第 35 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 35 No. 3
2012 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2012

三阶 p-Laplace 耦合奇异边值问题的正解 *

蔡增霞　　张咸昭

(临沂大学理学院，临沂 276005)

(E-mail: caizengxia@163.com)

刘立山

(曲阜师范大学数学科学学院，曲阜 273165)

摘　要　本文通过构造 Banach 空间上的算子和运用不动点指数定理研究了一类含 p-Laplace 算子的三阶耦合奇异边值问题，并给出这类问题正解存在性的条件.

关键词　耦合奇异边值问题；正解；不动点理论

MR(2000) 主题分类　34B15; 34B25

中图分类　O175.8

1　引言

本文研究下列含 p-Laplace 算子的三阶耦合奇异边值问题 (BVP):

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''(t)))' + w_1(t)f_1(t,v(t)) = 0, & 0<t<1, \\ (\varphi_p(v''(t)))' + w_2(t)f_2(t,u(t)) = 0, & 0<t<1, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0 = \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1), & u''(0) = 0, \\ \alpha_2 v(0) - \beta_2 v'(0) = 0 = \gamma_2 v(1) + \delta_2 v'(1), & v''(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p \geq 2$, $\alpha_i, \gamma_i > 0$, $\beta_i, \delta_i \geq 0$, $\rho_i = \alpha_i\gamma_i + \alpha_i\delta_i + \beta_i\gamma_i > 0$, 另外 $f_i \in C((0,1)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, $w_i(t) \in C((0,1),[0,+\infty))$, $f_i, w_i(t)$ 允许在 $t = 0, 1$ 处有奇性, $i = 1, 2$.

近年来对含 p-Laplace 算子边值问题正解的研究日趋增多，而关于含 p-Laplace 算子的三阶奇异边值问题正解的研究相对还比较少，尤其是耦合奇异边值问题正解的结果尚不多见. 在与 BVP(1.1) 相同的边值条件下，Agarwal P R, O'Regan 和 Wong P J 在 [1] 中研究了

本文 2009 年 2 月 26 日收到.

* 国家自然科学基金 (10471075) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (20060446001) 资助项目.

耦合边值问题 $u''+f(t,v)=0, v''+g(t,u)=0$, 得出至少存在一个正解的结论, 要求函数 f,g 分别被连续不减的函数 $\psi,\varphi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 所限制, 即 $|f(t,w)|\le\alpha(t)\psi(t)$, $|g(t,w)|\le\beta(t)\phi(t)$, 其中 $\alpha,\beta\in L^1[0,1]$. 李翠哲, 葛渭高在 [2] 中讨论了一维 p-Laplace 奇异 Sturm-Liouville 边值问题:

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+g(t)f(u)=0, & 0<t<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, & \gamma u(1)+\delta u'(1)=0,\end{cases}$$

其中 $\alpha,\gamma>0$, $\beta,\delta\ge0$, $f\in C([0,\infty])$, $g(t)$ 允许在端点 $t=0$ 和 $t=1$ 处有奇性的正解的存在性. 而倪小虹, 葛渭高在 [3] 中研究了含 p-Laplace 的耦合边值问题:

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+f_1(t,v)=0,\\ (\varphi_p(v'))'+f_2(t,u)=0,\\ \alpha_1u(0)-\beta_1u'(0)=0=\gamma_1u(1)+\delta_1u'(1),\\ \alpha_2v(0)-\beta_2v'(0)=0=\gamma_2v(1)+\delta_2v'(1),\end{cases}$$

其中函数 f_1,f_2 均要求在闭区间 $[0,1]$ 上是连续的, 且对 f_1,f_2 的上控制函数亦要求单调连续等较强的条件. 本文在以上文章的基础上, 考虑含 p-Laplace 算子的三阶耦合奇异边值问题 BVP(1.1), 允许函数具有奇异点, 运用 Green 函数的反函数定义算子的方法结合不动点指数理论研究问题 BVP(1.1) 的正解的存在性.

为了证明本文主要结果, 先给出下面的引理:

引理 1.1 (范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理)[4] 设 X 是 Banach 空间, $K\subseteq X$ 是 X 上的一个锥, $\Omega_1,\Omega_2\subset X$ 是有界开集, 且 $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, 若 $T:K\mapsto X$ 是全连续的算子, 满足下面两个条件之一:

1) $\|Tu\|\le\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\ge\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$;

2) $\|Tu\|\ge\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\le\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$,

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 上存在一个不动点.

2 预备知识和引理

记 $E=C[0,1], \|w\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|w(t)|$, $E^+=\{u\in E; u(t)\text{是非负的凹函数}\}$, 则在 $E\times E$ 上嵌入范数 $\|(u,v)\|_0=\max\{\|u\|,\|v\|\}$, $\forall\,(u,v)\in E\times E$ 构成 Banach 空间, $X:=E^+\times E^+$ 是 $(E\times E,\|\cdot\|_0)$ 中的锥. 在这里 $(u_1,v_1)\ge(u_2,v_2)$ 是指 $u_1\ge u_2$, $v_1\ge v_2$.

本文总假定以下条件成立

(H_1) $f_1(t,v(t))\le g_1(t)h_1(v(t))$, $f_2(t,u(t))\le g_2(t)h_2(u(t))$, $g_i(t):(0,1)\to[0,+\infty)$连续, $h_i(*):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续, $i=1$, $*=v$; $i=2$, $*=u$, g_i可在$t=0,1$ 奇异, $i=1,2$.

(H_2) $w_i\in C((0,1),[0,+\infty))$, w_i 在 $t=0,1$ 奇异, 且 $0\le\int_0^1w_i(s)g_i(s)\,\mathrm{d}s<\infty$, $i=1,2$.

令 G_i 表示边值问题

$$\begin{cases} *''=0, \qquad 0<t<1, \\ \alpha_i *(0)-\beta_i *'(0)=0, \qquad \gamma_i *(1)+\delta_i *'(1)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数，其中 $*$ 当 $i=1$ 时取 v, 当 $i=2$ 时取 u, 则

$$G_i(t,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_i}(\gamma_i+\delta_i-\gamma_i t)(\beta_i+\alpha_i s), \qquad 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{1}{\rho_i}(\gamma_i+\delta_i-\gamma_i s)(\beta_i+\alpha_i t), \qquad 0\le t\le s\le 1, \end{cases}$$

其中 $\rho_i=\gamma_i\delta_i+\gamma_i\alpha_i+\alpha_i\delta_i$. 易知 $G_i(t,s)\le G_i(s,s),\ 0\le t,s\le 1$.

定义算子 A 为 $A(u(t),v(t))=(A_1(u,v)(t),A_2(u,v)(t))$, 其中

$$A_i(u(t),v(t))=\int_0^1 G_i(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau, \qquad (u,v)\in X,$$

$*$ 当 $i=1$ 时取 v, 当 $i=2$ 时取 u.

若 $A(u,v)=(u,v)$ 存在不动点，则由

$$\begin{aligned} *' =&(A_i(u,v))'(t)=\int_0^1 {G_i}'(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ =&-\frac{\gamma_i}{\rho_i}\int_0^t(\beta_i+\alpha_i\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{\gamma_i}{\rho_i}\int_t^1(\gamma_i+\delta_i-\gamma_i\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau, \\ *'' =&(A_i(u,v))''(t)=-\phi_q\Big(\int_0^t w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s\Big), \end{aligned}$$

所以 $\phi_p(*'')=-\int_0^t w_i(s)f_i(s,*(s))\,\mathrm{d}s$, 故 $(\phi_p(*''))'=-w_i(s)f_i(s,(*)(s))$. 其中当 $i=1$ 时，$*$ 取 v, 当 $i=2$ 时，$*$ 取 u. 另外易证 $\alpha_i,\gamma_i,\beta_i,\delta_i$ 满足边值条件.

因此，若 $(u,v)\in X, A(u,v)=(u,v)$, 则 (u,v) 是边值问题 (1.1) 的解.

对任意的 $\theta\in\big(0,\frac{1}{2}\big)$, 令

$$K=\Big\{(u,v)\in X|(u,v)\ge(0,0),\ \Big(\min_{\theta\le t\le 1-\theta}|u(t)|,\ \min_{\theta\le t\le 1-\theta}|v(t)|\Big)\ge(M_1\|u\|,M_2\|v\|)\Big\},$$

其中

$$0<M_i=\min\Big\{\frac{\delta_i+\theta_i\gamma_i}{\gamma_i+\delta_i},\frac{\theta_i\alpha_i+\beta_i}{\alpha_i+\beta_i}\Big\}, \qquad i=1,2.$$

引理 2.1　$AK\subset K$.

证　$\forall(u,v)\in K,\ t\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned} A_1(u,v)(t)=&\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,d\tau \\ \le&\int_0^1 G_1(\tau,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

故

$$\|A_1\| \leq \int_0^1 G_1(\tau,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau.$$

易知对 $t\in[\theta,1-\theta]$ 有 $\frac{G_i(t,\tau)}{G_i(\tau,\tau)}\geq M_i,\ \tau\in[0,1]$, 故 $(u,v)\in K$, 则

$$\begin{aligned}\min_{\theta\leq t\leq 1-\theta} A_1(u,v)(t) =& \min_{\theta\leq t\leq 1-\theta}\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ \geq& M_1\int_0^1 G_1(\tau,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ \geq& M_1\|A_1\|,\end{aligned}$$

同理 $\min\limits_{\theta\leq t\leq 1-\theta} A_2(u,v)(t)\geq M_2\|A_2\|$, 故 $AK\subset K$.

引理 2.2 $A:K\to K$ 为全连续算子.

证 (1) 证 $A:K\to K$ 一致有界.

设任意的 $D\subset K$ 为有界集, $\exists M>0,\ \forall (u,v)\in K,\ \|(u,v)\|\leq M$, 则

$$\begin{aligned}|A_1(u(t),v(t))|\leq& \int_0^1 G_1(\tau,\tau)\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ \leq& \max\big\{\phi_q(h_1(v(t)):0\leq t\leq 1\big\}\int_0^1 G_1(\tau,\tau)\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ =& \max\{\phi_q(h_1(v(t)):0\leq t\leq 1\}\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\int_0^1 G_1(\tau,\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ =& N_1<\infty,\end{aligned}$$

同理 $|A_2(u(t),v(t))|\leq N_2<\infty$, 其中

$$N_2=\max\{\phi_q(h_2(u(t)):0\leq t\leq 1\}\phi_q\Big(\int_0^1 w_2(s)g_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)\int_0^1 G_2(\tau,\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

取 $N^*=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\|A(u,v)\|\leq N^*,\ \forall (u,v)\in K$, 从而 A 在 K 上一致有界.

(2) 证 A 等度连续.

因为 $G_i(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，从而一致连续，因此，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ 使当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，对任意的 $\xi\in[0,1]$, 有

$$\big|G_i(t_1,\xi)-G_i(t_2,\xi)\big|<\frac{\varepsilon}{2}\Big(\big[\max\big\{\phi_q(h_i(*(t)):\ 0\leq t\leq 1\big\}\big]\phi_q\Big(\int_0^1 w_i(s)g_i(s)\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t\Big)\Big)^{-1},$$

其中当 $i=1$ 时，$*$ 取 v, 当 $i=2$ 时，$*$ 取 u. 故对任意的 $D\in K$, 有

$$\begin{aligned}&\big|A(u,v)(t_1)-A(u,v)(t_2)\big|\\ =&\big|(A_1(u,v)(t_1),A_2(u,v)(t_1))-(A_1(u,v)(t_2),A_2(u,v)(t_2))\big|\\ =&\big|(A_1(u,v)(t_1)-A_1(u,v)(t_2)),(A_2(u,v)(t_1)-A_2(u,v)(t_2))\big|\\ \leq&\big|(A_1(u,v)(t_1)-A_1(u,v)(t_2))\big|+\big|(A_2(u,v)(t_1)-A_2(u,v)(t_2))\big|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big|\int_0^1(G_1(t_1,\tau)-G_1(t_2,\tau))\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big|\\
&\quad+\Big|\int_0^1(G_2(t_1,\tau)-G_2(t_2,\tau))\phi_q\Big(\int_0^\tau w_2(s)g_2(s)h_2(u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big|\\
&\le\Big|\int_0^1(G_1(t_1,\tau)-G_1(t_2,\tau))\max\big\{\phi_q(h_1(v(t)):\,0\le t\le 1\big\}\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t\Big|\\
&\quad+\Big|\int_0^1(G_2(t_1,\tau)-G_2(t_2,\tau))\max\big\{\phi_q(h_2(u(t)):0\le t\le 1\big\}\phi_q\Big(\int_0^1 w_2(s)g_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t\Big|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

故知 AD 等度连续，由 $A-A$ 定理知 AD 相对紧的.

(3) 最后证明 $A:K\to K$ 连续.

设 $\{(u_n(t),v_n(t))\}\subset K\times K$, 且 $(u_n(t),v_n(t))\to(u_0(t),v_0(t))$, $n\to\infty$, 由收敛性知 $\exists\, M_0$ 使得 $\|(u_0,v_0)\|\le M_0$, $\|(u_n,v_n)\|\le M_0$, 下证 $A(u_n,v_n)\to A(u_0,v_0)$ $(n\to\infty)$, $t\in[0,1]$. 因为

$$
\begin{aligned}
&\big|A(u_n,v_n)(t)-A(u_0,v_0)(t)\big|\\
&\le\int_0^1 G_1(\tau,\tau)|\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)f_1(s,(v_n(s))\,\mathrm{d}s\Big)-\phi_q\Big(\int_0^1 w_1(s)f_1(s,v_0(s)\Big)\,\mathrm{d}s\Big|\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^1 G_2(\tau,\tau)\Big|\phi_q\Big(\int_0^1 w_2(s)f_2(s,(u_n(s))\,\mathrm{d}s\Big)-\phi_q\Big(\int_0^1 w_2(s)f_2(s,u_0(s)\Big)\,\mathrm{d}s\Big|\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

由上式， H_2 及 f_1,f_2 的连续性及 L- 控制收敛定理易知 $A:K\to K$ 是连续的. 证明是标准的，这里从略.

综上所述， $A:K\to K$ 是全连续算子.

3 主要结果

下面给出本文的主要结果，为方便记，首先列出本文使用的条件：

(H$_3$) $0\le h^+_{(1)0}<\eta_1^{p-1}$, $0\le h^+_{(2)0}<\eta_2^{p-1}$;

(H$_4$) $(M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}<f^-_{(1)\infty}\le\infty$, $(M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}<f^-_{(2)\infty}\le\infty$;

(H$_5$) $0\le h^+_{(1)\infty}<\eta_1^{p-1}$, $0\le h^+_{(2)\infty}<\eta_2^{p-1}$;

(H$_6$) $(M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}<f^-_{(1)0}\le\infty$, $(M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}<f^-_{(2)0}\le\infty$,

其中

$$
\begin{aligned}
&h^+_{(i)0}:=\overline{\lim_{*\to0}}\frac{h_i(*)}{*^{p-1}},\qquad h^+_{(i)\infty}:=\overline{\lim_{*\to\infty}}\frac{h_i(*)}{*^{p-1}},\qquad i=1,2,\\
&f^-_{(i)0}:=\underline{\lim_{*\to0}}\frac{f_i(s,*)}{*^{p-1}},\qquad f^-_{(i)\infty}:=\underline{\lim_{*\to\infty}}\frac{f_i(s,*)}{*^{p-1}},\qquad i=1,2,
\end{aligned}
$$

上式中当 $i=1$ 时, $*$ 取为 v, 当 $i=2$ 时, $*$ 取为 u. 并且 η_i,ξ_i 满足

$$0\le\eta_i\le\Big(\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G_i(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)g_i(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big)^{-1},$$
$$\xi_i\ge\Big(\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\int_\theta^{1-\theta} G_i(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_i(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big)^{-1}.$$

定理 3.1 如果条件 H_1–H_4 成立, 则边值问题 BVP(1.1) 至少存在一个正解 $(u(t),v(t))$, $t\in(0,1)$.

证 由前述已知 $A:K\mapsto K$ 是全连续的.

由 H_3 中条件 $0\le h^+_{(i)0}<\eta_i^{p-1}$, $i=1,2$ 知, $\exists r>0$, 当 $0\le v(t)\le r$, $0\le u(t)\le r$, $t\in[0,1]$ 时, 有 $h_1(v)\le\eta_1^{p-1}v^{p-1}$, $h_2(u)\le\eta_2^{p-1}u^{p-1}$. 令 $\Omega_1=\{(u,v)\in K;\ \|(u,v)\|_0<r\}$, 则当 $(u,v)\in\partial\Omega_1$ 时, 有 $0\le u(t)\le r$, $0\le v(t)\le r$, $t\in[0,1]$, 则有

$$\begin{aligned}A_1(u(t),v(t))&=\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\&\le\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\&\le\eta_1\|v\|\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\le\|v\|,\end{aligned}$$

所以, $\|A_1\|\le\|v\|$. 同理可证 $\|A_2\|\le\|v\|$, 故 $\|A\|_0=\max\big\{\|A_1\|,\|A_2\|\big\}\le\|(u,v)\|_0$, $\forall\,(u,v)\in\partial\Omega_1$.

另一方面, 由 H_4 中条件 $\xi_i^{p-1}<f^-_{(i)\infty}\le\infty$, $i=1,2$ 知, $\exists\overline{R}>r>0$, 当 $v(t)\ge\overline{R}$, $u(t)\ge\overline{R}$, $t\in[0,1]$ 时, 有 $f_1(s,v)\ge(M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}v^{p-1}$, $f_2(s,u)\ge(M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}u^{p-1}$. 取 $R>\max\{\overline{R},M_1^{-1}\overline{R},M_2^{-1}\overline{R}\}$, 令 $\Omega_2=\big\{(u,v)\in K;\ \|(u,v)\|_0<R\big\}$, 则当 $(u,v)\in\partial\Omega_2$ 时, 不失一般性, 不妨设 $\|v\|=\|(u,v)\|_0$, 则有

$$\begin{aligned}A_1(u(t),v(t))&=\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\&\ge M_1^{-1}\xi_1\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\int_\theta^{1-\theta} G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)v^{p-1}\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\&\ge\xi_1\|v\|\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\int_\theta^{1-\theta} G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\&\ge\|v\|=\|(u,v)\|_0,\end{aligned}$$

所以, $\|A_1\|\ge\|(u,v)\|_0$. 故 $\|A\|_0=\max\{\|A_1\|,\|A_2\|\}\ge\|(u,v)\|_0$, $\forall\,(u,v)\in\partial\Omega_2$. 从而由引理 1.1 得 A 在 $\overline{\Omega}_1\setminus\Omega_2$ 上有一不动点 (u,v), 即 BVP(1.1) 有一正解 $(u(t),v(t))$, $t\in(0,1)$. 证毕.

定理 3.2 如果条件 H_1, H_2, H_5, H_6 成立, 则 BVP(1) 有解 $(u(t),v(t))$, $t\in(0,1)$, 且 $u(t)>0$, $v(t)>0$.

证 由条件 H_5 中 $0\le h^+_{(i)\infty}<\eta_i^{p-1}$, $i=1,2$, 存在 $R_0>0$, $\varepsilon_i>0$, 当 $u(t)\ge R_0$, $v(t)\ge$

R_0, $t\in[0,1]$ 时，使得 $h_1(v)<(\eta_1-\varepsilon_1)^{p-1}v^{p-1}$, $h_2(u)<(\eta_2-\varepsilon_2)^{p-1}u^{p-1}$. 记

$$a=\max\big\{\max\{h_1(v):0\le\|v\|\le R_0\},\ \max\{h_2(u):0\le\|u\|\le R_0\}\big\},$$

取 $R>\max\{a\varepsilon_1^{-1},a\varepsilon_2^{-1}\}$, 记 $\Omega_1=\{(u,v)\in K;\ \|(u,v)\|_0<R\}$, 则当 $(u,v)\in\partial\Omega_1$ 时，不妨设 $\|v\|=\|(u,v)\|_0=R$, 可得

$$\begin{aligned}
A_1(u(t),v(t))=&\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)f_1(s,v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\
\le&\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\\
=&\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big[\int_{\|v\|\ge R_0} w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\\
&+\int_{0\le\|v\|\le R_0} w_1(s)g_1(s)h_1(v(s))\,\mathrm{d}s\Big]\,\mathrm{d}\tau\\
\le&(\eta_1-\varepsilon_1)\|v\|\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big[\int_{\|v\|\ge R_0} w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big]\\
&+a\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big[\int_{0\le\|v\|\le R_0} w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big]\\
\le&\big[(\eta_1-\varepsilon_1)\|v\|+a\big]\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G_1(t,\tau)\phi_q\Big(\int_0^\tau w_1(s)g_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau\le\|v\|,
\end{aligned}$$

所以 $\|A_1\|\le\|v\|$. 同理可证 $\|A_2\|\le\|u\|$, 故 $\|A\|_0=\max\{\|A_1\|,\|A_2\|\}\le\|(u,v)\|_0$, $\forall\,(u,v)\in\partial\Omega_1$.

另一方面，由 H_6 中 $(M_i^{-1}\xi_i)^{p-1}<f^-_{(i)0}\le\infty$, $i=1,2$ 知，存在 $0<r<R$, 使得当 $0\le u(t)\le r$, $0\le v(t)\le r$, $t\in[0,1]$ 时，有 $f_1(s,v)>(M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}v^{p-1}$, $f_2(s,u)>(M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}u^{p-1}$, 令 $\Omega_2=\{(u,v)\in K;\|(u,v)\|_0<r\}$, 类似于定理 3.1 的证明过程可得

$$\|T\|_0=\max\{\|T_1\|,\|T_2\|\}\ge\|(u,v)\|_0,\qquad\forall\,(u,v)\in\partial\Omega_2.$$

从而由引理 1.1 得 T 在 $\overline{\Omega}_1\setminus\Omega_2$ 上有一不动点 (u,v), 即 BVP(1.1) 有一正解 $(u(t),v(t))$, $t\in(0,1)$. 证毕.

定理 3.3 如果条件 H_1–H_4, H_6 成立，则 BVP(1) 至少存在两个正解 $(u_1(t),v_1(t))$ 及 $(u_2(t),v_2(t))$, 且满足 $0<\|(u_1,v_1)\|_0<r<\|(u_2,v_2)\|_0$.

证　由 H_4 中条件 $(M_i^{-1}\xi_i)^{p-1}<f^-_{(i)\infty}\le\infty$, $i=1,2$ 知，存在充分大的 $R_1>r>0$, 当 $v(t)\ge R_1$, $u(t)\ge R_1$, $t\in[0,1]$ 时，有

$$f_1(v)\ge(M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}v^{p-1},\qquad f_2(u)\ge(M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}u^{p-1}.$$

从而令 $\Omega_{R_1}=\{(u,v)\in K:\|(u,v)\|_0<R_1\}$, 类似于定理 3.1 的证明可得

$$\|A\|_0\ge\|(u,v)\|_0,\qquad\forall\,(u,v)\in\partial\Omega_{R_1}.$$

由 H_6 中条件 $(M_i^{-1}\xi_i)^{p-1} < f_{(i)0}^{-} \le \infty$ 知存在充分小的 $0 < R_2 < r$, 当 $v(t) \le R_2$, $u(t) \le R_2$, $t \in [0,1]$ 时，满足

$$f_1(v) \ge (M_1^{-1}\xi_1)^{p-1}v^{p-1}, \qquad f_2(u) \ge (M_2^{-1}\xi_2)^{p-1}u^{p-1}.$$

从而令 $\Omega_{R_2} = \{(u,v) \in K : \|(u,v)\|_0 < R_2\}$, 类似于定理 3.1 的证明可得

$$\|A\|_0 \ge \|(u,v)\|_0, \qquad \forall\,(u,v) \in \partial\Omega_{R_2}.$$

因此由引理 1.1 知存在两个正解

$$(u_1,v_1) \in \overline{\Omega}_{R_1} \setminus \Omega_1, \qquad (u_2,v_2) \in \overline{\Omega}_1 \setminus \Omega_{R_2},$$

其中 Ω_1 同定理 3.1, 且 $0 < \|(u_1,v_1)\|_0 < r < \|(u_2,v_2)\|_0$. 证毕.

定理 3.4 如果条件 H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 成立, 则 BVP(1) 至少存在两个正解 $(u_1(t), v_1(t))$ 及 $(u_2(t), v_2(t))$, 且满足 $0 < \|(u_1,v_1)\|_0 < R < \|(u_2,v_2)\|_0$. 证明类似，从略.

注 3.1 [3] 中上控制函数要求单调连续等较强的条件，本文中函数允许取奇异点，且上控制函数不必要求单调，亦允许具有奇异点，仍可得到问题正解的存在性. 同时，本文还得到了问题多个正解存在的充分条件，是对 [3] 在条件和结论上的推广.

注 3.2 当 $p = 2$ 或 $\varphi_p = u$ 是线性情形时，或 $w_1(t) = w_2(t) =$ 常数时，本文推广了 [1] 的相关条件和结论.

注 3.3 针对非线性项 φ_p, 本文仍可以借助于格林函数建立等价积分方程，运用范数形式的锥拉伸压缩不动点定理，证明含 p-Laplace 算子的三阶耦合奇异边值问题正解的存在性，本文的结果是新的.

4 有关例子

例 我们考虑 BVP:

$$\begin{cases} (\varphi(u''))' + t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\dfrac{v^{\alpha}}{6t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}} = 0, \\ (\varphi(v''))' + t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\dfrac{u^{\alpha}}{6t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}} = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u''(0) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \quad v''(0) = 0, \end{cases}$$

其中 $p \ge 2$, $0 < \alpha < p-1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. 且

$$w_1(t) = w_2(t) = t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}, \qquad f_1(t,v) = \frac{v^{\alpha}}{6t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}}, \qquad f_2(t,u) = \frac{u^{\alpha}}{6t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

$$g_1(t) = g_2(t) = \frac{1}{3t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}}, \qquad h_1(v) = v^{\alpha}, \qquad h_2(u) = u^{\alpha},$$

由于 $w_i(t)g_i(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, $i = 1,2$, 而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \pi$, 容易验证满足定理 3.2 的条件, 故定理 3.2 的结论成立.

参 考 文 献

[1] Agarwal P R, O'Regan D, Wong P J. Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations. Singapore: Springer-Verlag, 2000

[2] 李翠哲, 葛渭高. 一维 p-Laplacian 奇异 Sturm-Liouville 边值问题的正解. 应用数学, 2002, 15(3): 13–17 (Li C Z, Ge W G. Positive Solution for p-Laplacian Singular Sturm-Liouville Boundary Value Problems. *Math. Appli.*, 2002, 15(3): 13–17)

[3] 倪小虹，葛渭高．一维 p- Laplace 耦合边值问题正解的存在性． 数学研究与评论, 2005, 25(3): 489-494 (Ni X H, Ge W G. Existence of Positive Solutions for One-dimentional p-Laplacian Coupled Boundary Value Problem. *J. Math. Research and Exposition*, 2005, 25(3): 489–494)

[4] 郭大钧．非线性泛函分析．济南：山东科技出版社， 2000 (Guo D J. Nonlinear Functional Analysis. Jinan: Shandong Scientific Technical Publishers, 2000)

[5] 柴国庆．奇异边值问题的正解存在性． 数学物理学报, 2001, 21A(4): 521–526 (Chai G Q. The Existence of Positive Solutions Singular Boundary Problems. *Acta Math. Scientia*, 2001, 21A(4): 521–526)

[6] Wong F H. Existence of Positive Solutions for m-Laplacian Boundary Value Problems. *Appl. Math. Lett.*, 1999, 12: 11–17

[7] Guo D J, Lakshmikantham V, Liu X Z. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996

Positive Solutions for Third-order p-Laplacian Coupled Singular for Boundary Value Problems

CAI Zengxia ZHANG Xianzhao

(*College of Sciences, LinYi University, LinYi* 276005)

(*E-mail: caizengxia@163.com*)

LIU Lishan

(*Department of Mathematics, QuFu Normal University, QuFu* 273165)

Abstract By constructing operators in Banach space and combining the fixed point theorem, the authors study a class of third-oder p-Laplacian coupled singular boundary value problems and present the conditions for the existence of positive solutions.

Key words coupled singular boundary value problem; positive solution; fixed point theorem;

MR(2000) Subject Classification 34B15; 34B25

Chinese Library Classification O175.8