第 35 卷 第 5 期 应用数学学报 Vol. 35 No. 5
2012 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2012

无圈超图规模的进一步研究 *

赵凌琪

(内蒙古民族大学计算机科学与技术学院，通辽 028043)

冯 伟

(内蒙古民族大学数学学院，通辽 028043)

徐春雷

(内蒙古民族大学计算机科学与技术学院，通辽 028043)

吉日木图

(内蒙古民族大学数学学院，通辽 028043)

(E-mail: jrmt@sina.com)

摘 要 本文在王建方给出的严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模的基础上，进一步研究 n 阶 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模和非严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模，并分别得到它们规模的上下界.

关键词 k- 匀齐无圈超图； (d)- 连通；无圈超图的规模

MR(2000) 主题分类 05C88

中图分类 O157.5

1 引言

超图是有限集合的子集合系统，是最具一般性的离散结构. 在组合论中许多有限集合系统与超图有关，如 Ramsey 理论，有限几何，拟阵等. 20 世纪 80 年代，计算机科学家在研究数据库理论时，发现属性集 R 上的一个数据库图式就是 R 上的一个超图，进而引进了无圈超图的新概念并证明它们在数据库理论中非常有用 [1−4]. 本文在 [6] 中给出的严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模的基础上，进一步研究 n 阶 (d)- 连通 k-

本文 2011 年 3 月 8 日收到. 2011 年 8 月 29 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (No.11161032)，内蒙古科技厅基金 (No.2010MS0122)，内蒙古自治区高等学校科学研究 (No.NJZY11209) 和内蒙古民族大学离散数学研究所资助项目.

匀齐无圈超图的规模和非严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模，并分别得到它们规模的上下界.

2 预备知识

设 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个有限集合，$\varepsilon=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是 V 的一个子集合族，即 $\varepsilon\subseteq 2^V$. 我们称 $H=(V,\varepsilon)$ 是在 V 上的一个超图, 如果对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $e_i\neq\emptyset$, 和 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}e_i=V$, 我们也简单地称 ε 是 V 上的一个超图. V 的元素称为顶点，ε 的元素称为边. $|V|$ 称为 ε 的阶，$|\varepsilon|$ 为 ε 的规模.

如果 ε 的每条边 e, 都有 $|e|=k$ $(2\leq k\leq n)$, 则称 ε 是一个 k- 匀齐超图. 如果 $k=2$, 则称 ε 是一个普通图.

无圈超图有很多等价定义，本文使用 [7] 的定义. 设 $e_1\in\varepsilon$, e_1 称为 ε 的一个耳朵，如果下面条件之一满足：(i) $e_1\cap e=\emptyset$ 对所有的 $e\in\varepsilon\setminus\{e_1\}$; (ii) 存在 $e_2\in\varepsilon\setminus\{e_1\}$, 使得对任意的 $e\in\varepsilon\setminus\{e_1\}$, $(e_1\setminus e_2)\cap e=\emptyset$. 一个超图的 Graham 约简是由重复移除耳朵直到不再可能移除所得到的超图.

定理 2.1 [6] 若 ε 是一个无圈超图，则它的 Graham 约简是空的.

还有一个定义涉及到一个有用的参数, 假设 ε 是一个 m 条边的超图, 它的线图 $L(\varepsilon)$ 被定义为一个图，其顶点集合为 ε, 边集合为 $\{(e_i,e_j):e_i,e_j\in\varepsilon,e_i\cap e_j\neq\emptyset\}$. 每条边 (e_i,e_j) 赋权 $|e_i\cap e_j|$, $\omega(\varepsilon)$ 表示 $L(\varepsilon)$ 的森林的最大权，称参数

$$\mu(\varepsilon)=\sum_{e\in\varepsilon}|e|-\Big|\bigcup_{e\in\varepsilon}e\Big|-\omega(\varepsilon)$$

为 ε 的圈空间的维数，其中 $|\cup_{e\in\varepsilon}e|=|V|$.

定理 2.2 [6] 超图 ε 是无圈的当且仅当 $\mu(\varepsilon)=0$.

定义 2.3 [6] 设 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ 是超图 ε 的一个边序列，$S_i=e_i\cap e_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,k-1$. 我们称 P 是 ε 的一条路, 如果对任意的 i,j, $i\neq j$, $e_i\backslash e_j\neq\emptyset$ 和 $S_i\backslash S_j\neq\emptyset$. S_i 称为关节，我们称 P 是连接 e_1 和 e_k 的一条路. 如果 $d=\min\limits_{1\leq i\leq k-1}|S_i|$, 我们称 P 是一条 d- 维路，简称 (d)- 路.

定义 2.4[6] ε 称为是 d- 维连通的，简称 (d)- 连通的，如果对任两条边 E 和 $E^{'}$ 都存在连接 E 和 $E^{'}$ 的一条 (m)- 路，$m\geq d$.

定理 2.5 [6] 对一个 n 阶 m 条边的约简无圈超图，有

$$m\leq n-\max_{e\in\varepsilon}|e|+1.$$

推论 2.6 [6] 一个最大 n 阶 k- 匀齐无圈超图有 $n-k+1$ 条边.

定义 2.7 [6] ε 称为严格 (d)- 连通的，如果它是 (d)- 连通的，并且对任意两条不同边 E 和 $E^{'}$ 都有 $|E\cap E^{'}|\leq d$.

定理 2.8 [6] 设 $n \geq k > d \geq 1, (k-d)|(n-d)$，$\varepsilon$ 是一个 n 阶严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图，则

$$|\varepsilon| = \frac{n-d}{k-d}.$$

定理 2.9 [6] ε 是一个 n 阶严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图，则

$$(k-d)|(n-d).$$

定理 2.10 [6] 设 ε 是 n 阶最大 k- 匀齐无圈超图，则对 ε 的任意两条边 e_1，e_2, 存在一条连接 e_1 和 e_2 的 $(k-1)$- 路.

3 本文主要结果

我们在上述研究结果的基础上，进一步研究 n 阶 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图规模和非严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模，并得到如下结果.

定理 3.1 设 $n \geq k > d \geq 1$，ε 是一个 n 阶 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图，则

$$\frac{n-d}{k-d} \leq |\varepsilon| \leq n+d-2k+2.$$

证 设 F 是 ε 的线图 $L(\varepsilon)$ 的最大权支撑森林，我们知道，(d)- 连通的无圈超图的最大权支撑森林 F 是一棵树，所以 F 有 $|\varepsilon|-1$ 条边．那么我们分两种情况讨论：

先证明下界．因为 F 的各边权值不小于 d, 否则，若在 F 中存在权值小于 d 的边，这与 ε 是 (d)- 连通矛盾．当 F 的各边权值均取 d 时，n 阶 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模达到最小，所以有 $\omega(\varepsilon) \geq (|\varepsilon|-1)d$. 又因为 ε 是无圈的，则

$$0 = \mu(\varepsilon) = \sum_{e\in\varepsilon} |e| - n - \omega(\varepsilon) \leq k|\varepsilon| - n - |\varepsilon|d + d.$$

因此 $|\varepsilon| \geq \frac{n-d}{k-d}$.

再来看上界．当 F 中只有一条边的权值取 d, 而其它边的权值均取 $k-1$ 时，不妨设 $|e_1 \cap e_2| = d$, 则由推论 2.6 和定理 2.10 可知 $\varepsilon_1 = \varepsilon \setminus \{e_1\}$ 是一个最大的 $n-k+d$ 阶严格 $(k-1)$- 连通 k- 匀齐无圈超图．因此 n 阶 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图 $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \{e_1\}$ 的规模也达到最大．故 $\omega(\varepsilon) \leq d + (|\varepsilon|-2)(k-1)$. 又因为 ε 是无圈的，则

$$0 = \mu(\varepsilon) = \sum_{e\in\varepsilon} |e| - n - \omega(\varepsilon) \geq k|\varepsilon| - n - d - (|\varepsilon|-2)(k-1).$$

因此 $|\varepsilon| \leq n+d-2k+2$. 综上有 $\frac{n-d}{k-d} \leq |\varepsilon| \leq n+d-2k+2$. 证毕.

那么当 F 的各边权值均取 d 时，ε 就是一个 n 阶严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图，因此定理 2.8 的结论就是定理 3.1 结论的下界，即 $|\varepsilon| = \frac{n-d}{k-d}$.

定义 3.2 ε 称为非严格 (d)- 连通的，如果它是 (d)- 连通的，并且存在两条不同的边 E 和 E' 使得 $|E \cap E'| > d$.

定理 3.3 设 $n \ge k > d \ge 1$, $(k-d) \mid (n-d+1)$, ε 是一个 n 阶非严格 (d)- 连通 k-匀齐无圈超图，则

$$\frac{n-d+1}{k-d} \le |\varepsilon| \le n+d-2k+2.$$

证 设 F 是 ε 的线图 $L(\varepsilon)$ 的最大权支撑森林，我们知道，(d)- 连通的无圈超图的最大权支撑森林 F 是一棵树，所以 F 有 $|\varepsilon|-1$ 条边．那么我们分两种情况讨论：

先证明下界．当 F 中只有一条边权值取 $d+1$, 而其它边的权值均取 d 时，n 阶非严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模达到最小，因此有 $\omega(\varepsilon) \ge (d+1)+(|\varepsilon|-2)d$. 又因为 ε 是无圈的，则

$$0=\mu(\varepsilon)=\sum_{e\in\varepsilon}|e|-n-\omega(\varepsilon) \le k|\varepsilon|-n-(d+1)-(|\varepsilon|-2)d.$$

因此 $|\varepsilon| \ge \frac{n-d+1}{k-d}$.

再来看上界．当 F 中只有一条边的权值取 d, 而其它边的权值均取 $k-1$ 时，n 阶非严格 (d)- 连通 k- 匀齐无圈超图的规模达到最大，根据定理 3.1 中上界的情况有 $|\varepsilon| \le n+d-2k+2$. 综上有

$$\frac{n-d+1}{k-d} \le |\varepsilon| \le n+d-2k+2.$$

证毕.

推论 3.4 设 $n \ge k > 1$, $(k-1)|(n-1)$, ε 是一个 n 阶连通 k- 匀齐无圈超图，则

$$\frac{n-1}{k-1} \le |\varepsilon| \le n-k+1.$$

证 因为规模最小的 n 阶连通 k- 匀齐无圈超图就是 n 阶严格 (1)- 连通 k- 匀齐无圈超图，根据定理 3.1 有 $|\varepsilon| \ge \frac{n-1}{k-1}$. 规模最大的 n 阶连通 k- 匀齐无圈超图就是最大的 n 阶严格 $(k-1)$- 连通 k- 匀齐无圈超图，由定理 3.1 有 $|\varepsilon| \le n-k+1$. 因此

$$\frac{n-1}{k-1} \le |\varepsilon| \le n-k+1.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Beeri C, Fagin R, Maier D, Yannalalis M. On the Desirability of Acyclic Database Schemes *JACM*, 1983, 30: 479–513

[2] Lee T T. An Information-theoretic Analysis of Relational Databases, Part I: Data Dependencies and Information Metric. *IEEE Tran. on Soft. Eng.*, 1987, Se-13(10): 1049–1061

[3] Lee T T. An Information-theoretic Analysis of Relational Databasesm, Part II: Information Structures for Database Schemes. *IEEE Tran. Soft. End.*, 1987, Se-13(10): 1062–1072

[4] Ulman J D. Principle of Database Systems. New York: Computer Science Press, 1979

[5] Wang J F, Li H Z. Enumeration of Maximum Acyclic Hypergraphs. *Acta Math. Appl. Sin.*, 2002, 18(2): 215–218

[6] 王建方．超图的理论基础．北京：高等教育出版社， 2006
(Wang Jianfang. Theoretical Basis of Hypergraphs. Beijing: Higher Education Press, 2006)

[7] Wang J F, Lee T T. An Invariant for Hypergraphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1996, 12(2): 113–120

[8] Li H Z, Wang J F. On Acyclic and Cyclic Hypergraphs. *J. Systems Science and Complexity*, 2002, 15(4): 353–362

[9] Wang J F. The Information Hypergraph Theory. Beijing: Science Press, 2008

Further Study on Size of Acyclic Hypergraphs

Zhao Lingqi

(*College of Computer science and Technology, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043)

Feng Wei

(*College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043)

Xu Chunlei

(*College of Computer science and Technology, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043)

Jirimutu

(*College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043)

(*E-mail: jrmt@sina.com*)

Abstract Based on size of strict (d)-connected k-uniform acyclic hypergraph defined by Wang J F, this paper further studies size of (d)-connected k-uniform acyclic hypergraph and not-strice (d)-connected k-uniform acyclic hypergraph on n labeling vertices and obtains upper and lower bound of their sizes, respectively.

Key words k-uniform acyclic hypergraph; (d)-connected; sizes of acyclic hypergraph

MR(2000) Subject Classification 05C88

Chinese Library Classification O157.5