第 35 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 35 No. 4
2012 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2012

网络上 SIR 型传播的随机建模与极限定理 *

王家赠

(北京工商大学数学系，北京 100048)

(E-mail: wangjiazen@yahoo.com.cn)

薛晓峰

(北京大学数学科学学院，北京 100871)

摘　要　复杂网络本身及其上的传播过程是最近以来的研究热门，但是多数的工作都只有宏观模型，没有微观基础．本文中，我们将边与边之间的连接与个体的状态变化看作为基本的泊松流，从微观角度构造了网络上 SIR 型传播的随机模型．对任意有限的固定时间区间，在热力学极限下，从随机系统可以得到一个确定性动力系统 — 所谓的 “水动力极限”．这样，本文为这一领域的唯象的动力学模型建立了一个合理的微观基础．同时，我们得到了收敛速度的估计．

关键词　密度依赖群体过程；收敛速度；一致收敛；　L_1 收敛

MR(2000) 主题分类　92D30; 60F99

中图分类　O211.6

1　引言

最近十几年来，网络理论变得非常流行．在该理论中，以节点代表个体，以节点之间的连边代表个体之间的交互作用，所以网络就代表了真实系统的拓扑特征．现在发现，许多社会系统，如人类的性接触网络，空中交通网络和 WWW 网络都是无标度的 (scale-free)[1−5]．这个结果意味着许多的人类传染性疾病和计算机病毒是在异质群体，而不是在同质群体中传播的 — 这里的异质性体现为每个个体的 “邻居” 是不同的．

传统的研究传播动力学的数学模型是建立在个体同质和完全混合这两个基本假定之上的 [6]．物理上这就是所谓的平均场假设；化学上称为质量作用定理． Lajmanovich 和 York 在研究淋病这种性传播疾病时，首次考虑了个体活跃度不同这个关键因素 [7]．

本文 2011 年 12 月 19 日收到．2012 年 6 月 10 日收到修改稿．

* 国家自然科学基金 (11001004), 北京市组织部优秀人才 (2011D005003000009) 资助项目．

这是已知的突破同质假定的最早的数学工作. 以他们的漂亮工作为发韧, 现在已经建立起很多数学模型, 来研究这种活跃度的异质性对疾病传播的影响 [6,8,9]. 得到了大量有趣的性质, 特别是在传染病的爆发阈值方面, 发现无标度网络的阈值可以非常小 [4,10,11].

现有文献中, 对于网络上的传播动力学的建模, 基本上是唯象的确定性模型 [10,11]. 这种模型, 实际上刻画的是群体水平上的平均变化. 但是, 传播过程在个体层面本质上是离散的、随机的 [12,13]. 每个确定性模型可以看作为相应随机模型的某种近似. 数学建模的一个主要任务就是找出这种逼近的条件.

在数学界, 大量的工作是关于同质结构, 例如格子点和齐次树, 中的随机粒子过程, 一般 SIS 型称为接触过程 (contact process); SIR 型传播被看成渗流 (percolation) 模型 [14−16]. 最近, 一些工作开始关注复杂网络问题, 以及其上的动态过程 [17,18]. 我们认为, 更多的方法论上的创新是需要的, 尤其是在建模的基础性工作上.

在本文中, 我们考虑个体水平的统计行为, 而这是 "异质" 的. 每个子群有不同的 "接触数". 这是受网络理论中 "度分布" 的启发. 我们给每个个体分配固定数量的 "半边", 代表它的社会活动力的水平. 所以我们模型中的异质性来源于个体所拥有的半边的数目. 俩个体之间的接触表示为俩半边之间的连接.

与相对较长的得病阶段和易感阶段相比, 疾病的传染这个事件, 持续时间相对较短, 所以这里我们认为这是瞬时完成的. 这样, 我们可以认为俩个体之间的接触就是 "分子碰撞", 而这种碰撞可能导致一个个体改变其状态: 从 S 到 I. 这样的考虑本质上导致了 "质量作用定理": 任意两条半边, 以相同的概率碰撞. 碰撞事件的发生是随机的、独立的、序贯的, 也就是泊松流. 同时, 发病个体持续期限服从指数分布. 在此基础之上构造了以子类中各种状态的个体数为随机变量的纯跳过程. 在热力学极限下, 在任意的有限时间内, 过程收敛到某个确定性动力系统. 更进一步, 我们得到了这个收敛的速度. 类似于大偏差定理, 对于收敛速度的估计是比较强的结论.

2 模型

这里假设包含 N 个体的一个群体, 每个个体都附着一定数量的 "半边" — 即它们的度. 以度分类, 令 N_k 为每个子类中的个体数, $\rho_k = \frac{N_k}{N}$, $k = 1, 2, \cdots, K$ 即为度分布. 两个量 $\langle k\rangle := \sum\limits_{i=1}^{K} i\rho_i$ 和 $\langle k^2\rangle := \sum\limits_{i=1}^{K} i^2\rho_i$ 分别为度分布的一阶和二阶矩.

根据标准的仓室模型, 每个个体有三种不同的状态: 易感者 (S), 感染者 (I), 移除者 (R). 这里假定个体一旦被感染, 立刻就变成感染者. 令 T_i 表示个体 i 的感染期, 所有 T_i; $i = 1, 2, \cdots, N$ 独立, 服从参数为 1 的指数分布. 然后变成移除者.

对于每条半边, 它与其它半边碰撞的过程是速率为 $\lambda / \sum\limits_{m=1}^{K} mN_m$ 的泊松过程. 当形成一条边的瞬间, 如果两头的节点分别是易感者和感染者, 则易感者确定性地变成感染者. 在每个子类中, 所有易感者以同样的速率改变状态. 所以我们可以定义随机过程 $X^{[N]} = X_t^{[N]}$; $t \geq 0$,

$$X_t^{[N]} =: \big(\big(X_t^{[N]}(S_1), X_t^{[N]}(I_1)\big), \cdots, \big(X_t^{[N]}(S_i), X_t^{[N]}(I_i)\big), \cdots, \big(X_t^{[N]}(S_K), X_t^{[N]}(I_K)\big)\big) \tag{2.1}$$

为 $2K$ 维向量． $X_t^{[N]}(S_i)$ 为时间 t, 子类 i 中易感型个体的数目，相应 $X_t^{[N]}(I_i)$ 是感染者数目．

在时刻 t, 对于给定的半边，它以速率 $\frac{\lambda \sum\limits_{l=1}^{K} l X_t^{[N]}(I_l)}{\sum\limits_{j=1}^{K} jN_j}$ 与“传染性”的半边配对．于是，对于给定的度为 i 的易感者，它将以速率 $\frac{\lambda i \sum\limits_{l=1}^{K} l X_t^{[N]}(I_l)}{\sum\limits_{j=1}^{K} jN_j}$ 被感染．

对于 $i = 1, 2, \cdots, K$, 令 $e(i)$ 为

$$\big((0,0),(0,0),\cdots,\underbrace{(0,1)}_{ith},\cdots,\underbrace{(0,0)}_{Kth}\big). \tag{2.2}$$

令 $\delta(i)$ 为

$$\big((0,0),(0,0),\cdots,\underbrace{(-1,1)}_{ith},\cdots,\underbrace{(0,0)}_{Kth}\big). \tag{2.3}$$

可以用转移类型和相应的速率来刻画这个纯跳马氏过程 $X^{[N]}$:

$$\begin{cases} X_t^{[N]} \to X_t^{[N]} - e(i) & \text{速率} \quad X_t^{[N]}(I_i) \\ X_t^{[N]} \to X_t^{[N]} + \delta(i) & \text{速率} \quad \dfrac{\lambda i X_t^{[N]}(S_i) \sum\limits_{l=1}^{K} l X_t^{[N]}(I_l)}{\sum\limits_{j=1}^{K} jN_j} \\ & i = 1, 2, \cdots, K. \end{cases} \tag{2.4}$$

当 $N \to \infty$, 我们采用确定性初值条件 $\frac{X_0^{[N]}}{N} \equiv \widetilde{x}_0$, 独立于 N. 这样，初始的种子可表示为：

$$\widetilde{v}_0 := \frac{1}{N}\big(N_1 - X_0^{[N]}(S_1), \cdots, N_i - X_0^{[N]}(S_i), \cdots, N_K - X_0^{[N]}(S_K)\big). \tag{2.5}$$

注意这里所有满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{K} I_i = 0$ 的状态为吸收态．

3　主要结果：有限时间区间的确定性极限过程

我们发现，当 $N \to \infty$, $X_t^{[N]}/N$ 收敛到下列确定性积分方程的唯一解 $\widehat{x}_t$:

$$X_t = \widetilde{x}_0 - \sum_{i=1}^{K} e(i) \int_0^t X_s(I_i)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{K} \delta(j) \int_0^t \frac{j\lambda X_s(S_j)}{\langle k\rangle} \sum_{l=1}^{K} l X_s(I_l)\,\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

此结论依赖于 [19] 中第十一章的如下两个定理，这里我们作为引理给出：

引理 3.1 设 $\{\beta_l : l \in Z^d\}$ 是一族定义域为 R^d 的非负有界函数，且满足

$$\sum_l |l| \sup_{x\in R^d} \beta_l(x) < +\infty \tag{3.2}$$

以及 $F(x) := \sum\limits_l l\beta_l(x)$ 满足 Lipschitz 条件. 设 $x_0 \in R^d$, $X(t)$ 是积分方程

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(X(s))\,\mathrm{d}s \tag{3.3}$$

的解.

记 $\{Y_l(t) : l = 1, 2, 3, \cdots\}$ 是一族相互独立的泊松过程，记 $\widetilde{Y}_l(t) = Y_l(t) - t$. 若 d 维向量空间随机过程序列 $X_n(t) : n = 1, 2, 3, \cdots$ 满足：

$$X_n(t) = X_n(0) + \sum_l ln^{-1}\widetilde{Y}_l\Big(n\int_0^t \beta_l(X_n(s))ds\Big) + \int_0^t F(X_n(s))\,\mathrm{d}s \tag{3.4}$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(0) = x_0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{s\le t} |X_n(s) - X(t)| = 0 \qquad \text{a.s.} \tag{3.5}$$

引理 3.2 β, F 的定义同前一定理, 若一族状态空间为 R^d 跳过程 $X_n : n = 1, 2, 3, \cdots$ 的转移速率满足：

$$q^{(n)}(x, x+l) = n\beta_l\Big(\frac{x}{n}\Big) \tag{3.6}$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-1}X_n(0) = x_0$, 则 $n^{-1}X_n$ 可以写成 (3.4) 的形式.

具体到我们的模型， $d = 2K$, β_l 定义如下，任给 $x \in R^{2K}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\beta_{-e(i)}(x) = x(I_i), \tag{3.7}$$

$$\beta_{\delta(i)}(x) = \frac{i\lambda x(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^K lx(I_l), \tag{3.8}$$

其余 β_l 定义为零函数.

直接计算很容易验证我们模型的转移速率在上述取定 β 下满足上面两个定理的条件，于是得到 $\widehat{x}_t$.

我们得到了关于收敛的更强的结果. 首先，我们给出在一个紧的时间区间上， $\frac{X_t^{[N]}}{N}$ 一致收敛到 $\widehat{x}_t$ 的收敛速度的估计.

定理 3.1 对任给的 $T < \infty$, 存在常数 K(T) 使得当 $N \to \infty$,

$$P\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big\|\frac{X_t^{[N]}}{N} - \widehat{x}_t\Big\|_1 > K(T)N^{-1/2}\log N\Big] = O(N^{-1/2}), \tag{3.9}$$

这里

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{K} \big[|x(I_i)| + |x(S_i)|\big], \tag{3.10}$$

对于 $x \in R^{2K}$， $\widehat{x}_t$ 是方程 (3.1) 的唯一解.

更进一步，我们估计了 $\frac{X_t^{[N]}}{N}$ 以 L_1 收敛到 $\widehat{x}_t$ 的收敛速度.

定理 3.2 给定 $t < \infty$, 当 $N \to \infty$ 时,

$$E\left\|\frac{X_t^{[N]}}{N} - \widehat{x}_t\right\|_1 = O(N^{-1/2}). \tag{3.11}$$

4 证明

在 [20] 中， Barbour 和 Luczak 研究了可列无穷多维的跳过程的收敛问题，在他们的证明中，本质上是一种两步走的方法. 其一是构造一个由独立个体组成的跳过程，跳的速率来自于一个确定性系统；其二是想办法构造一个耦合.

基于这种两步走的思想，第一步我们通过原始过程 X_t^N, 构造近似过程 $\widehat{X}_t^N$, 其中只包含独立的个体. 这种独立性使我们可以应用独立随机变量的密度不等式去估计 $\frac{\widehat{X}_t^N}{N}$ 和确定性过程 $\widehat{x}_t$ 之间的误差；第二步是揭示 X_t^N 和 $\widehat{X}_t^N$ 之间的相似性. 通过构造一种耦合，我们能够控制它们之间的偏差 — 这样就实现了我们的目的. 因为本文中最大度 K 是有限的，所以我们得到的结果也更强.

4.1 近似过程 $\widehat{X}_t^N$：假设个体相互独立

方程 (3.1) 能被写成

$$X_t = \widetilde{x}_0 + \int_0^t F(X_s)\,\mathrm{d}s, \tag{4.1}$$

这里 $F: R^{2K} \to R^{2K}$ 满足

$$F(X)(I_i) = -X(I_i) + \frac{i\lambda X(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} lX(S_l),$$

$$F(X)(S_i) = -\frac{i\lambda X(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} lX(S_l),$$

$i = 1, 2\cdots, K$, $X \in R^{2K}$.

因为最大度 K 有限，在 (3.10) 所定义的模 $\|\cdot\|_1$ 之下，容易验证 F 是局部 Lipschitz 的. 所以， (3.1) 有唯一解 $\widehat{x}_t$.

当 $t \to +\infty$， $\widehat{x}_t$ 与我们的传播过程的行为非常相似. 首先，对任意 t, $\widehat{x}_t$ 中的元素是非负的，因为 $\frac{d\widehat{x}_t(S_i)}{dt} = 0$ 当 $\widehat{x}_t(S_i) = 0$, 且 $\frac{d\widehat{x}_t(I_i)}{dt} \geq 0$ 当 $\widehat{x}_t(I_i) = 0$. 其次，由于

$$\frac{d[\widehat{x}_t(S_i) + \widehat{x}_t(I_i)]}{dt} = -\widehat{x}_t(I_i) \leq 0, \tag{4.2}$$

对任意 i, $\widehat{x}_t(S_i)+\widehat{x}_t(I_i)$ 递减. 所以, 当 $t\to+\infty$, $\|\widehat{x}_t\|_1$ 递减.

我们定义新的模

$$\|X\|_{11}=\sum_{i=1}^{K}i^2\big(|X(I_i)|+|X(S_i)|\big), \tag{4.3}$$

$X\in R^{2K}$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $\|\widehat{x}_t\|_{11}$ 也是递减的.

我们考虑一个近似的时间非齐次的马氏过程 $\widehat{X}_t^{[N]}$, 从 $\widehat{X}_0^{[N]}=X_0^{[N]}$ 开始, 包含相互独立的个体. $\widehat{X}_t^{[N]}$ 的特殊性在于: 在时间 t, 对于一个给定的易感者 (S) 个体, 有 i 条半边, 它将以速率 $\frac{\lambda i\sum\limits_{l=1}^{K}l\widehat{x}_t(I_l)}{\langle k\rangle}$ 被感染, 对于一个感染者 (I), 它将以速率 1 被移除. 所以, 过程 $\widehat{X}_t^{[N]}$ 的转移速率为

$$\begin{cases}\widehat{X}_t^{[N]}\to\widehat{X}_t^{[N]}-e(i) & \text{速率}\quad \widehat{X}_t^{[N]}(I_i)\\ \widehat{X}_t^{[N]}\to\widehat{X}_t^{[N]}+\delta(i) & \text{速率}\quad \dfrac{\lambda i\widehat{X}_t^{[N]}(S_i)\sum\limits_{l=1}^{K}l\widehat{x}_t(I_l)}{\langle k\rangle}\\ & i=1,2,\cdots,K.\end{cases} \tag{4.4}$$

我们有如下的定理:

引理 4.1 对任给的 $t\in[0,+\infty)$,

$$\frac{E\widehat{X}_t^{[N]}}{N}=\widehat{x}_t. \tag{4.5}$$

证 由 [19] 中的定理 6.4.1, $\widehat{X}_t^{[N]}$ 可写为:

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t^{[N]}=&X_0^{[N]}-\sum_{i=1}^{K}e(i)Y_{2i}\Big(\int_0^t\widehat{X}_s^{[N]}(I_i)\,\mathrm{d}s\Big)\\ &+\sum_{i=1}^{K}\delta(i)Y_{1i}\bigg(\int_0^t\frac{i\lambda\widehat{X}_s^{[N]}(S_i)\sum\limits_{l=1}^{K}\widehat{x}_s(I_l)}{\langle k\rangle}\,\mathrm{d}s\bigg),\end{aligned} \tag{4.6}$$

除以 N, 取期望, 我们有

$$\frac{E\widehat{X}_t^{[N]}}{N}=\widetilde{x}_0-\sum_{i=0}^{K}e(i)\int_0^t\frac{E\widehat{X}_s^{[N]}(I_i)}{N}\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{K}\delta(i)\int_0^t\frac{E\widehat{X}_s^{[N]}(S_i)}{N}\frac{i\lambda\sum\limits_{l=1}^{K}\widehat{x}_s(I_l)}{\langle k\rangle}\,\mathrm{d}s. \tag{4.7}$$

所以 $\frac{E\widehat{X}_t^{[N]}}{N}$ 是下面积分方程的解

$$Y_t=\widetilde{x}_0-\sum_{i=0}^{K}e(i)\int_0^tY_s(I_i)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{K}\delta(i)\int_0^t\frac{i\lambda Y_s(S_i)\sum\limits_{l=1}^{K}\widehat{x}_s(I_l)}{\langle k\rangle}\,\mathrm{d}s. \tag{4.8}$$

显然 $\widehat{x}_t$ 也是 (4.8) 的解.

通过验证 Lipschitz 条件，容易检验方程 (4.8) 有唯一解．所以 $E\widehat{X}_t^{[N]} = N\widehat{x}_t$.

引理 4.2 对任给的 $t \in [0,+\infty)$,

$$E\|\widehat{X}_t^{[N]} - N\widehat{x}_t\|_1 \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}N}. \tag{4.9}$$

更进一步，对任给 $r>1$ 和 $N \geq 16K^2$,

$$P\Big[\|\widehat{X}_t^{[N]} - N\widehat{x}_t\|_1 > 2\Big(\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}}+3\Big)rN^{1/2}\log N\Big] \leq (4K+1)N^{-r}. \tag{4.10}$$

证　由引理 4.1, 对于 $i=1,2\cdots,K$, 我们有

$$E|\widehat{X}_t^{[N]}(I_i) - N\widehat{x}_t(I_i)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}\,\big(\widehat{X}_t^{[N]}(I_i)\big)}. \tag{4.11}$$

因为 $\widehat{X}_t^{[N]}(I_i)$ 可以是独立示性随机变量和，于是

$$E|\widehat{X}_t^{[N]}(I_i) - N\widehat{x}_t(I_i)| \leq \sqrt{E\big(\widehat{X}_t^{[N]}(I_i)\big)} = \sqrt{N\widehat{x}_t(I_i)}. \tag{4.12}$$

基于同样理由

$$E|\widehat{X}_t^{[N]}(S_i) - N\widehat{x}_t(S_i)| \leq \sqrt{N\widehat{x}_t(S_i)}. \tag{4.13}$$

由 Cauchy-schwartz 不等式,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N}\Big(\sum_{i=1}^K\sqrt{\widehat{x}_t(I_i)}+\sqrt{\widehat{x}_t(S_i)}\Big)\\
=&\sqrt{N}\Big(\sum_{i=1}^K\frac{1}{i}i\sqrt{\widehat{x}_t(I_i)}+\frac{1}{i}i\sqrt{\widehat{x}_t(S_i)}\Big) \leq \sqrt{N\sum_{i=1}^K\frac{1}{i^2}}\sqrt{2\sum_{i=1}^K i^2\big(\widehat{x}_t(I_i)+\widehat{x}_t(S_i)\big)}\\
=&\sqrt{N\sum_{i=1}^K\frac{1}{i^2}}\sqrt{2\|\widehat{x}_t\|_{11}} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}N}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

所以

$$\begin{aligned}
E\|\widehat{X}_t^{[N]} - N\widehat{x}_t\|_1 =&\sum_{i=1}^K E|\widehat{X}_t^{[N]}(I_i) - N\widehat{x}_t(I_i)| + \sum_{i=1}^K E|\widehat{X}_t^{[N]}(S_i) - N\widehat{x}_t(S_i)|\\
\leq&\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}N}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

现在我们能证明引理 4.2 的第 2 部分．由 Chernoff 不等式，若 W 是独立示性随机变量和，有均值 M, 则对任意的 $\delta>0$,

$$\max\big\{P[W>M(1+\delta)], P[W<M(1-\delta)]\big\} \leq \exp\big[-M\delta^2/(2+\delta)\big]. \tag{4.16}$$

于是，由 (4.12) 和 (4.16), 对任意 $a \ge 2$ 和 $N \ge 3$, 如果 $N\widehat{x}_t(I_i) \ge 1$, $N\widehat{x}_t(S_i) \ge 1$, 我们有

$$\begin{aligned} &P\big[|\widehat{X}_t^{[N]}(I_i) - N\widehat{x}_t(I_i)| > a\sqrt{N\widehat{x}_t(I_i)}\log N\big] \le 2N^{-a/2}, \\ &P\big[|\widehat{X}_t^{[N]}(S_i) - N\widehat{x}_t(S_i)| > a\sqrt{N\widehat{x}_t(S_i)}\log N\big] \le 2N^{-a/2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

令 $A_N(t) := \{I_i : N\widehat{x}_t(I_i) \ge 1\} \cup \{S_i : N\widehat{x}_t(S_i) \ge 1\}$, 则 $|A_N(t)| \le 2K$.

令 $B_N(t) := \bigcap\limits_{l \in A_N(t)} \big\{|\widehat{X}_t^{[N]}(l) - N\widehat{x}_t(l)| \le a\sqrt{N\widehat{x}_t(l)}\log N\big\}$, 则

$$P[B_N^C(t)] \le 4KN^{-a/2}. \tag{4.18}$$

在事件 $B_N(t)$ 中,

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in A_N(t)} |\widehat{X}_t^{[N]}(l) - N\widehat{x}_t(l)| \le a\log N \sum_{l \in A_N(t)} \sqrt{N\widehat{x}_t(l)} \\ &\le a\log N\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}N}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$\sum\limits_{l \notin A_N(t)} \widehat{X}_t^{[N]}(l)$ 也是独立示性随机变量和．由于 $\sum\limits_{l \notin A_N(t)} N\widehat{x}_t(l) \le 2K$, 由 (4.16), 当 $N \ge 16K^2$ 时,

$$\begin{aligned} &P\Big[\sum_{l \notin A_N(t)} \widehat{X}_t^{[N]}(l) \ge \sum_{l \notin A_N(t)} N\widehat{x}_t(l) + aN^{1/2}\sqrt{\log N}\Big] \\ &\le \exp\{-aN^{1/2}\sqrt{\log N}/2\} \le N^{-a/2}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

所以，由 $\sum\limits_{l \notin A_N(t)} N\widehat{x}_t(l) \le 2K$, 当 $N \ge 16K^2$,

$$P\Big[\sum_{l \notin A_N(t)} |\widehat{X}_t^{[N]}(l) - N\widehat{x}_t(l)| \ge 3aN^{1/2}\sqrt{\log N}\Big] \le N^{-a/2}. \tag{4.21}$$

由 (4.19) 和 (4.21),

$$P\Big[\|\widehat{X}_t^{[N]} - N\widehat{x}_t\|_1 \ge \Big(\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}} + 3\Big)aN^{1/2}\log N\Big] \le (4K+1)N^{-a/2}. \tag{4.22}$$

取 $a = 2r$, 证毕.

下面的定理表明， $\widehat{X}^{[N]}$ 在一段闭时间区间内的涨落是可以被控制的．令 $h := 1 \wedge \frac{\langle k \rangle}{K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}$.

定理 4.1

$$P\Big[\sup_{0 \le s \le h/N} \|\widehat{X}_{t+s}^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 > 2a\log N\Big] \le N^{-a/8}, \tag{4.23}$$

对任给的 $a \ge 2$, $N \ge 3$.

证　令 $R(t)$ 表示在时间段 $[t,t+h/N)$ 改变状态的个体数．如果一个个体在时间 t 改变状态，$\|\widehat{X}_{t+0}^{[N]}-\widehat{X}_t^{[N]}\|_1\le 2$. 于是

$$P\Big[\sup_{0\le s\le h/N}\|\widehat{X}_{t+s}^{[N]}-\widehat{X}_t^{[N]}\|_1>2a\log N\Big]\le P\big(R(t)\ge a\log N\big). \tag{4.24}$$

由 $\widehat{X}^{[N]}$, 对于一个已感染的个体，在时间段 $[t,t+h/N]$ 未改变状态的概率 $e^{-h/N}$, 改变状态的概率 $1-e^{-h/N}\le\frac{h}{N}\le\frac{1}{N}$. 类似地，对于一个有 i 条半边的易感者个体，在 $[t,t+h/N]$ 改变状态的概率不会大于

$$1-\exp\Big[-\int_t^{t+h/N}\frac{i\lambda}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K}l\widehat{x}_s(I_l)\,\mathrm{d}s\Big]\le\frac{hK^2\lambda}{N\langle k\rangle}\|\widetilde{x}_0\|_1\le\frac{1}{N}. \tag{4.25}$$

因为总个体数小于 N, $R(t)$ 是均值为 $ER(t)$ 的独立示性随机变量和，小于 1. 于是由 (4.16), 当 $a\log N\ge 2$, $P\big[R(t)\ge a\log N\big]\le N^{-a/8}$. 证毕.

下面的结论揭示 $\frac{\widehat{X}_t^{[N]}}{N}$ 在任意紧区间一致收敛到 $\widehat{x}_t$.

定理 4.2　存在常数 $K_1>0$ 和 $K_2>0$, 使得对任意 $T>0$, $r>0$, 足够大的 N,

$$P\Big[\sup_{0\le t\le T}\|\widehat{X}_t^{[N]}-N\widehat{x}_t\|_1>rK_1N^{1/2}\log N\Big]<K_2TN^{-r}. \tag{4.26}$$

证　分 $[0,T]$ 为间断 $\lceil TN/h\rceil$ 使得每段不长于 h/N, 则由定理 4.1 和定理 2, 对任意 $r_1\ge 1$, $a\ge 2$ 和足够大的 N, 除了在概率不大于 $\lceil TN/h\rceil\big[(4K+1)N^{-r_1}+N^{-a/8}\big]$ 的事件上,

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|\widehat{X}_t^{[N]}-N\widehat{x}_t\|_1\le&2\Big(\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}}+3\Big)r_1N^{1/2}\log N+2a\log N\\&+\sup_{0<s,t<T;|s-t|\le h/N}N\|\widehat{x}_t-\widehat{x}_s\|_1.\end{aligned}$$

由 $\widehat{x}_t$ 的定义，容易验证 $\sup\limits_{0<s,t<T;|s-t|\le h/N}N\|\widehat{x}_t-\widehat{x}_s\|_1=O(1)$. 取 $a=8(r+1)$, $r_1=r+1$, 定理得证.

4.2　过程 $\widehat{X}^{[N]}$ 和 $X^{[N]}$ 的耦合

现在我们通过耦合 $\widehat{X}^{[N]}$ 和 $X^{[N]}$ 来证明主要结论.

考虑状态空间 $\Omega=R^{6K+1}$ 中的马氏过程 H_t.　H_t 可表示为 $(H_t^{[1]},H_t^{[2]},H_t^{[3]},H_t^{[4]})$, 这里 $H_t^{[i]}\in R^{2K}$, $i=1,2,3$ 和 $H_t^{[4]}\in R$. 我们想要赋予 H_t 合适的转移速率，以确保 $X^{[N]}=H^{[1]}+H^{[2]}$ 和 $\widehat{X}^{[N]}=H^{[1]}+H^{[3]}$. 这里 $H^{[4]}$ 用来控制 $\widehat{X}^{[N]}$ 与 $X^{[N]}$ 之间的偏差.

令 $\mu(i)$ 表示 $\big((0,0),(0,0),\cdots,\underbrace{(1,0)}_{ith},\cdots,\underbrace{(0,0)}_{Kth}\big)$. 令 $e_j(i)$ 表示 $\big(\mathbf{0}_{2K},\underbrace{e(i)}_{jth},\mathbf{0}_{2K},0\big)$, $j=1,2,3$, 类似定义 $\delta_j(i)$, $\mu_j(i)$, $j=1,2,3$. 令 μ_4 表示 $(\mathbf{0}_{2K},\mathbf{0}_{2K},\mathbf{0}_{2K},1)$.

令 $H_0=\big(X_0^{[N]},\mathbf{0}_{2K},\mathbf{0}_{2K},0\big)$, $G=H^{[1]}+H^{[2]}$, H 在时刻 t 的转移速率如下：

$$H\longrightarrow H-e_1(i)\quad\text{速率}\quad H^{[1]}(I_i),$$

$$H \longrightarrow H - e_2(i) \quad \text{速率} \quad H^{[2]}(I_i),$$

$$H \longrightarrow H - e_3(i) + \mu_4 \quad \text{速率} \quad H^{[3]}(I_i),$$

$$H \longrightarrow H + \delta_1(i) \quad \text{速率} \quad \frac{i\lambda H^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\Big(\frac{G(I_l)}{N} \wedge \widehat{x}_t(I_l)\Big),$$

$$H \longrightarrow H - \mu_1(i) + e_2(i) + \mu_4 \quad \text{速率} \quad \frac{i\lambda H^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\Big(\frac{G(I_l)}{N} - \widehat{x}_t(I_l)\Big)^+,$$

$$H \longrightarrow H - \mu_1(i) + e_3(i) \quad \text{速率} \quad \frac{i\lambda H^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\Big(\widehat{x}_t(I_l) - \frac{G(I_l)}{N}\Big)^+,$$

$$H \longrightarrow H + \delta_2(i) \quad \text{速率} \quad \frac{i\lambda H^{[2]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\frac{G(I_l)}{N},$$

$$H \longrightarrow H + \delta_3(i) \quad \text{速率} \quad \frac{i\lambda H^{[3]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\widehat{x}_t(I_l).$$

直接计算就可验证 $X^{[N]}$ 与 $H^{[1]}+H^{[2]}$ 同分布, $\widehat{X}^{[N]}$ 与 $H^{[1]}+H^{[3]}$ 同分布. 故 $X^{[N]}=H^{[1]}+H^{[2]}$, $\widehat{X}^{[N]}=H^{[1]}+H^{[3]}$.

由 H 的转移速率, 对任意 t, $\|H_t^{[2]}\|_1 \le \|H_t^{[3]}\| + H_t^{[4]}$. 我们定义 $L_t^{[N]} := \|H_t^{[3]}\| + H_t^{[4]}$, 则

$$\begin{aligned}\|X_t^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 =& \|(H_t^{[1]}+H_t^{[2]}) - (H_t^{[1]}+H_t^{[3]})\|_1\\ \le& \|H_t^{[2]}\|_1 + \|H_t^{[3]}\|_1\\ \le& 2\big[\|H_t^{[3]}\| + H_t^{[4]}\big] = 2L_t^{[N]}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

由 [19] 中定理 6.4.1, $L_t^{[N]}$ 能写为

$$\begin{aligned}&L_0^{[N]} + \sum_{i=1}^{K}\widehat{Y}_{1i}\Big(\int_0^t \frac{i\lambda H_s^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\Big(\frac{X_s^{[N]}(I_l)}{N} - \widehat{x}_s(I_l)\Big)^+ \mathrm{d}s\Big)\\ &+\sum_{i=1}^{K}\widehat{Y}_{2i}\Big(\int_0^t \frac{i\lambda H_s^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\sum_{l=1}^{K} l\Big(\widehat{x}_s(I_l) - \frac{X_s^{[N]}(I_l)}{N}\Big)^+ \mathrm{d}s\Big),\end{aligned} \tag{4.28}$$

这里 $(\widehat{Y}_{11}, \widehat{Y}_{12}, \cdots, \widehat{Y}_{1K}, \widehat{Y}_{21}, \cdots, \widehat{Y}_{2K})$ 为独立标准泊松过程的集合, $L_0^{[N]}=0$.

定义

$$\eta_t^{[N]} := \Big(\sum_{i=1}^{K}\frac{i\lambda H_t^{[1]}(S_i)}{\langle k\rangle}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{K} l\Big|\frac{X_t^{[N]}(I_l)}{N} - \widehat{x}_t(I_l)\Big|\Big), \qquad J_t^{[N]} := \int_0^t \eta_s^{[N]}\,\mathrm{d}s.$$

由 (4.28), 易验证 $M_t^{[N]} = L_t^{[N]} - J_t^{[N]}$ 是鞅, 且 $E\big(M_t^{[N]}\big)^2 = EJ_t^{[N]}$.

定理 4.3 对任意 N, $t>0$.

$$N^{-1}E\|X_t^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 \le \frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}t\sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}}N^{-1/2}\exp\Big[\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}t\Big]. \tag{4.29}$$

证 易验证

$$\eta_t^{[N]} \le \frac{\lambda K^2}{\langle k\rangle} N\|\widetilde{x}_0\|_1\|N^{-1}X_t^{[N]} - \widehat{x}_t\|_1. \tag{4.30}$$

由 (4.27) 和 (4.30),

$$\begin{aligned} &N^{-1}\|X_t^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 \le N^{-1}2L_t^{[N]} \\ \le &N^{-1}2M_t^{[N]} + \frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t \|N^{-1}X_s^{[N]} - \widehat{x}_s\|_1\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.31}$$

因为 $M^{[N]}$ 是鞅,

$$\begin{aligned} &N^{-1}E\|X_t^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 \\ \le &\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t N^{-1}E\|X_s^{[N]} - \widehat{X}_s^{[N]}\|_1 + E\|N^{-1}\widehat{X}_s^{[N]} - \widehat{x}_s\|_1\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.32}$$

由引理 4.2 的第 1 部分，对任意 t,

$$\begin{aligned} &N^{-1}E\|X_t^{[N]} - \widehat{X}_t^{[N]}\|_1 \\ \le &\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\Big[\int_0^t N^{-1}E\|X_s^{[N]} - \widehat{X}_s^{[N]}\|_1\,\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{\pi^2}{3}\|\widetilde{x}_0\|_{11}}N^{-1/2}t\Big]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

应用 Gronwall 不等式，证毕.

定理 4.4 存在常数 $K_3>0$, $K_4>0$ 使得对任意 $m>0$, $t>0$, 以及 $N>0$,

$$P\Big(\sup_{0\le s\le t}|M_s^{[N]}| \ge Nm\Big) \le K_3 t e^{K_4 t} m^{-2} N^{-3/2}. \tag{4.34}$$

证

$$\begin{aligned} &E\big(M_t^{[N]}\big)^2 = EJ_t^{[N]} \le \frac{\lambda K^2\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t E\|X_s^{[N]} - N\widehat{x}_s\|_1\,\mathrm{d}s \\ \le &\frac{\lambda K^2\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t E\|X_s^{[N]} - \widehat{X}_s^{[N]}\|_1 + E\|\widehat{X}_s^{[N]} - N\widehat{x}_s\|_1\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.35}$$

利用定理 4.3 和引理 4.2 控制 (4.35) 中的两个期望，容易验证存在常数 $K_3>0$, $K_4>0$ 使得对任意 $t>0$, $N>0$, $E\big(M_t^{[N]}\big)^2 \le K_3 t e^{K_4 t} N^{1/2}$. 因为 $M_t^{[N]}$ 是鞅,

$$P\Big(\sup_{0\le s\le t}|M_s^{[N]}| \ge Nm\Big) \le \big(Nm\big)^{-2}E\big(M_t^{[N]}\big)^2.$$

证毕.

最后，我们给出定理 3.1 和 3.2 的证明．定理 3.2 是引理 4.2 和定理 4.3 的直接推论．我们只需证明定理 3.1.

证 由 (4.28), $L_t^{[N]}$ 随 t 递增. 这样，由 (4.31),

$$\begin{aligned}&N^{-1}\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{[N]}-\widehat{X}_s^{[N]}\|_1\le N^{-1}2L_t^{[N]}\\ \le&N^{-1}2M_t^{[N]}+\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t N^{-1}\|X_s^{[N]}-\widehat{X}_s^{[N]}\|_1\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t\|N^{-1}\widehat{X}_s^{[N]}-\widehat{x}_s\|_1\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}&D_N:=\Big\{\sup_{0\le t\le T}|M_t^{[N]}|\ge N^{1/2}\Big\},\\ &E_N:=\Big\{\sup_{0\le t\le T}\|N^{-1}\widehat{X}_t^{[N]}-\widehat{x}_t\|_1\ge 2K_1N^{-1/2}\log N\Big\}.\end{aligned}$$

由定理 4.2 和定理 4.4,

$$P\Big(D_N\cup E_N\Big)\le K_2TN^{-2}+K_3Te^{K_4T}N^{-1/2}=O(N^{-1/2}). \tag{4.36}$$

在事件 $(D_N\cup E_N)^c$ 中，对任意 $t\le T$,

$$\begin{aligned}&N^{-1}\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{[N]}-\widehat{X}_s^{[N]}\|_1\\ \le&2N^{-1/2}+\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\int_0^t N^{-1}\sup_{0\le u\le s}\|X_u^{[N]}-\widehat{X}_u^{[N]}\|_1\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}2TK_1N^{-1/2}\log N.\end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式，在事件 $\big(D_N\cup E_N\big)^c$ 中,

$$\begin{aligned}&N^{-1}\sup_{0\le t\le T}\|X_t^{[N]}-\widehat{X}_t^{[N]}\|_1\\ \le&\Big(2N^{-1/2}+\frac{4K^2K_1T\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}N^{-1/2}\log N\Big)\exp\Big[\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}T\Big].\end{aligned}$$

这样，在事件 $\big(D_N\cup E_N\big)^c$ 中,

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T}\|N^{-1}X_t^{[N]}-\widehat{x}_t\|_1\\ \le&\Big(2N^{-1/2}+\frac{4K^2K_1T\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}N^{-1/2}\log N\Big)\exp\Big[\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}T\Big]\\ &+2K_1N^{-1/2}\log N\\ \le&K(T)N^{-1/2}\log N,\end{aligned}$$

这里

$$K(T)=\Big(2+\frac{4K^2K_1T\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}\Big)\exp\Big[\frac{2K^2\lambda\|\widetilde{x}_0\|_1}{\langle k\rangle}T\Big]+2K_1.$$

于是，

$$P\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big\|\frac{X_t^{[N]}}{N}-\widehat{x}_t\Big\|_1>K(T)N^{-1/2}\log N\Big]\le P(D_N\cup E_N)=O(N^{-1/2}).$$

定理 3.1 得证.

参 考 文 献

[1] Liljeros F, Edling C R, Amaral L A N, Stanley H E, Abers Y. The Web of Human Sexual Contacts. *Nature*, 2001, 411: 907

[2] Schneeberger A, et al. Scale-free Networks and Sexually Transmitted Diseases: a Description of Observed Patterns of Sexual Contacts in Britain and Zimbabwe. *Sex. Transm. Dis.*, 2004, 31: 380

[3] Barabási A L, Albert R, Jeong H. Scale-free Characteristics of Random Networks: the Topology of the World Wide Web. *Physica A*, 2000, 281: 69–77

[4] Pastor-Satorras R, Vázquez A, Vespignani A. Dynamical and Correlation Properties of the Internet. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 87: 258701-1–258701-4

[5] Colizza V, Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A. The Role of the Airline Transportation Network in the Prediction and Predictability of Global Epidemics. *PNAS*, 2000, 103: 2015–2020

[6] Anderson R M, May R M. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991

[7] Lajmanovich A, Yorke J A. A Deterministic Model for Gonorrhea in a Nonhomogeneous Population. *Mathematical Biosciences*, 1976, 28: 221–236

[8] Hethcote H W, Yorke J A. Gonorrhea Transmission Dynamics and Control. Lecture Notes in Biomathematics 56. Berlin: Springer-Verlag, 1984

[9] Hethcote H W. The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review*, 2000, 42: 599–653

[10] Boccalett S, et al. Complex Networks: Structure and Dynamics. *Phys. Rep.*, 2006, 424: 175–308

[11] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F. Critical Phenomena in Complex Networks. *Rev. Mod. Phys.*, 2008, 80: 1275

[12] Durrett R, Levin S. The Importance of Being Discrete. *Theoretical Population Biology*, 1994, 46: 363–394

[13] Nåsell I. Extinction and Quasi-stationarity in the Verhulst Logistic Model. *J. Theor. Biol.*, 2001, 211: 11–27

[14] Liggett T M. Interacting Particle Systems. New York: Springer-Verlag, 1985

[15] Liggett T M. Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1999

[16] Grimmett. Percolation. Berlin: Springer-Verlag, 1999

[17] Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007

[18] Chatterjee S, Durrett R. Contact Processes on Random Graphs with Power Law Degree Distributions have Critical Value 0. *Ann. Probab.*, 2009, 37(6): 2332–2356

[19] Ethier S N, Kurtz T G. Markov Processes Characterization and Convergence. New York: John Wiley & Sons, 1986

[20] Barbour A D, Luczak M J. Laws of Large Numbers for Epidemic Models with Countably Many Types. *Ann. Probab.*, 2008, 18(6): 2208–2238

Limit Theorems for Stochastic SIR Epidemics in Networks

WANG Jiazeng

(*Department of Mathematics, Beijing Technology and Business University, Beijing* 100048)

(*E-mail: wangjiazen@yahoo.com.cn*)

XUE Xiaofeng

(*School of Mathematical Science, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract Treating the instantaneous connecting of edges and the changing of individual states as fundamental Poisson flow, we construct the stochastic model from microscopic level for the SIR epidemic on networks. In thermodynamic limit, for any finite time t, we get the approximate deterministic dynamical system—the so called "hydrodynamic limit". Thus, we build a reasonable microscopic foundation for the phenomenologically built dynamical models in this field.

Key words density dependent population process; rate of convergence; uniformly converge; converge in L_1

MR(2000) Subject Classification 92D30; 60F99

Chinese Library Classification O211.6