第 35 卷 第 3 期 应用数学学报 Vol. 35 No. 3
2012 年 5 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA May, 2012

基于ROI, VMI和CS三种库存方式长短期绩效的对比研究

吴欣欣

(宁波大学商学院，宁波 315211)

(E-mail: wuxinxin@nbu.edu.cn)

黄庆扬

(上海申银万国证券研究所有限公司，上海 200001)

摘　要　ROI 、 VMI 和 CS 是基于供应链的三种库存管理方式. 本文以两层供应链的 ROI 、 VMI 和 CS 方式为例，通过数学模型和具体算例，比较分析了三种库存方式下买方和卖方成本和利润构成的不同之处. 本文研究发现：在长期内相对于 ROI 方式而言， VMI 方式下供应链的效率更高；如果卖方的单位存储成本大于买方， CS 方式下供应链的长短期效率可能高于 VMI 更高于 ROI 方式.

关键词　零售商占有库存；卖方管理库存；寄售库存；供应链绩效

MR(2000) 主题分类　00A69; 03C30; 91A05; 91A40; 91A80

中图分类　F273

1　引言

在绝大多数 SCM 文献中，都默认为买方拥有库存的所有权，即买方在收到货物时就向卖方支付整批货物的全额货款，而且大部分产品都存放在卖方仓库里，这种库存方式一般被称为零售商占有库存 (Retailer-owned Inventory, ROI).

上世纪八十年代，自从在 Wal-Mart, Proter, Gamble 之间实施而大获成功后，一种新的库存管理方式迅速得到了学术界和实业界的广泛重视，这种新的库存管理方式就叫做卖方管理库存 (Vendor Managed Inventory, VMI). VMI 的核心思想在于买方放弃商品库存的控制权，而由卖方掌握供应链上的商品库存动向，即由卖方依据买方提供的每日商品销售资料和库存情况来集中管理库存，替买方下订单或连续补货，从而实现对顾

本文 2011 年 10 月 24 日收到. 2012 年 4 月 8 日收到修改稿.

客需求的快速反应.

近年来，在意大利的汽车制造行业又出现了一种新的、现业已扩展到各行各业的库存方式 — 寄售库存 (Consignment Stock, CS). 寄售库存指供应商将货物 (原材料，半成品或产成品) 存放在生产厂商或者零售商仓库中，在货物没有被厂商或零售商使用之前，货物的所有权归供应商所有，厂商或零售商只有在使用货物时才支付费用 [1]. CS 方式区别于传统库存方式的两个最大不同在于库存所有权和库存存放地点的不同.

Dong, Xu[2] 根据市场需求量是否可变，将供应链里的时间期限划分为长期和短期的概念. 他们认为，在短期内，由于受市场约束、公共条款或者买卖双方所签合同的限制，市场对某种产品的需求数量是相对稳定的；在长期内，随着社会、经济和政治环境的变化，这些约束、条款或者合同形式也可能发生改变，从而导致市场的需求量也成为动态可变的.

本文借鉴 Dong, Xu[2] 的做法，根据市场需求量是否可变，将买卖双方的成本和利润划分为长期和短期两种情况，然后求出 ROI, VMI 和 CS 三种库存方式下买卖双方的合作解和不合作解，最后基于这些解推导出一系列结论.

2 模型与符号假定

本文所做的假定如下：

(1) 供应链中只存在单一的买方 (她) 和单一的卖方 (他), 且只生产一种产品；

(2) 买方的订购是分批进行的，她每次订购的批量为 Q, 每次订购的成本为 A; 卖方的生产瞬间完成，即生产速度无穷大，他每次生产的批量为 mQ, 每次生产的启动成本为 M;

(3) 在 ROI 和 VMI 方式下，当买方或卖方下完订单后，卖方就运送 Q 单位产品到买方仓库，并将剩余产品储存在自己的仓库里；在 CS 方式下，每当卖方生产完 Q 单位产品后，他都将这些产品运送到买方仓库；

(4) 单位时间内最终顾客对产品的需求数量，买方卖给最终顾客的产品数量，买方从卖方那里购买的产品数量，以及卖方生产的产品数量都是相等的，为 y, 本文将交替使用这几个概念；

(5) 产品的单位零售价格与产品的生产 (需求) 数量相关，为 $p(y)$ 且 $p'(y) < 0$, 这也是西方经济学里经常用到的反需求函数；卖方产品生产的总成本 (包括产品设计、营销、生产等方面) 是产品生产数量 y 的增函数，为 $ct(y)$ 且 $c'(y) > 0$;

(6) 买卖双方的决策是一个动态博弈过程，且买方是该博弈的领导者：首先由买方根据自己的成本结构决定产品的批发价格 w, 然后由卖方根据买方制定的产品批发价格 w 决定自己的产品生产数量 $y^{\dagger}$; 产品的订购根据经济订货量原则进行；

(7) 在 ROI 方式下，订购成本由买方承担；在 VMI 和 CS 方式下，订购成本由卖方承担；三种库存方式下的生产启动成本都由卖方承担；

† 这同 Dong 和 Xu[2] 的假设是一致的.

(8) 忽略买卖双方之间转移支付资金的机会成本；单位运输成本为常量，本文不予考虑.

在库存持有成本方面，本文记买方的单位库存持有成本为 h_b, 卖方的单位库存持有成本为 h_v. 在大多数 SCM 文献里，都假定 $h_b > h_v$, 这在大多数情况下是成立的，但 Hill, Omar[3] 认为，在有些情况下，有可能出现 $h_b < h_v$ 的情形. 此外，这种库存成本表示法还不能够反映出买卖双方库存所有权的不同. 当借鉴 [1] 的做法，将单位产品的库存持有成本分解为两部分：与财务相关的库存成本 (h_f) 以及与存储相关的库存成本 (h_s) 后，就可以反映出 CS 方式与传统库存方式的最大不同之一 — 库存所有权的不同了.

在 ROI 方式下，当卖方将产品运送到买方仓库时，产品的所有权就转移给了买方，相应的，与财务和存储相关的库存成本都由买方承担；在 CS 方式下，当卖方将产品运送到买方仓库时，卖方仍然拥有库存产品的所有权，因此也承担着所有与财务相关的库存成本，而买方只承担与存储相关的库存成本；在 VMI 方式下，所有与财务和存储相关的库存成本都由卖方承担.

Boyaci, Gallego[4] 将与财务相关的库存成本定义为产品的机会成本，它等于单位资金单位时间的机会成本乘以产品的价格，因此，卖方单位产品在单位时间内与财务相关的库存成本 $h_{v,f} = Ic$, 其中 I 表示单位资金单位时间的机会成本， c 表示单位产品的生产成本. 于是，三种库存方式下买卖双方的库存成本分担表如下：

表 1 ROI, VMI 和 CS 方式的库存成本分担表

		产品位置							
		ROI			**VMI**			**CS**	
		卖方	买方		卖方	买方		卖方	买方
相关成本	卖方	$Ic + h_{v,s}$	$I(c-w)$	卖方	$Ic + h_{v,s}$	$Ic + h_{v,s}$	卖方	$Ic + h_{v,s}$	Ic
	买方	0	$Iw + h_{b,s}$	买方	0	$h_{b,s}$	买方	0	$h_{b,s}$

假设中所用到的符号可归纳如表 2:

表 2 本文符号及其含义对照表

符号	符号对应含义	符号	符号对应含义
y	单位时间的产品生产 (需求) 数量	Q	单位订购批量
A	买方的单位订购成本	M	卖方的单位生产启动成本
$p(y)$	单位产品的零售价格	w	单位产品的批发价格 $(p > w)$
c	单位产品的生产价格 $(w > c)$	I	单位资金单位时间的机会成本
$h_{b,s}$	买方单位产品单位时间内与存储相关的库存成本	$h_{v,s}$	卖方单位产品单位时间内与存储相关的库存成本
m （m 为正整数)	每个生产周期内卖方将产品运送到买方仓库的次数	$c(y)$	卖方的产品设计、营销、生产等方面的总成本

3 三种库存方式的利润模型

下面分别计算 ROI, VMI 和 CS 三种方式下买卖双方的利润函数及各自面对的决策问题.

在 ROI 方式下，买方的收入为对最终顾客的产品销售收入，买方的成本包括订购成本与库存持有成本，转移支付为买方支付给卖方的产品批发成本．于是， ROI 方式下买方在单位时间内的利润函数为：

$$\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w,Q;y)=p(y)y-wy-[Ay/Q+(Ic+h_{b,s})Q/2], \tag{1}$$

其中 Ay/Q 和 $(Ic+h_{b,s})Q/2$ 分别为买方在单位时间内的订购和库存持有成本，详见 [5]. ROI

方式下卖方在单位时间内的利润函数为：

$$\Pi^v_{\mathrm{ROI}}(y;w,Q)=wy-c(y)-\big[My/(mQ)+(m-1)(Ic+h_{v,s})Q/2\big], \tag{2}$$

其中 $My/(mQ)$ 和 $(m-1)(Ic+h_{v,s})Q/2$ 分别为卖方在单位时间内的生产启动和库存持有成本，详见 [5] (本文假定生产瞬间完成).

将买卖双方的利润函数相加，就可以得到系统在单位时间内的总利润函数为：

$$\begin{aligned}&\Pi_{\mathrm{ROI}}(Q,y)\\=&p(y)y-c(y)-\big[Ay/Q+My/(mQ)+IcmQ/2+h_{b,s}Q/2+h_{v,s}(m-1)Q/2\big].\end{aligned} \tag{3}$$

同理, 根据以上假设并参照 [2,6] 所求得的 VMI 与 CS 方式成本构成公式, 可以得到 VMI 和 CS 方式下买卖双方的利润函数，归纳如表 3:

表 3 ROI, VMI 和 CS 方式下买卖双方的利润函数

VMI	$p(y)y-wy$	$wy-c(y)-\big[Ay/Q+My/(mQ)+IcmQ/2+h_{b,s}Q/2+h_{v,s}(m-1)Q/2\big]$
CS	$p(y)y-wy-mh_{b,s}Q/2$	$wy-c(y)-\big[Ay/Q+My/(mQ)+mIcQ/2\big]$

4 三种库存方式的合作解

所谓合作解是指买卖双方采取供销一体化模式，追求供应链整体利润最大化时的解. 例如买卖双方同属于一个经济实体或者组成战略联盟就属于这种情况，它可以作为供应链协作研究的基准.

由式 (3) 和表 2 可以看出， ROI 和 VMI 两种库存方式下系统总利润函数的表达式相同，本文统一记为 Π_{non}-CS(Q,y), 其中 Π 的下标 non-CS 表示非寄售库存方式.

为了求得以上三个函数的最优解，本文记 (Q^*,y^*) 为 Π_{non}-CS(Q,y) 和 $\Pi_{\mathrm{CS}}(Q,y)$ 取最大值时的最优解，可以证明这三个函数具有以下性质：

性质 1 如果固定 $y,\Pi_{\mathrm{CS}}(Q,y)$ 和 Π_{non}-CS(Q,y)在Q上为凹函数．证明略.

由性质 1 知，当 y 固定时，$\Pi_{\mathrm{CS}}(Q,y)$ 和 $\Pi_{\mathrm{non-CS}}(Q,y)$ 一定在 Q^* 上获得最大值. 于是固定 y, 让 $\Pi_{\mathrm{non-CS}}(Q,y)$ 和 $\Pi_{\mathrm{CS}}(Q,y)$ 分别对 Q 求偏导并令其为零，得到双方合作时的最优订购量分别为：

$$Q^*_{\mathrm{non-CS},C}=\sqrt{\frac{2(A+M/m)y}{(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})}},\tag{4}$$

$$Q^*_{\mathrm{CS},C}=\sqrt{\frac{2(A+M/m)y}{m(Ic+h_{b,s})}},\tag{5}$$

其中 Q 的下标 C 表示买卖双方采取合作 (Centralized) 策略的情况.

利用 (4), (5) 两式，可得最优订购批量下 non − CS 和 CS 方式下的总利润函数分别为：

$$\begin{aligned}&\Pi_{\mathrm{non-CS}}(Q^*_{\mathrm{non-CS},C},y)\\ =&p(y)y-c(y)-\sqrt{2y[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})]\Big(A+\frac{M}{m}\Big)},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\Pi_{\mathrm{CS}}(Q^*_{\mathrm{CS},C},y)=p(y)y-c(y)-\sqrt{2my(Ic+h_{b,s})\Big(A+\frac{M}{m}\Big)}.\tag{7}$$

假定 $\Pi_{\mathrm{non-CS}}(Q^*_{\mathrm{non-CS},C},y)$ 和 $\Pi_{\mathrm{CS}}(Q^*_{\mathrm{CS},C},y)$ 在 y 上为凹函数. 于是，买方的最优需求量也可通过让 $\Pi_{\mathrm{non-CS}}(Q^*_{\mathrm{non-CS},C},y)$ 和 $\Pi_{\mathrm{CS}}(Q^*_{\mathrm{CS},C},y)$ 对 y 求一阶偏导并令其为零求得：

$$\begin{aligned}&p'(y^*_{\mathrm{non-CS},C})y^*_{\mathrm{non-CS},C}+p(y^*_{\mathrm{non-CS},C})-c'(y^*_{\mathrm{non-CS},C})\\ &-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+\frac{M}{m})}{y^*_{\mathrm{non-CS},C}}}=0,\end{aligned}\tag{8}$$

$$p'(y^*_{\mathrm{CS},C})y^*_{\mathrm{CS},C}+p(y^*_{\mathrm{CS},C})-c'(y^*_{\mathrm{CS},C})-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m(Ic+h_{b,s})(A+\frac{M}{m})}{y^*_{\mathrm{CS},C}}}.\tag{9}$$

4　三种库存方式的不合作解

当买卖双方隶属于不同的经济实体时，他们都会根据各自的利润最大化原则来进行决策. 以往的绝大部分文献都使用动态博弈模型来处理这类问题：首先由主方制定决策，当从方看到主方的决策后，自己再进行决策.

在 ROI, VMI 和 CS 三种方式下，主从双方的决策变量和决策步骤是不同的. 但正如 [7] 所阐述的那样，经济订货量 (Economic Order Quantity, EOQ) 策略在库存控制中有着极强的鲁棒性. 因此，参照本领域中常用的假设并不失一般性，本文假定在以上三种库存方式下，买卖双方的订货策略都服从 EOQ 原则.

在 ROI 方式下，买卖双方的博弈过程如假设 (6) 所述：买方首先根据 EOQ 策略来决定自己的订购批量，于是让 (1) 式的 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w,Q;y)$ 对 Q 求一阶偏导并令其为零，得

买方的 EOQ 为：

$$Q^*_{\mathrm{ROI},D}=\sqrt{\frac{2Ay}{Ic+h_{b,s}}}, \tag{10}$$

上式中 Q 的下标 D 表示买卖双方采取不合作 (Decentralized) 策略时的情况.

将 (10) 式代入 (1) 式，得到买方的利润函数为：

$$\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w,Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)=p(y)y-wy-\sqrt{2Ay(Ic+h_{b,s})}.$$

将 (10) 式代入 (2) 式，得到卖方的利润函数为：

$$\Pi^v_{\mathrm{ROI}}(y;w,Q^*_{\mathrm{ROI},D})=wy-c(y)-\sqrt{\frac{Ay(Ic+h_{b,s})}{2}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big].$$

对于买方提供的任意一个批发价格，卖方都会选择一个供给数量以最大化自己的利润，于是让 $\Pi^v_{\mathrm{ROI}}(y;w,Q^*_{\mathrm{ROI},D})$ 对 y 求一阶偏导并令其等于零，得：

$$w^*_{\mathrm{ROI}}=c'(y)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2y}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big]. \tag{11}$$

当买方意识到她所提供的产品批发价格和卖方愿意提供的产品数量具有这种关系后，她就会选择一个最优数量 $y^*_{\mathrm{ROI},D}$ 以最大化自己的利润. 假设 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)$ 在 y 上为凹函数，将 w^*_{ROI} 代入 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w,Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)$ 并让 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)$ 对 y 求一阶偏导，得：

$$\begin{aligned}&p'(y^*_{\mathrm{ROI},D})y^*_{\mathrm{ROI},D}+p(y^*_{\mathrm{ROI},D})-c''(y^*_{\mathrm{ROI},D})y^*_{\mathrm{ROI},D}-c'(y^*_{\mathrm{ROI},D})\\&-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2y^*_{\mathrm{ROI},D}}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+4\Big].\end{aligned} \tag{12}$$

同理可得 VMI 和 CS 方式下买卖双方的 Q^*, w^* 和 y^*, 归纳为表 4:

表 4 ROI, VMI 和 CS 方式下买卖双方的 Q^*, w^* 和 y^*

	最优订购批量	最优批发价格
VMI	$Q^*_{\mathrm{VMI},D}=\sqrt{\frac{2y(A+M/m)}{(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})}}$	$w^*_{\mathrm{VMI}}=c'(y)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+M/m)}{y}}$
CS	$Q^*_{\mathrm{CS},D}=\sqrt{\frac{2y(A+M/m)}{mIc}}$	$w^*_{\mathrm{CS}}=c'(y)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2Ic(mA+M)}{y}}$
	最优生产数量	
VMI	$p'\left(y^*_{\mathrm{VMI},D}\right)y^*_{\mathrm{VMI},D}+p\left(y^*_{\mathrm{VMI},D}\right)-c''\left(y^*_{\mathrm{VMI},D}\right)y^*_{\mathrm{VMI},D}-\frac{1}{2}c'\left(y^*_{\mathrm{VMI},D}\right)-\frac{1}{2}w^*_{\mathrm{VMI}}=0$	
CS	$p'\left(y^*_{\mathrm{CS},D}\right)y^*_{\mathrm{CS},D}+p\left(y^*_{\mathrm{CS},D}\right)-c''\left(y^*_{\mathrm{CS},D}\right)y^*_{\mathrm{CS},D}-c'\left(y^*_{\mathrm{CS},D}\right)-\frac{Ic+h_{b,s}}{4Ic}\sqrt{\frac{2Ic(mA+M)}{y^*_{\mathrm{CS},D}}}=0$	

下面，本文将基于三种库存方式的合作和不合作解推导出一系列结论. 需要说明的是，由于在这三种库存方式中， CS 方面的文献相对较少，因此本文的结论将更侧重于 CS 方式.

5 三种库存方式的短期效应分析

在一种库存方式实施的早期阶段，由于受市场约束、公共条款或者买卖双方签订的合同的限制，市场对某种产品的需求数量是相对稳定的. 因此，本部分假定市场需求量 y 恒定不变.

对于 CS 与非 CS 方式的联合期望总成本， Braglia, Zavanella[6] 已经进行了比较，Huang, Chen[8] 又对其结论进行了拓展，如下：

定理 1 在短期内，如果买卖双方进行合作，ROI 和 VMI 方式下买卖双方的联合期望总成本相等. 当 $h_{b,s} > h_{v,s}$ 时， CS 方式的联合期望总成本大于 ROI 和 VMI 方式，反之相反.

定理 1 指出了当买卖双方进行合作时 CS 方式的适用范围，也即当买方的单位存储成本小于卖方时，采用 CS 方式系统能够获得较低的系统总成本；反之，应该采用 II 方式.

但在现实生活中，系统到底采用哪种库存方式有时并不完全取决于总成本，而是买卖双方力量权衡的结果. 随着全球进入买方市场后，市场的渠道力量逐渐向供应链的下游转移，因此下游的厂商在库存方式的选择方面，具有越来越大的发言权. 下面看看在短期内，哪种库存方式对买方最为有利.

定理 2 在短期内，相对于 ROI 方式来说，当 $h_{b,s}^2(m+\frac{M}{A}) < 4Ic(Ic+h_{b,s})$ 时， CS 方式降低了买方的成本，反之相反；相对于 VMI 方式来说， CS 方式总是提高了买方的成本.

ROI 方式下买方的成本函数为 $C^b_{\text{ROI}}(Q;y) = \sqrt{2Ay(Ic+h_{b,s})}$,

VMI 方式下买方的成本函数为 $C^b_{\text{VMI}} = 0$,

CS 方式下买方的成本函数为 $C^b_{\text{CS}} = h_{b,s}\sqrt{\frac{(mA+M)y}{2Ic}}$.

因此，当 $h_{b,s}^2(mA+M) > 4AIc(Ic+h_{b,s})$ 时， $C^b_{\text{CS}} > C^b_{\text{ROI}}$； $C^v_{\text{CS}} > C^v_{\text{VMI}} = 0$. 证毕.

与之相应，下面看看在短期内哪种库存方式对卖方最为有利.

定理 3 在短期内，相对于 ROI 方式来说，当

$$2\sqrt{Ic(m+\frac{M}{A})} < \sqrt{(Ic+h_{b,s})}\left[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\right]$$

时， CS 方式降低了卖方的成本和产品的批发价格，反之相反；相对于 VMI 方式来说，CS 方式总是降低了卖方的成本和产品的批发价格.

在短期内，三种库存方式下市场对产品的需求数量 y 是相同的. 因此，当

$$\sqrt{2Ic(mA+M)} > \sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2}}\left[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\right]$$

时， $C^v_{\text{CS}} > C^v_{\text{ROI}}$.

由于

$$\sqrt{2y[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})]\Big(A+\frac{M}{m}\Big)}>\sqrt{2Icy(mA+M)},$$

故 $C^v_{\mathrm{VMI}}>C^v_{\mathrm{CS}}$.

在 ROI, VMI 和 CS 方式下，卖方的最优批发价格和其成本具有类似的表达式，故它们具有同样的性质.

同样，可以用同样的方法证明推论 1.

定理 2 和 3 指出，在短期内，相对于 VMI 方式来说， CS 方式总是提高了买方的成本，降低了卖方的成本. 这解释了为什么现在的大型超市里，强势的买方只愿意采用 VMI 方式.

有些学者认为，下游买方会从 CS 方式中得到更大的好处， CS 实际上是买方对卖方强势地位的一种表现. 而从定理 2 和 3 可以看出，相对于 ROI 方式而言， CS 方式并不总是以降低买方成本的代价来增加卖方的成本. 在某些情况下，例如定理 2 和 3 中的条件同时满足时， CS 方式能够同时降低买方和卖方的成本. 因此，关键在于找出 CS 方式的适用范围，或者说找出在什么情况下， CS 方式会使买卖双方的利益同时得到提高.

推论 1 在短期内，相对于 ROI 方式来说，当定理 3 的条件成立时， CS 方式提高了卖方的利润，反之相反；相对于 VMI 方式来说， CS 方式总是提高了卖方的利润.

在短期内，三种库存方式下市场对产品的需求数量 y 是相同的. 因此，当

$$\sqrt{2Ic(mA+M)}>\sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big]$$

时， $C^v_{\mathrm{CS}}>C^v_{\mathrm{ROI}}$;

由于

$$\sqrt{2y[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})]\Big(A+\frac{M}{m}\Big)}>\sqrt{2Icy(mA+M)},$$

故 $C^v_{\mathrm{VMI}}>C^v_{\mathrm{CS}}$.

在 ROI, VMI 和 CS 方式下，卖方的最优批发价格和其成本具有类似的表达式，故它们具有同样的性质.

同样，可以用同样的方法证明推论 1.

推论 2 在短期内，相对于 ROI 方式来说，当

$$\frac{M}{2mA}+\frac{(m-1)(Ic+h_{v,s})}{2(Ic+h_{b,s})}+2>\sqrt{\frac{Ic+h_{b,s}}{Ic}\Big(m+\frac{M}{A}\Big)}$$

时， CS 方式提高了买方的利润，反之相反;

在短期内，相对于 VMI 方式来说，当 $h_{b,s}>h_{v,s}$ 时， CS 方式总是降低了买方的利润；当 $h_{b,s}<h_{v,s}$ 时，如果 $mh^2_{b,s}+(2m-1)Ich_{b,s}<(m-1)Ich_{v,s}$, CS 方式提高了买方的利润，反之相反.

在短期内，ROI, VMI 和 CS 三种方式下的产品需求量 y 都是相同的，因此当 $\frac{M}{2mA}+\frac{(m-1)(Ic+h_{v,s})}{2(Ic+h_{b,s})}+2>\sqrt{\frac{Ic+h_{b,s}}{Ic}}(m+\frac{M}{A})$ 时， $\Pi^b_{\mathrm{CS}}>\Pi^b_{\mathrm{ROI}}$;

当 $h_{b,s}>h_{v,s}$ 时， $mh^2_{b,s}+(2m-1)Ich_{b,s}>(m-1)Ich_{v,s}$ 时，故 $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}>\Pi^b_{\mathrm{CS}}$;

当 $h_{b,s}<h_{v,s}$ 时，如果 $mh^2_{b,s}+(2m-1)Ich_{b,s}<(m-1)Ich_{v,s}$, CS 方式提高了买方的利润，反之相反.

6　三种库存方式的长期效应分析

在较长时间内，随着社会、经济和政治环境的变化，市场约束、公共条款或者合同形式也可能发生改变. 因此在本部分，我们假定市场需求量 y 可以变化，从而分析三种库存方式的长期效应. 实际上，这也是西方经济学里长短期概念的划分方法.

据实践证明， VMI 方式实施过一段较长的时间后，它的间接优势就会显现出来，例如会带来销售数量的增长等. Dong, Xu[2] 从理论上也证实了这一点. 那么，在 CS 方式中，相同的情况是否也会出现呢？

定理 4　在长期内， VMI 方式下市场对产品的需求数量总是大于 ROI 方式;

在长期内，当推论 2 的第一个条件成立时， CS 方式下市场对产品的需求数量大于 ROI 方式，反之相反;

在长期内，当 $h_{b,s}>h_{v,s}$ 时， VMI 方式下市场对产品的需求数量总是大于 CS 方式；当 $h_{b,s}<h_{v,s}$ 时，如果推论 2 的第二个条件成立， CS 方式下市场对产品的需求数量大于 VMI 方式，反之相反.

在 ROI 方式下，让 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)$ 对 y 求一阶偏导，得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)}{\partial y}&=p'(y)y+p(y)-c''(y)y-c'(y)\\&-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2y}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+4\Big],\end{aligned}$$

在 VMI 方式下，让 $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)$ 对 y 求一阶偏导，得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)}{\partial y}=&p'(y)y+p(y)-c''(y)y-c'(y)\\&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mIc+h_{b,s}+(m-1)h_{v,s}}{2y}\Big(A+\frac{M}{m}\Big)},\end{aligned}$$

在 CS 方式下，让 $\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y)$ 对 y 求一阶偏导，得：

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y)}{\partial y}=p'(y)y+p(y)-c''(y)y-c'(y)-\frac{1}{2}(Ic+h_{b,s})\sqrt{\frac{m}{2Icy}\Big(A+\frac{M}{m}\Big)}.$$

由于

$$\Big[1+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+1+\frac{M}{mA}\Big]-2\sqrt{\Big[1+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big]\Big(1+\frac{M}{mA}\Big)}$$
$$=\Big\{\sqrt{\Big[1+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big]}-\sqrt{1+\frac{M}{mA}}\Big\}^2\geq 0,$$

故

$$\Big[1+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+1+\frac{M}{mA}+2\Big]>2\sqrt{\Big[1+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}\Big]\Big(1+\frac{M}{mA}\Big)},$$

即

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A(Ic+h_{b,s})}{2y}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+4\Big]>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mIc+h_{b,s}+(m-1)h_{v,s}}{2y}\Big(A+\frac{M}{m}\Big)},$$

于是

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)}{\partial y}<\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)}{\partial y}.$$

假定 $y^*_{\mathrm{ROI},D}$, $y^*_{\mathrm{VMI},D}$ 和 $y^*_{\mathrm{CS},D}$ 分别表示买卖双方不合作时 ROI, VMI 和 CS 方式下买方的最优需求量．根据上式，于是有

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{VMI},D})}{\partial y}<\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D})}{\partial y}=0.$$

又由于 $\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{ROI},D})}{\partial y}=0$, 因此

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{VMI},D})}{\partial y}<\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{ROI},D})}{\partial y}=0.$$

由于假定了 $\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)$ 和 $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)$ 在 y 上都为凹函数，所以 $\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y)}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)}{\partial y}$ 在 y 上都为减函数．由

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{VMI},D})}{\partial y}<\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}},Q^*_{\mathrm{ROI},D};y^*_{\mathrm{ROI},D})}{\partial y}$$

可知， $y^*_{\mathrm{VMI},D}>y^*_{\mathrm{ROI},D}$.

按照类似的方法，可以证明当 $h_{b,s}>h_{v,s}$ 时， $y^*_{\mathrm{CS},D}<y^*_{\mathrm{VMI},D}$;

当 $h_{b,s}<h_{v,s}$ 时, 如果 $m(h_{b,s})^2+(2m-1)Ich_{b,s}>(m-1)Ich_{v,s}$ 时，$y^*_{\mathrm{CS},D}<y^*_{\mathrm{VMI},D}$, 反之，如果 $mh^2_{b,s}+(2m-1)Ich_{b,s}<(m-1)Ich_{v,s}$， $y^*_{\mathrm{CS},D}>y^*_{\mathrm{VMI},D}$.

同样可以证明，当

$$\Big\{\frac{M}{2mA}+\frac{(m-1)(Ic+h_{v,s})}{2(Ic+h_{b,s})}+2\Big\}>\sqrt{\frac{m}{Ic}(Ic+h_{b,s})\Big(1+\frac{M}{mA}\Big)}$$

时，

$$\frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y)}{\partial y} > \frac{\partial\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}};Q^*_{\mathrm{ROI},D},y)}{\partial y}, \qquad y^*_{\mathrm{CS},D} > y^*_{\mathrm{ROI},D},$$

反之相反.

定理 4 指出，从长期看， VMI 方式下市场对产品的需求量总是大于 ROI 方式. 之所以出现这种情况， Dong, Xu[2] 认为是由于 VMI 方式下买方获得了更低的单位成本，因此她能够以较低的价格销售出更多的产品. 实际上，这也可以用西方经济学里的边际收益和边际成本的概念来解释.

当买方的单位存储成本大于卖方时，VMI 方式下市场对产品的需求量总是大于 CS 方式. 但是当买方的单位存储成本小于卖方时，有可能出现相反的情况，也就是说 CS 方式下市场对产品的需求量会大于 VMI 方式，当然更大于 ROI 方式.

下面研究长期内， ROI, VMI 和 CS 三种方式下买卖双方的利润大小关系.

定理 5 在长期内， VMI 方式下买方的利润总是大于 ROI 方式；当 $h_{b,s} > h_{v,s}$ 时，它也大于 CS 方式；

在长期内， VMI 方式下卖方的利润小于 ROI 和 CS 方式.

由于 $y^*_{\mathrm{VMI},D}$ 是 VMI 方式下买方的最优需求量，所以对于任意的 $y \neq y^*_{\mathrm{VMI},D}$，都有

$$\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) \geq \Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y).$$

因此，

$$\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) \geq \Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{CS},D}).$$

由推论 2 知，对于任意 y，当 $h_{b,s} > h_{v,s}$ 时，都有 $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y) \geq \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y)$. 因此， $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) \geq \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D})$.

于是，

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) - \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D})\\ \geq&\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) - \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) \geq 0.\end{aligned}$$

同样也可以证明 $\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) - \Pi^b_{\mathrm{ROI}}(w^*_{\mathrm{ROI}};Q^*_{\mathrm{ROI},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) \geq 0$.

由于 $y^*_{\mathrm{CS},D}$ 是 CS 方式下买方的最优需求量，所以对于任意的 $y \neq y^*_{\mathrm{CS},D}$，都有 $\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) \geq \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y)$. 因此，

$$\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) \geq \Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}).$$

由推论 1 知，对于任意 y，都有 $\Pi^v_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y) \geq \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y)$. 因此，$\Pi^v_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) \geq \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D})$. 于是，

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{CS},D}) - \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D})\\ \geq&\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{CS}};Q^*_{\mathrm{CS},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) - \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) \geq 0.\end{aligned}$$

同样也可以证明 $\Pi^b_{\mathrm{CS}}(w^*_{\mathrm{ROI}};Q^*_{\mathrm{ROI},D},y^*_{\mathrm{ROI},D}) - \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(w^*_{\mathrm{VMI}};Q^*_{\mathrm{VMI},D},y^*_{\mathrm{VMI},D}) \geq 0$.

定理 5 只给出了长期内 VMI 方式同其他两种库存方式的利润大小关系，由于 CS 和 ROI 方式的比较要涉及到一定的条件，而且产品的需求数量 y 并不相同，因此我们无法给出它们二者的大小关系，而只能通过仿真的形式来模拟.

7 三种库存方式的长短期效率分析

本部分将就三种库存方式下系统的总绩效，也就是供应链的长短期效率问题进行横向和纵向的比较.

定理 6 在 VMI 方式下，供应链的长期效率要优于其短期效率，但是它们都不及买卖双方合作时的供应链效率;

在长期内， VMI 方式下供应链的效率优于 ROI 方式;

在长期内, 如果 $h_{b,s} > h_{v,s}$, VMI 方式下供应链的效率优于 CS 方式; 如果 $h_{b,s} < h_{v,s}$, CS 方式下供应链的效率可能优于 VMI 方式，也即

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\mathrm{ROI}}(y^*_{\mathrm{ROI},D}) + \Pi^v_{\mathrm{ROI}}(y^*_{\mathrm{ROI},D}) \le \Pi^b_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{ROI},D}) + \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{ROI},D})\\ \le&\Pi^b_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{VMI},D}) + \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{VMI},D}) \le \Pi_{\mathrm{non-CS}}(y^*_{\mathrm{non-CS},C});\end{aligned}$$

如果 $h_{b,s} > h_{v,s}$, 则

$$\Pi^b_{\mathrm{CS}}(y^*_{\mathrm{CS},D}) + \Pi^v_{\mathrm{CS}}(y^*_{\mathrm{CS},D}) < \Pi^b_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{CS},D}) + \Pi^v_{\mathrm{VMI}}(y^*_{\mathrm{CS},D}),$$

反之不成立.

由于

$$\begin{aligned}&p'(y^*_{\mathrm{VMI},D})y^*_{\mathrm{VMI},D} + p(y^*_{\mathrm{VMI},D}) - c''(y^*_{\mathrm{VMI},D})y^*_{\mathrm{VMI},D} - c'(y^*_{\mathrm{VMI},D})\\ &-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+M/m)}{y^*_{\mathrm{VMI},D}}} = 0\end{aligned}$$

和

$$-c''(y^*_{\mathrm{VMI},D}) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+M/m)}{y^{*3}_{\mathrm{VMI},D}}} \le 0.$$

由以上两式，得：

$$\begin{aligned}&p'(y^*_{\mathrm{VMI},D})y^*_{\mathrm{VMI},D} + p(y^*_{\mathrm{VMI},D}) - c'(y^*_{\mathrm{VMI},D})\\ &-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+M/m)}{y^*_{\mathrm{VMI},D}}} > 0.\end{aligned}$$

又由于

$$p'(y^*_{\mathrm{non-CS},C})y^*_{\mathrm{non-CS},C} + p(y^*_{\mathrm{non-CS},C}) - c'(y^*_{\mathrm{non-CS},C})$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})](A+\frac{M}{m})}{y^*_{\text{non-CS},C}}}=0.$$

本文又假定了 $\Pi_{\text{non-CS}}(Q^*_{\text{non-CS},C},y)$ 在 y 上为凹函数，因此其一阶偏导 $\partial\Pi_{\text{non-CS}}\cdot(Q^*_{\text{non-CS},C},y)/\partial y$ 在 y 上为减函数．由以上两式知

$$\partial\Pi_{\text{non-CS}}(Q^*_{\text{non-CS},C},y^*_{\text{VMI},D})/\partial y>\partial\Pi_{\text{non-CS}}(Q^*_{\text{non-CS},C},y^*_{\text{non-CS},C})/\partial y,$$

因此 $y^*_{\text{non-CS},C}>y^*_{\text{VMI},D}$．又由于已证明了 $y^*_{\text{VMI},D}>y^*_{\text{ROI},D}$，因此有 $y^*_{\text{non-CS},C}>y^*_{\text{VMI},D}>y^*_{\text{ROI},D}$．

系统总利润在 $y=y^*_{\text{non-CS},C}$ 处最大，此时系统的边际利润为零．由于 $y^*_{\text{VMI},D}<y^*_{\text{non-CS},C}$，所以在 $y=y^*_{\text{VMI},D}$ 处，系统的边际利润为正，在 $y=y^*_{\text{ROI},D}$ 处更是如此．于是可以得到以下表达式：

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*_{\text{ROI},D})+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*_{\text{ROI},D})\\ \le&\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*_{\text{VMI},D})+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*_{\text{VMI},D})\le\Pi_{\text{non-CS}}(y^*_{\text{non-CS},C}).\end{aligned}$$

在短期内， ROI 方式下买卖双方不合作时的总利润函数为：

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\text{ROI}}(y^*)+\Pi^v_{\text{ROI}}(y^*)=p(y^*)y-c(y^*)\\ &-\sqrt{\frac{Ay^*(Ic+h_{b,s})}{2}}\Big[\frac{M}{mA}+(m-1)\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+2\Big].\end{aligned}$$

在短期内， VMI 方式下买卖双方不合作时的总利润函数为：

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*)+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*)\\ =&p(y)y-c(y)-\sqrt{2y^*[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})]\Big(A+\frac{M}{m}\Big)}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{Ay^*(Ic+h_{b,s})}{2}}\left[\frac{M}{mA}+(m-1)\,\frac{Ic+h_{v,s}}{Ic+h_{b,s}}+2\right]\\ >&\sqrt{2y^*[(Ic+h_{b,s})+(m-1)(Ic+h_{v,s})]\Big(A+\frac{M}{m}\Big)},\end{aligned}$$

故在短期内，当 y^* 相同时， $\Pi^b_{\text{ROI}}(y^*)+\Pi^v_{\text{ROI}}(y^*)<\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*)+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*)$.

同样也可以证明，当 $h_{b,s}>h_{v,s}$ 时，

$$\Pi^b_{\text{CS}}(y^*)+\Pi^v_{\text{CS}}(y^*)<\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*)+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*).$$

于是有

$$\begin{aligned}&\Pi^b_{\text{ROI}}(y^*_{\text{ROI},D})+\Pi^v_{\text{ROI}}(y^*_{\text{ROI},D})\le\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*_{\text{ROI},D})+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*_{\text{ROI},D})\\ \le&\Pi^b_{\text{VMI}}(y^*_{\text{VMI},D})+\Pi^v_{\text{VMI}}(y^*_{\text{VMI},D})\le\Pi_{\text{non-CS}}(y^*_{\text{non-CS},C})\end{aligned}$$

以及当 $h_{b,s} > h_{v,s}$ 时,

$$\Pi_{\mathrm{CS}}^{b}(y_{\mathrm{CS},D}^{*}) + \Pi_{\mathrm{CS}}^{v}(y_{\mathrm{CS},D}^{*}) < \Pi_{\mathrm{VMI}}^{b}(y_{\mathrm{CS},D}^{*}) + \Pi_{\mathrm{VMI}}^{v}(y_{\mathrm{CS},D}^{*}).$$

定理 6 说明，无论在长期还是短期内， VMI 方式下供应链的效率都要优于 ROI 方式. 但是对于 CS 方式来说，如果出现卖方的单位存储成本大于买方的情况， CS 方式下供应链的效率可能优于 VMI 方式.

合作解是指买卖双方采取供销一体化模式时的解，它是一种理想化的状态，是供应链协作研究的基准. 因此无论是短期还是长期，无论是采用 ROI, VMI 还是 CS 方式，买卖双方进行独立决策时都无法达到这种理性状态.

8 算例分析

为了说明上述模型的求解过程，本文利用 Ouyang 等例子中的数据 [9] 进行仿真： $A = 200$ 元 / 次， M=1500 元 / 次， m=5, $I = 0.1$/ 年， $c = 70$ 元 / 单位， $h_{b,s} = 10$ 元 /(单位 · 年), $h_{v,s}$=8 元 /(单位 · 年). 此外，本文还借用了 Dong, Xu[2] 例子中的线性需求函数和二次成本函数，分别为： $p(y) = 80 - 0.01y$ 和 $c(y) = 40y + 0.02y^2$.

在短期内，产品的需求量是固定不变的，令 $y = 600$; 在长期内，买方可以根据自己的利润最大化原则来确定产品的需求量. 于是利用以上数据和 (4)–(9) 式，就可以得到在 CS 和非 CS 方式下，当买卖双方进行合作时的最优订购量、最优需求数量和系统总利润如下：

表 5 CS 及非 CS 方式的合作解及参数设置

	库存方式	Q^*	y^*	Π
短期	Non-CS	88	–	6402.9
	CS	84	–	6058.6
长期	Non-CS	86	570	6428.0
	CS	81	564	6093.3

由表 5 可以看出，无论是长期还是短期内，非 CS 方式下系统的总利润总是高于 CS 方式，这是因为算例分析的数据中 $h_{b,s} > h_{v,s}$. 相反，如果假定 $h_{v,s} > h_{b,s}$, CS 方式下的系统总利润总是高于非 CS 方式 [8], 也即定理 1. 该结论从直观上也很容易理解，即如果买方的单位存储成本比较高，应将较多的库存存放在卖方，即采用 ROI 或 VMI 方式；反之，采用 CS 方式能够获得较低的系统总成本，或者较高的总利润.

同样，可以得到在三种库存方式下，当买卖双方进行独立决策时的订购量、需求数量、批发价格和各自的利润如下：

表 6　ROI, VMI 及 CS 方式的不合作解及参数设置

	库存方式	w^*	Q^*	y^*	C_b	C_v	C	Π_b	Π_v	Π
短期	ROI	68.2	119	–	2019.9	5079.5	7099.4	1440.4	4660.3	6100.7
	VMI	69.7	88	–	0	6797.1	6797.1	2601.5	3801.5	6402.9
	CS	67.8	131	–	3273.3	4582.6	7855.9	435.4	4908.7	5344.1
长期	ROI	59.6	91	350	1543.3	3881.0	5424.3	4392.5	513.3	4905.8
	VMI	61.8	69	364	0	5291.4	5291.4	5288.1	-1.3	5286.8
	CS	58.6	98	338	2457.6	567.8	3025.4	3631.3	567.8	4199.1

由表 5 和 6 可知，无论是短期还是长期，无论是采用 ROI 、 VMI 还是 CS 方式，买卖双方不合作时的利润之和都小于买卖双方合作时的系统总利润，其比值反映了供应链的效率.

由表 6 还可以看出，当买卖双方采用 VMI 方式时，在长期内卖方的利润函数为负．也就是说，如果卖方是一个独立的利润实体，他是不会进行任何生产活动的，即 $y^*_{\mathrm{VMI},D}=0$. 此时，买方必须给予卖方一定的补偿才能使其生产产品，例如转移支付等.

短期内，由于市场需求量恒定，买方或卖方的利润最大化等同于其成本最小化，因此我们只给出了成本方面的图形，如图 1, 图 2.

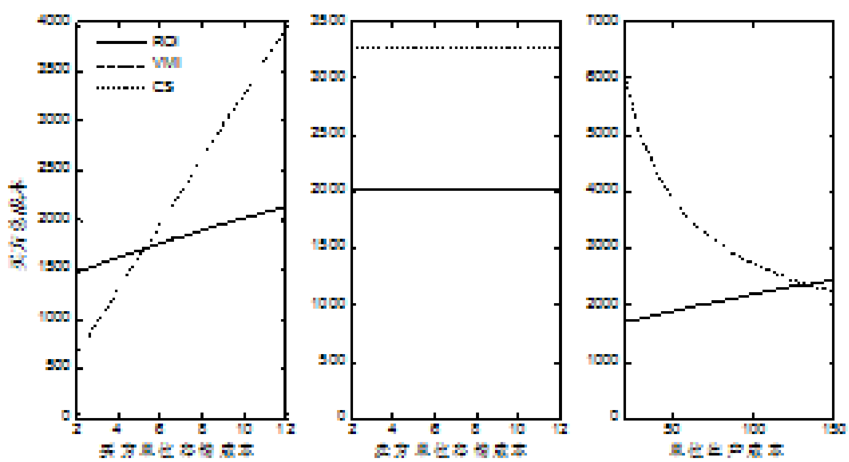

图 1　买方和卖方的单位存储成本以及卖方的单位生产成本对买方总成本的影响

由图 1 可以看出，当买方的单位存储成本较小时， CS 方式下买方总成本小于 ROI 方式，此时买方希望采用 CS 这种库存手段，例如许多生产商都要求供应商将生产用的零部件、原材料等存放在自己的仓库里，其部分原因就在于此.

在图 1 中，买方的总成本与卖方单位存储成本无关，这符合我们的直觉，但与单位生产成本有关，这多少有点出人意料．实际上，这与我们前面的单位库存成本分解有关，因为在买卖双方的博弈中，买方支付给卖方的资金具有一定的机会成本，而此成本与生产成本正相关.

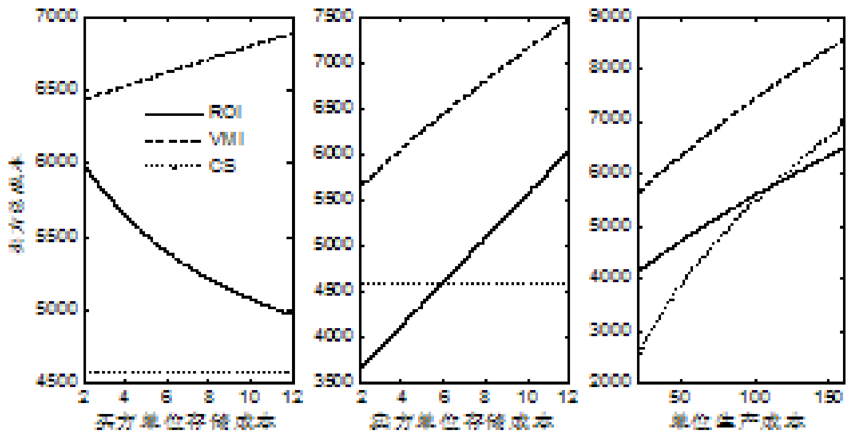

图 2 买卖双方的单位存储成本与卖方的单位生产成本对卖方总成本的影响

9 结论

本文利用一个动态博弈，得到了 ROI 、 VMI 和 CS 三种库存方式下的买方利润函数、卖方利润函数和系统总利润函数；然后在此基础上，对三种库存方式下买卖双方的博弈情况进行了分析，并分别求出了它们的合作解和不合作解；最后基于这些最优解推导出了一系列结论.

这些结论表明，在长期内相对于 ROI 方式而言， VMI 方式下供应链的效率更高. 此外，如果卖方的单位存储成本大于买方， CS 方式下供应链的长短期效率甚至可能要高于 VMI 方式.

参 考 文 献

[1] Valentini G, Zavanella L. The Consignment Stock of Inventories: Industrial Case and Performance Analysis. *International Journal of Production Economics*, 2003, 81(11): 215–224

[2] Dong Y, Xu K. A Supply Chain Model of Vendor Managed Inventory. *Transportation Research Part E*, 2002, 38: 75–95

[3] Hill R M, Omar M. Another Look at the Single-vendor Single-buyer Integrated Production-inventory Problem. *International Journal of Production Research*, 2006, 44: 791–800

[4] Boyaci T, Gallego G. Coordinating Pricing and Inventory Replenishment Policies for One Wholesaler and One or More Geographically Dispersed Retailers. *International Journal of Production Economics*, 2002, 77: 95–111

[5] Hill R M. The Optimal Production and Shipment Policy for the Single-Vendor Single-Buyer Integrated Production Inventory Problem. *International Journal of Production Research*, 1999, 37: 2463–2475

[6] Braglia M, Zavanella L. Modelling an Industrial Strategy for Inventory Management in Supply Chains:

the 'Consignment Stock' Case. *International Journal of Production Research*, 2003, 41(16): 3793–3808

[7] Axsater S. Using the Deterministic Eoq Formula in Stochastic Inventory Control. *Management Science*, 1996, 42(6): 830–834

[8] Huang Q Y, Chen J F. A Note on "A Consignment Stock Model for a Single Vendor and Multiple Buyers under Deterministic Environment". *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2008, 11(42): 1814–1817

[9] Ouyang L Y, Wu K S, Ho C H. Integrated Vendor-Buyer Cooperative Models with Stochastic Demand in Controllable Lead Time. *International Journal of Production Economics*, 2004, 92: 255–266

A Comparative Study of Short and Long-term Performance Based on ROI, VMI and CS Inventory Policies

WU Xinxin

(*Business Faculty, Ningbo University, Ningbo* 315211)

(*E-mail: wuxinxin@nbu.edu.cn*)

HUANG Qingyang

(*Shenyin & Wanguo Securities Research Co., Ltd. Shanghai* 200001)

Abstract ROI, VMI and CS are three of most widely discussed partnering initiatives for improving multi-firm supply chain efficiency, that is to say three inventory policies based on supply chain . In this paper, we introduce some mathematics models and try numerical examples for the purpose of examining the analytical expressions of costs and profits of buyer and supplier in such three different policies as ROI, VMI and CS. We draw lessons from the practice of Dong and Xu, divide both cost and profit into two cases (short-term and long-term) and then calculate the cooperation and non-cooperation solutions of both buyer and supplier in ROI, VMI and CS policies according to variable market demand Our results suggest that VMI provides higher efficiency compared with ROI in the long run. If we suppose the unit storage cost of the vendor is greater than the buyer, CS policy may be more effective than the VMI even better than ROI both in the short and long run.

Key words retailer-owned inventory; vendor managed inventory; consignment stock; supply chain performance

MR(2000) Subject Classification 00A69; 03C30; 91A05; 91A40; 91A80

Chinese Library Classification F273