全国大学生力学竞赛试题》受到广大读者的关注, 常有高校的辅导老师及参赛学生来电来信询问购买该书事宜. 第三届全国周培源大学生力学竞赛一等奖获得者王飞同学的获奖感言具有一定的代表性: “我能够获得全国大学生力学竞赛的一等奖, 很大程度得益于我将《力学与实践》刊登的‘小问题’都做了一遍”.

《力学与实践》的工作得到了中国力学学会常务理事会的充分肯定. 中国力学学会于 2007 年 10 月启动《大众力学丛书》的编辑出版工作, 经中国力学学会理事长、秘书长会

议讨论, 成立了《大众力学丛书》编委会, 聘任的 13 位编委中, 有 9 位来自《力学与实践》编委会, 武际可教授担任主任委员. 《大众力学丛书》第一辑已于 2008 年出版, 其中有武际可教授的《拉家常 说力学》、王振东教授的《诗情画意谈力学》、刘延柱教授的《趣味刚体动力学》, 这 3 本书是《力学与实践》“身边力学趣话”栏目近 20 年来长期积累的成果.

普及力学知识是我们力学工作者义不容辞的责任, 把力学知识普及到人民大众中去, 普及到青少年中去一直是《力学与实践》的目标. 我们期待广大读者、作者和编委会继续努力, 为力学事业的发展、普及和应用推出更多的好书.