第 35 卷 第 2 期　　应用数学学报　　Vol. 35 No. 2
2012 年 3 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　March, 2012

一类带 p-Laplace 型算子的高阶两点边值问题的极值解

苗利军

(北华大学数学学院，吉林 132013)

(白城师范学院数学学院，白城 137000)

裴明鹤

(北华大学数学学院，吉林 132013)

(E-mail: peiminghe@163.com)

摘　要　本文主要研究一类带 p-Laplace 型算子的 $n\ (\geq 3)$ 阶非线性常微分方程

$$-[\phi(u^{(n-1)}(t))]' = f(t, u(t)), \quad \text{a.e. } t \in [a, b]$$

满足两点边界条件

$$u^{(i)}(a) = A_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad u^{(n-1)}(a) = A, \qquad u^{(n-1)}(b) = B$$

的边值问题极值解的存在性, 这里 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 是递增的同胚, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 L^1-Carathéodory 函数, $A, B, A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \cdots, n-3$. 主要利用基于反极大值原理的单调迭代方法，得到了上述边值问题极值解的存在性结果.

关键词　边值问题；p-Laplace 型算子；单调迭代方法；极值解

MR(2000) 主题分类　34B10; 34B15

中图分类　O175.8

1　引言

近年来，利用单调迭代方法研究高阶边值问题极值解的存在性问题受到广泛关注 [1−9], 但其结果与一阶和二阶边值问题的结果相比较却很少 [10], 究其原因主要是因为利用单调迭

本文 2011 年 1 月 7 日收到. 2011 年 9 月 15 日收到修改稿.

代方法研究边值问题的极值解通常依赖微分不等式, 而高阶微分不等式是较难解决的问题, 从而给用单调迭代方法研究高阶边值问题的极值解带来了较大的难度.

本文将研究一类带 p-Laplace 型算子的 n 阶非线性常微分方程

$$-[\phi(u^{(n-1)}(t))]' = f(t, u(t)), \quad \text{a.e.} \ \ t \in [a, b] \tag{1.1}$$

满足两点边界条件

$$u^{(i)}(a) = A_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3, \quad u^{(n-1)}(a) = A, \quad u^{(n-1)}(b) = B \tag{1.2}$$

的边值问题极值解的存在性, 这里 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 是递增的同胚，$f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 L^1-Carathéodory 函数，而 $A, B, A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \cdots, n-3$.

本文里，我们所采用的主要证明思路是，首先对相应于边值问题 (1.1),(1.2) 的微分不等式建立一些反极大值原理，然后利用它以及反序上下解的单调迭代方法，得到边值问题 (1.1), (1.2) 极值解的存在性.

2　反极大值原理

为了利用单调迭代方法得到带一维 p-Laplace 型算子的 n 阶两点边值问题 (1.1),(1.2) 的极值解的存在性，本节研究辅助方程

$$-[\phi(u^{(n-1)}(t))]' + Mu(t) = \sigma(t), \quad \text{a.e.} \ \ t \in I = [a, b] \tag{L_σ}$$

分别满足边界条件 (1.2) 或者

$$u^{(i)}(a) = A_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-2, \quad u^{(n-1)}(b) = B \tag{2.1}$$

或者

$$\begin{cases} u^{(i)}(a) = A_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3, \\ u^{(n-1)}(a) = A, \qquad u^{(n-2)}(b) = B_{n-2} \end{cases} \tag{2.2}$$

的边值问题解的存在唯一性，以及相应的反极大值原理，其中 $\sigma \in L^1(I)$, $M < 0$ 为常数.

为叙述方便起见，我们记

(H_1)　$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增的同胚，使得 $\phi(0) = 0$ 并且 ϕ^{-1} 满足局部 Lipschitz 条件，即对于每一个紧区间 $J = [c, d]$, 有 $K = K(J) > 0$, 使得对于所有的 $u, v \in [c, d]$ 有

$$|\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v)| \le K|u - v|.$$

(H_1^*)　$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增的同胚，使得 $\phi(0) = 0$ 并且 ϕ^{-1} 是一个 K-Lipschitz 函数，即存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $u, v \in \mathbb{R}$ 有

$$|\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v)| \le K|u - v|.$$

对于上述 K, 我们定义

$$M^* := -\frac{n!}{2K(b-a)^n}, \qquad M^{**} := -\frac{n!}{K(n^2-3n+2)(b-a)^n}. \tag{2.3}$$

首先讨论边值问题 (L_σ), (1.2); (L_σ),(2.1) 和 (L_σ), (2.2) 的解的存在唯一性.

引理 2.1 假设条件 (H_1^*) 成立. 若 $M \in (M^*, 0)$, 则对于每一个 $\sigma \in L^1(I)$, 边值问题 (L_σ), (1.2) 有唯一解.

证 我们分两步来完成本引理的证明.

第 1 步：将边值问题 (L_σ), (1.2) 转化成不动点问题. 为此，令 $w(t) = \phi(u^{(n-1)}(t))$, 则边值问题 (L_σ), (1.2) 等价于下面的两个定解问题

$$\begin{cases} u^{(n-1)}(t) = \phi^{-1}(w(t)), \quad t \in I, \\ u^{(i)}(a) = A_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3 \end{cases} \tag{2.4}$$

与

$$\begin{cases} -w'(t) + Mu(t) = \sigma(t), \quad \text{a.e. } t \in I, \\ w(a) = \phi(A), \quad w(b) = \phi(B). \end{cases} \tag{2.5}$$

易知问题 (2.4) 的解为

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-3} \frac{A_i}{i!}(t-a)^i + \frac{u^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(t-a)^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t (t-s)^{n-2}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s.$$

把 $u(t)$ 的表达式代入问题 (2.5) 中的方程，得

$$\begin{aligned} w'(t) =& M\sum_{i=0}^{n-3} \frac{A_i}{i!}(t-a)^i + M\frac{u^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(t-a)^{n-2} \\ &+ \frac{M}{(n-2)!}\int_a^t (t-s)^{n-2}\phi^{-1}(w(s))ds - \sigma(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

将上式的两边在 $[a,b]$ 上积分，并整理得

$$\begin{aligned} \phi(B) - \phi(A) =& M\sum_{i=0}^{n-3} \frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i + \frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-2)}(a) \\ &+ \frac{M}{(n-1)!}\int_a^b (b-s)^{n-1}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s - \int_a^b \sigma(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} u^{(n-2)}(a) =& \frac{(n-1)!}{M(b-a)^{n-1}}\Big[\phi(B) - \phi(A) - M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i \\ &- \frac{M}{(n-1)!}\int_a^b (b-s)^{n-1}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s + \int_a^b \sigma(s)\,\mathrm{d}s\Big]. \end{aligned}$$

令

$$\theta_w := \frac{(n-1)!}{M(b-a)^{n-1}}\Big[\phi(B)-\phi(A)-M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i \\ -\frac{M}{(n-1)!}\int_a^b (b-s)^{n-1}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s+\int_a^b\sigma(s)\,\mathrm{d}s\Big], \tag{2.7}$$

则 u 是边值问题 (L_σ), (1.2) 的解当且仅当

$$u(t)=\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+\frac{\theta_w}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^t(t-s)^{n-2}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s.$$

再把 (2.6) 的两端在 $[a,t]$ 上积分，得

$$w(t)=\phi(A)+M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}+M\theta_w\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ +\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s-\int_a^t\sigma(s)\,\mathrm{d}s.$$

兹定义映射 $T_\sigma : C(I)\to C(I)$ 如下： $\forall\, w\in C(I)$,

$$T_\sigma(w(t))=\phi(A)+M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}+M\theta_w\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ +\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s-\int_a^t\sigma(s)\,\mathrm{d}s,$$

则边值问题 (L_σ), (1.2) 有唯一解的充要条件是算子 T_σ 有唯一不动点.

第 2 步： T_σ 对于 $M\in(M^*,0)$ 以及每一个 $\sigma\in L^1(I)$ 是压缩的. 事实上，任取 $w_1,w_2\in C(I)$， θ_{w_i} $(i=1,2)$ 由 (2.7) 给定，对于每一个 $t\in I$ 有

$$\begin{aligned} T_\sigma(w_1(t))-T_\sigma(w_2(t)) =& M(\theta_{w_1}-\theta_{w_2})\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &+\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\big[\phi^{-1}(w_1(s))-\phi^{-1}(w_2(s))\big]\,\mathrm{d}s \\ =&-\frac{M(t-a)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}(n-1)!}\int_a^b(b-s)^{n-1}\big[\phi^{-1}(w_1(s))-\phi^{-1}(w_2(s))\big]\,\mathrm{d}s \\ &+\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\big[\phi^{-1}(w_1(s))-\phi^{-1}(w_2(s))\big]\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是由 (H_1^*) 和 (2.1), 有

$$|T_\sigma(w_1(t))-T_\sigma(w_2(t))|\le\Big|-\frac{M(t-a)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}(n-1)!}K\|w_1-w_2\|_\infty\int_a^b(b-s)^{n-1}\,\mathrm{d}s\Big| \\ +\Big|\frac{MK}{(n-1)!}\|w_1-w_2\|_\infty\int_a^t(t-s)^{n-1}\,\mathrm{d}s\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\le -\frac{2K(b-a)^n}{n!}M\|w_1-w_2\|_\infty \\
&=:\alpha\|w_1-w_2\|_\infty,
\end{aligned}
$$

从而

$$\|T_\sigma(w_1)-T_\sigma(w_2)\|_\infty \le \alpha\|w_1-w_2\|_\infty, \qquad 0<\alpha<1.$$

于是由压缩映射原理知， T_σ 有唯一不动点，即边值问题 (L_σ), (1.2) 有唯一解.

引理 2.2 假设条件 (H_1^*) 成立. 若 $M\in(M^*,0)$, 则对于每一个 $\sigma\in L^1(I)$, 边值问题 (L_σ), (2.1) 有唯一解.

证 与引理 2.1 的证明类似，边值问题 (L_σ), (2.1) 的解 u 满足：

$$u(t)=\sum_{i=0}^{n-2}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^t(t-s)^{n-2}\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s, \tag{2.8}$$

其中 v 是算子 $T_{1,\sigma}:C(I)\to C(I)$ 的不动点，而 $T_{1,\sigma}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
T_{1,\sigma}(v(t))=&\phi(B)-M\sum_{i=0}^{n-2}\frac{A_i}{(i+1)!}[(b-a)^{i+1}-(t-a)^{i+1}]\\
&+\int_t^b\sigma(s)\,\mathrm{d}s+\int_a^b G_1(t,s)\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{2.9}
$$

其中

$$G_1(t,s)=-\frac{M}{(n-1)!}\begin{cases}(b-s)^{n-1}, & a\le t\le s\le b,\\ (b-s)^{n-1}-(t-s)^{n-1}, & a\le s\le t\le b.\end{cases}$$

因此，边值问题 (L_σ), (2.1) 有唯一解当且仅当算子 $T_{1,\sigma}$ 有唯一不动点.

类似于引理 2.1 的证明，易证 $T_{1,\sigma}$ 对于 $M\in(M^*,0)$ 以及每一个 $\sigma\in L^1(I)$ 是压缩的，从而由压缩映射原理知， $T_{1,\sigma}$ 有唯一不动点，即边值问题 (L_σ), (2.1) 有唯一解.

引理 2.3 假设条件 (H_1^*) 成立. 若 $M\in(M^{**},0)$, 则对于每一个 $\sigma\in L^1(I)$, 边值问题 (L_σ), (2.2) 有唯一解.

证 令 $v(t)=\phi(u^{(n-1)}(t))$, 则边值问题 (L_σ), (1.2) 等价于下面两个定解问题

$$\begin{cases}u^{(n-1)}(t)=\phi^{-1}(v(t)), \qquad t\in I,\\ u^{(i)}(a)=A_i, \qquad i=0,1,\cdots,n-3, \quad u^{(n-2)}(b)=B_{n-2}\end{cases}\tag{2.10}$$

与

$$\begin{cases}-v'(t)+Mu(t)=\sigma(t), \quad \text{a.e. } t\in I,\\ v(a)=\phi(A).\end{cases}\tag{2.11}$$

设 $G_2(t,s)$ 是边值问题

$$\begin{cases}-u^{(n-1)}(t)=0, \qquad t\in I,\\ u^{(i)}(a)=0, \quad i=0,1,\cdots,n-3, \quad u^{(n-2)}(b)=0\end{cases}$$

的格林函数，则经计算得

$$G_2(t,s)=\begin{cases}(-1)^{n-3}\dfrac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}+\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1}(-1)^{i-1}\dfrac{(b-a)^{i-1}(t-a)^{n-1-i}}{(i-1)!(n-1-i)!}, & a\le s\le t\le b,\\ (b-s)\dfrac{(t-a)^{n-3}}{(n-3)!}, & a\le t\le s\le b.\end{cases}$$

于是边值问题 (2.10) 的解 $u(t)$ 为

$$u(t)=\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+\frac{B_{n-2}}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}-\int_a^b G_2(t,s)\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s.$$

把 $u(t)$ 的表达式代入初值问题 (2.11) 中的方程，得

$$v'(t)=M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+M\frac{B_{n-2}}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}-M\int_a^b G_2(t,s)\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s-\sigma(t).$$

将上式在 $[a,t]\subset[a,b]$ 上积分得

$$\begin{aligned}v(t)=&\phi(A)+M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}+M\frac{B_{n-2}}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}\\&-M\int_a^t\int_a^b G_2(\tau,s)\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau-\int_a^t\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}T_{2,\sigma}(v(t))=&\phi(A)+M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}+M\frac{B_{n-2}}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}\\&-M\int_a^t\int_a^b G_2(\tau,s)\phi^{-1}(v(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau-\int_a^t\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{2.12}$$

则边值问题 (L_σ), (2.2) 有唯一解当且仅当算子 $T_{2,\sigma}$ 有唯一不动点.

下面证明 $T_{2,\sigma}$ 对于 $M\in(M^*,0)$ 以及每一个 $\sigma\in L^1(I)$ 是压缩的. 事实上，$\forall\, v_1,v_2\in C(I)$ 以及 $\forall\, t\in I$ 有

$$T_{2,\sigma}(v_1(t))-T_{2,\sigma}(v_2(t))=-M\int_a^t\int_a^b G_2(\tau,s)\big[\phi^{-1}(v_1(s))-\phi^{-1}(v_2(s))\big]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.$$

而

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_a^b G_2(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\=&\int_a^b\int_a^t\Big[(-1)^{n-3}\frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{i=3}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{(b-a)^{i-1}(t-a)^{n-1-i}}{(i-1)!(n-1-i)!}\Big]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\&+\int_a^b\int_t^b(b-s)\frac{(t-a)^{n-3}}{(n-3)!}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_a^b\Big[-\frac{(t-a)(t-b)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{i=3}^{n-1}\frac{(a-b)^{i-1}(t-a)^{n-i}}{(i-1)!(n-1-i)!}\Big]\,\mathrm{d}t+\int_a^b\frac{(b-t)^2(t-a)^{n-3}}{2(n-3)!}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b\Big[-\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-2)!}+\frac{(b-a)(t-a)^{n-2}}{(n-3)!}+\frac{(b-t)^2(t-a)^{n-3}}{2(n-3)!}\Big]\,\mathrm{d}t\\
&=-\frac{(b-a)^n}{n(n-2)!}+\frac{(b-a)^n}{(n-1)(n-3)!}+\frac{(b-a)^n}{2n(n-3)!}-\frac{(b-a)^n}{(n-1)(n-3)!}+\frac{(b-a)^n}{2(n-2)!}\\
&=\frac{n^2-3n+2}{n!}(b-a)^n,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|T_{2,\sigma}(v_1(t))-T_{2,\sigma}(v_2(t))|&\le -M\int_a^b\int_a^b G_2(\tau,s)\big|\phi^{-1}(v_1(s))-\phi^{-1}(v_2(s))\big|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\\
&\le -MK\frac{n^2-3n+2}{n!}(b-a)^n\|v_1-v_2\|_\infty\\
&=:\alpha\|v_1-v_2\|_\infty,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|T_{2,\sigma}(v_1)-T_{2,\sigma}(v_2)\|_\infty\le\alpha\|v_1-v_2\|_\infty,\qquad \alpha\in(0,1).
$$

于是由压缩映射原理知， $T_{2,\sigma}$ 有唯一不动点，故边值问题 (L_σ), (2.2) 有唯一解.

下面对前面涉及到的边值问题给出一些反极大值原理.

引理 2.4 假设条件 (H_1^*) 成立，且 $M\in(M^*,0)$. 又设 $u_1,u_2\in C^{n-1}(I)$ 满足 $\phi(u_1^{(n-1)}),\phi(u_2^{(n-1)})\in AC(I)$ 以及

$$
\begin{aligned}
&-[\phi(u_1^{(n-1)}(t))]'+Mu_1(t)\ge-[\phi(u_2^{(n-1)}(t))]'+Mu_2(t),\quad \text{a.e. } t\in I,\\
&u_1^{(i)}(a)\ge u_2^{(i)}(a),\qquad i=0,1,\cdots,n-2,\quad u_1^{(n-1)}(b)\ge u_2^{(n-1)}(b),
\end{aligned}
$$

则

$$
u_1^{(i)}(t)\ge u_2^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-1.
$$

证 令

$$
\sigma_i(t)=-[\phi(u_i^{(n-1)}(t))]'+Mu_i(t),\qquad i=1,2,
$$

则 $\sigma_1,\sigma_2\in L^1(I)$ 且 $\sigma_1(t)\ge\sigma_2(t)$, a.e. $t\in I$. 记

$$
\begin{aligned}
&A_{1i}=u_1^{(i)}(a),\quad i=0,1,\cdots,n-2,\qquad B_1=u_1^{(n-1)}(b),\\
&A_{2i}=u_2^{(i)}(a),\quad i=0,1,\cdots,n-2,\qquad B_2=u_2^{(n-1)}(b),
\end{aligned}
$$

则 u_1 和 u_2 分别是方程 (L_{σ_1}) 和 (L_{σ_2}) 的解，并且满足边界条件

$$
\begin{aligned}
&u_1^{(i)}(a)=A_{1i}\ge A_{2i}=u_2^{(i)}(a),\qquad i=0,1,\cdots,n-2,\\
&u_1^{(n-1)}(b)=B_1\ge B_2=u_2^{(n-1)}(b).
\end{aligned}
$$

令 $w_1(t) = \phi(u_1^{(n-1)}(t))$ 以及 $w_2(t) = \phi(u_2^{(n-1)}(t))$, 则由引理 2.2, w_1,w_2 分别是由 (2.9) 所定义的算子 T_{1,σ_i}, $i = 1, 2$ 的唯一不动点．再令

$$\xi_0(t) := \int_t^b \sigma_1(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_t^b \sigma_2(s)\,\mathrm{d}s =: \zeta_0(t), \qquad t \in I,$$

则利用数学归纳法不难证明

$$\xi_{n+1} := T_{1,\sigma_1}(\xi_n) \geq T_{1,\sigma_2}(\zeta_n) =: \zeta_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

因为算子 T_{1,σ_i} $(i = 1, 2)$ 是压缩的，所以两个序列 $\{\xi_n\}$ 和 $\{\zeta_n\}$ 分别收敛于 w_1 和 w_2, 并且 $w_1(t) \geq w_2(t)$, $t \in I$, 即 $\phi(u_1^{(n-1)}(t)) \geq \phi(u_2^{(n-1)}(t))$, $t \in I$, 从而 $u_1^{(n-1)}(t) \geq u_2^{(n-1)}(t)$, $t \in I$. 而 $u_1^{(i)}(a) - u_2^{(i)}(a) \geq 0$, $i = 0, 1, \cdots, n-2$, 所以

$$u_1^{(i)}(t) \geq u_2^{(i)}(t), \qquad i = 0, 1, \cdots, n-2, \quad t \in I.$$

引理 2.5 　假设条件 (H_1^*) 成立，且 $M \in (M^{**}, 0)$. 又设 $u_1, u_2 \in C^{n-1}(I)$ 满足 $\phi(u_1^{(n-1)}), \phi(u_2^{(n-1)}) \in AC(I)$, 以及

$$\begin{aligned}
&-[\phi(u_1^{(n-1)}(t))]' + Mu_1(t) \geq -[\phi(u_2^{(n-1)}(t))]' + Mu_2(t), \quad \text{a.e. } t \in I,\\
&u_1^{(i)}(a) \geq u_2^{(i)}(a), \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3,\\
&u_1^{(n-1)}(a) \leq u_2^{(n-1)}(a), \qquad u_1^{(n-2)}(b) \geq u_2^{(n-2)}(b),
\end{aligned}$$

则

$$u_1^{(i)}(t) \geq u_2^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad u_1^{(n-1)}(t) \leq u_2^{(n-1)}(t), \quad t \in I.$$

证　令

$$\sigma_i(t) = -[\phi(u_i^{(n-1)}(t))]' + Mu_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

则 $\sigma_1, \sigma_2 \in L^1(I)$ 且 $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t)$, a.e. $t \in I$. 记

$$\begin{aligned}
A_{1i} &= u_1^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad A_1 = u_1^{(n-1)}(a), \quad B_{1,n-2} = u_1^{(n-2)}(b),\\
A_{2i} &= u_2^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad A_2 = u_2^{(n-1)}(a), \quad B_{2,n-2} = u_2^{(n-2)}(b),
\end{aligned}$$

则 u_1, u_2 分别为方程 (L_{σ_1}) 和 (L_{σ_2}) 的满足边界条件

$$\begin{aligned}
&u_1^{(i)}(a) = A_{1i} \geq A_{2i} = u_2^{(i)}(a), \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3,\\
&u_1^{(n-1)}(a) = A_1 \leq A_2 = u_2^{(n-1)}(a), \qquad u_1^{(n-2)}(b) = B_{1,n-2} \geq B_{2,n-2} = u_2^{(n-2)}(b)
\end{aligned}$$

的解．令 $v_1(t) = \phi(u_1^{(n-1)}(t))$, $v_2(t) = \phi(u_2^{(n-1)}(t))$, 则由引理 2.3, v_1, v_2 分别是在 (2.12) 中所定义的算子 T_{2,σ_1} 和 T_{2,σ_2} 的唯一不动点．再令

$$\xi_0(t) := -\int_a^t \sigma_1(s)\,\mathrm{d}s \leq -\int_a^t \sigma_2(s)\,\mathrm{d}s =: \zeta_0(t), \qquad t \in I,$$

则由数学归纳法不难证明

$$\xi_{n+1}=T_{2,\sigma_1}(\xi_n)\le T_{2,\sigma_2}(\zeta_n)=\zeta_{n+1},\qquad n=0,1,\cdots.$$

因为算子 T_{2,σ_i} $(i=1,2)$ 是压缩的，所以两个序列 $\{\xi_n\}$ 和 $\{\zeta_n\}$ 分别收敛于 v_1 和 v_2, 并且 $v_1(t)\le v_2(t),\ t\in I$, 即 $\phi(u_1^{(n-1)}(t))\le\phi(u_2^{(n-1)}(t)),\ t\in I$, 从而 $u_1^{(n-1)}(t)\le u_2^{(n-1)}(t),\ t\in I$. 而 $u_1^{(n-2)}(b)-u_2^{(n-2)}(b)\ge 0$, 所以 $u_1^{(n-2)}(t)-u_2^{(n-2)}(t)\ge 0,\ t\in I$. 又 $u_1^{(i)}(a)\ge u_2^{(i)}(a),\ i=0,1,\cdots,n-3,\ t\in I$, 所以

$$u_1^{(i)}(t)\ge u_2^{(i)}(t),\qquad i=0,1,\cdots,n-3,\ \ t\in I.$$

引理 2.6 假设条件 (H_1^*) 成立，且 $M\in(M^{**},0)$. 又设 $u_1,u_2\in C^{n-1}(I)$ 满足 $\phi(u_1^{(n-1)}),\phi(u_2^{(n-1)})\in AC(I)$, 以及

$$\begin{aligned}&-[\phi(u_1^{(n-1)}(t))]'+Mu_1(t)\ge-[\phi(u_2^{(n-1)}(t))]'+Mu_2(t),\qquad \text{a.e. } t\in I,\\&u_1^{(i)}(a)=u_2^{(i)}(a),\qquad i=0,1,\cdots,n-3, &(2.13)\\&u_1^{(n-1)}(a)\le u_2^{(n-1)}(a),\qquad u_1^{(n-1)}(b)\ge u_2^{(n-1)}(b), &(2.14)\end{aligned}$$

则

$$u_1^{(i)}(t)\le u_2^{(i)}(t),\qquad t\in I,\ \ i=0,1,\cdots,n-3.$$

证 先证 $u_1^{(n-3)}(t)\le u_2^{(n-3)}(t),\ t\in I$. 否则，存在 $t_0\in(a,b]$ 使得

$$u_1^{(n-3)}(t_0)>u_2^{(n-3)}(t_0). \tag{2.15}$$

下面分两种情况进行讨论：

情形 1 $u_1^{(n-2)}(a)\ge u_2^{(n-2)}(a)$. 此时由引理 2.4 有

$$u_1^{(i)}(t)\ge u_2^{(i)}(t),\qquad t\in I,\ \ i=0,1,\cdots,n-3.$$

由于

$$-[\phi(u_1^{(n-1)}(t))]'+Mu_1(t)\ge-[\phi(u_2^{(n-1)}(t))]'+Mu_2(t),\qquad \text{a.e. } t\in I,$$

所以

$$\int_a^b\big\{-[\phi(u_1^{(n-1)}(s))]'+[\phi(u_2^{(n-1)}(s))]'\big\}\,\mathrm{d}s\ge\int_a^b M[u_2(s)-u_1(s)]\,\mathrm{d}s.$$

于是由 (2.14), 有

$$\begin{aligned}0\ge&-\phi(u_1^{(n-1)}(b))+\phi(u_2^{(n-1)}(b))+\phi(u_1^{(n-1)}(a))-\phi(u_2^{(n-1)}(a))\\\ge& M\int_a^b[u_2(s)-u_1(s)]\,\mathrm{d}s\ge 0,\end{aligned}$$

从而 $u_1(t)=u_2(t),\ t\in I$, 进而 $u_1^{(n-3)}(t)=u_2^{(n-3)}(t),\ t\in I$, 这与 (2.15) 矛盾.

情形 2 $u_1^{(n-2)}(a) < u_2^{(n-2)}(a)$. 此时由 (2.15) 及 (2.13), 存在 $t_1 \in (a, t_0]$ 使得

$$u_1^{(n-3)}(t_1) = u_2^{(n-3)}(t_1),\ u_1^{(n-3)}(t) < u_2^{(n-3)}(t),\ t \in (a, t_1),\ u_1^{(n-2)}(t_1) \geq u_2^{(n-2)}(t_1).$$

于是，由 (2.13) 有

$$u_1^{(i)}(t_1) \leq u_2^{(i)}(t_1), \qquad i = 0, 1, \cdots, n-3.$$

在 $[a, t_1]$ 上应用引理 2.5 有

$$u_1^{(i)}(t) \geq u_2^{(i)}(t), \qquad t \in [a, t_1], \quad i = 0, 1, \cdots, n-3,$$

从而由 (2.13) 有 $u_1^{(n-2)}(a) \geq u_2^{(n-2)}(a)$, 矛盾.

综上， $u_1^{(n-3)}(t) \leq u_2^{(n-3)}(t),\ t \in I$. 再由 (2.14) 有

$$u_1^{(i)}(t) \leq u_2^{(i)}(t), \qquad t \in I, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3.$$

3　主要结果

本节将在逆序中给定一对上下解, 即下解大于上解前提下, 利用第二节所得到的反极大值原理, 把单调迭代方法推广到边值问题 (1.1), (1.2) 上去. 为此，先给出边值问题 (1.1), (1.2) 的下解与上解的定义.

定义 3.1 设函数 $\alpha \in C^{n-1}(I)$ 使得 $\phi(\alpha^{(n-1)}) \in AC(I)$. 称 α 是边值问题 (1.1), (1.2) 的下解，如果 α 满足

$$\begin{aligned} &-[\phi(\alpha^{(n-1)}(t))]' \leq f(t, \alpha(t)), \qquad \text{a.e. } t \in I, \\ &\alpha^{(i)}(a) = A_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad \alpha^{(n-1)}(a) \geq A, \quad \alpha^{(n-1)}(b) \leq B. \end{aligned}$$

定义 3.2 设函数 $\beta \in C^{n-1}(I)$ 使得 $\phi(\beta^{(n-1)}) \in AC(I)$. 称 β 是边值问题 (1.1),(1.2) 的上解，如果 β 满足

$$\begin{aligned} &-[\phi(\beta^{(n-1)}(t))]' \geq f(t, \beta(t)), \qquad \text{a.e. } t \in I, \\ &\beta^{(i)}(a) = A_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad \beta^{(n-1)}(a) \leq A, \quad \beta^{(n-1)}(b) \geq B. \end{aligned}$$

为了推广单调迭代方法，我们设 f 满足下面的单边 Lipschitz 条件:

(H_2) 存在 $M < 0$, 使得对于 a.e. $t \in I$, $f(t, x) + Mx$ 关于 x 在 $[\beta(t), \alpha(t)]$ 上非增.

现在我们记

$$[\beta, \alpha] = \{v \in C^{n-1}(I) : \beta(t) \leq v(t) \leq \alpha(t),\ t \in I\}.$$

由于 f 是 L^1-Carathéodory 函数，所以对 $R = \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\}$, 存在 $h_R \in L^1(I)$, 使得当 $|x| \leq R$ 时，对于 a.e. $t \in I$, 有

$$|f(t, x)| \leq h_R(t).$$

下面定义常数 $L := L(\alpha, \beta)$ 如下:

$$L = \max \left\{ \begin{array}{l} |A|,\ |B|,\ |\phi(A) - \|h_R\|_1|,\ |\phi(B) + \|h_R\|_1|, \\ |\phi^{-1}(\phi(A) + \|h_R\|_1)|,\ |\phi^{-1}(\phi(B) + \|h_R\|_1)|, \\ |\phi^{-1}(\phi(A) - \|h_R\|_1)|,\ |\phi^{-1}(\phi(B) - \|h_R\|_1)| \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

令 $K := K(\alpha, \beta)$ 是条件 (H_1) 中的 ϕ 在区间 $[-R, R]$ 上的 Lipschitz 常数. 定义 $\phi(x)$ 的修正函数 $\Phi(x)$ 如下:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(L) + K(x - L), & x > L; \\ \phi(x), & |x| \le L; \\ \phi(-L) + K(x + L), & x < -L, \end{cases} \tag{3.2}$$

则显然 Φ 对于给定的系数 K 满足条件 (H_1^*).

下面, 我们给出并证明边值问题 (1.1), (1.2) 的极值解的存在性.

定理 3.1 假设条件 (H_1) 成立, 条件 (H_2) 对于 $M \in (M^{**}, 0)$ 也成立, 其中 $M^{**} < 0$ 在 (2.3) 中已给定, 而 $K > 0$ 与 (3.2) 中的相同. 若边值问题 (1.1), (1.2) 存在一个下解 α 和一个上解 β 使得 $\alpha^{(i)}(t) \ge \beta^{(i)}(t)$, $t \in I$, $i = 0, 1, \cdots, n-3$. 则在 $[\beta, \alpha]$ 上存在非增序列 $\{\alpha_k\}$ 和非减序列 $\{\beta_k\}$ 按 $C^{n-3}[a, b]$ 中的范数分别收敛于边值问题 (1.1), (1.2) 的解 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$, 并且

$$\beta^{(i)}(t) \le u_{\min}^{(i)}(t) \le u_{\max}^{(i)}(t) \le \alpha^{(i)}(t), \qquad t \in I, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3,$$

这里, $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$ 是边值问题 (1.1),(1.2) 的极值解, 即边值问题 (1.1), (1.2) 的任意其它解 $u \in [\beta, \alpha]$ 都满足

$$u_{\min}^{(i)}(t) \le u^{(i)}(t) \le u_{\max}^{(i)}(t), \qquad t \in I, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3.$$

证 分 3 步来完成本定理的证明.

第 2 步, 构造两个单调迭代序列 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_k\}$. 为此, 任取 $\gamma \in [\beta, \alpha]$, 并考虑方程

$$-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]' + Mu(t) = f(t, \gamma(t)) + M\gamma(t), \qquad \text{a.e. } t \in I. \tag{E_γ}$$

因为 Φ 对于常数 K 满足 (H_1^*), 所以由 (2.3) 和引理 2.1 知, 边值问题 (E_γ), (1.2) 有唯一解 u_0. 于是由 (H_2) 和 (3.1) 有

$$-[\Phi(u_0^{(n-1)}(t))]' + Mu_0(t) \ge f(t, \alpha(t)) + M\alpha(t). \tag{3.3}$$

由于

$$-[\phi(\alpha^{(n-1)}(t))]' \le f(t, \alpha(t)), \qquad \text{a.e. } t \in I, \tag{3.4}$$

所以通过积分 (3.4) 不难得到

$$|\alpha^{(n-1)}(t)| \le \max\left\{|\phi^{-1}(\phi(A) - \|h_R\|_1)|, |\phi^{-1}(\phi(B) + \|h_R\|_1)|\right\} \le L.$$

于是由 (3.2), $\Phi(\alpha^{(n-1)}(t))=\phi(\alpha^{(n-1)}(t)),\ t\in I$, 从而由 (3.4), 有

$$-[\Phi(\alpha^{(n-1)}(t))]'\le f(t,\alpha(t)),\qquad \text{a.e.}\ \ t\in I.$$

故由 (3.3) 有

$$-[\Phi(u_0^{(n-1)}(t))]'+Mu_0(t)\ge -[\Phi(\alpha^{(n-1)}(t))]'+M\alpha(t),\quad \text{a.e. } t\in I.$$

再由边界条件得

$$\begin{aligned}&u_0^{(i)}(a)=A_i=\alpha^{(i)}(a),\qquad i=0,1,\cdots,n-3,\\&u_0^{(n-1)}(a)=A\le\alpha^{(n-1)}(a),\qquad u_0^{(n-1)}(b)=B\ge\alpha^{(n-1)}(b).\end{aligned}$$

于是由引理 2.6 有

$$u_0^{(i)}(t)\le\alpha^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

同理可证， $\beta^{(i)}(t)\le u_0^{(i)}(t),\ t\in I,\ i=0,1,\cdots,n-3$. 故有

$$\beta^{(i)}(t)\le u_0^{(i)}(t)\le\alpha^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

下面，再任取 $\gamma_1,\gamma_2\in[\beta,\alpha]$, 满足

$$\gamma_1^{(i)}(t)\le\gamma_2^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

设 u_1,u_2 分别是边值问题 $(E_{\gamma_1}),(1.2)$ 和 $(E_{\gamma_2}),(1.2)$ 的唯一解，则由 (H_2) 有

$$-[\Phi(u_1^{(n-1)}(t))]'+Mu_1(t)\ge -[\Phi(u_2^{(n-1)}(t))]'+Mu_2(t),\qquad \text{a.e.}\ \ t\in I.$$

于是由引理 2.6 有

$$u_1^{(i)}(t)\le u_2^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

由上述两条性质，可得非增序列 $\{\alpha_k\}$ 和非减序列 $\{\beta_k\}$, 其中 $\alpha_0=\alpha,\ \ \alpha_k$ 是边值问题 $(E_{\alpha_{k-1}}),(1.2)$ 的唯一解， $\beta_0=\beta,\ \beta_k$ 是边值问题 $(E_{\beta_{k-1}}),(1.2)$ 的唯一解.

第 2 步，证明 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_k\}$ 按 $C^{n-3}[a,b]$ 中的范数分别收敛于修正边值问题

$$-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]'=f(t,u(t)),\qquad \text{a.e.}\quad t\in I,\tag{3.5}$$

连同边界条件 (1.2) 的极大解和极小解.

由 α_k 的定义有

$$-[\Phi(\alpha_k^{(n-1)}(t))]'+M\alpha_k(t)=f(t,\alpha_{k-1}(t))+M\alpha_{k-1}(t),\qquad \text{a.e.}\quad t\in I.\tag{3.6}$$

通过积分上式，不难得到

$$\Phi^{-1}(K_1)\le\alpha_k^{(n-1)}(t)\le\Phi^{-1}(K_2),\qquad \forall\, t\in I,$$

其中 $K_1=\Phi(A)-\|h_R\|_1+M\|\alpha-\beta\|_1$, $K_2=\Phi(B)+\|h_R\|_1-M\|\alpha-\beta\|_1$, 从而

$$|\alpha_k^{(n-1)}(t)|\le\max\{|\Phi^{-1}(K_1)|,|\Phi^{-1}(K_2)|\},\qquad\forall\, t\in I.$$

于是 $\{\alpha_k^{(i)}(t)\}$ $(i=0,1,\cdots,n-2)$ 在 I 上一致有界, 等度连续. 同理 $\{\beta_k^{(i)}(t)\}$ $(i=0,1,\cdots,n-2)$ 在 I 上一致有界，等度连续．故由 Arzela-Ascoli 定理知，存在 $u_{\max},u_{\min}\in C^{n-2}(I)$, 使得在 I 上，对每一个 $i=0,1,\cdots,n-3$, 有

$$\alpha_k^{(i)}(t)\rightrightarrows u_{\max}^{(i)}(t)(k\to\infty),\qquad\beta_k^{(i)}(t)\rightrightarrows u_{\min}^{(i)}(t)(k\to\infty),$$

以及存在 $\{\alpha_{k_j}^{(n-2)}\}\subset\{\alpha_k^{(n-2)}\}$ 和 $\{\beta_{k_j}^{(n-2)}\}\subset\{\beta_k^{(n-2)}\}$, 使得在 I 上有

$$\alpha_{k_j}^{(n-2)}(t)\rightrightarrows u_{\max}^{(n-2)}(t)(j\to\infty),\qquad\beta_{k_j}^{(n-2)}(t)\rightrightarrows u_{\min}^{(n-2)}(t)(j\to\infty).$$

其次证明 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$ 是边值问题 (3.5),(1.2) 的解. 在 (3.6) 中, 令 $u_k(t)=\Phi(\alpha_k^{(n-1)}(t))$, 则 $\alpha_k^{(n-1)}(t)=\Phi^{-1}(u_k(t))$. 于是边值问题 (3.6), (1.2) 就等价于下面的两个定解问题

$$\begin{cases}\alpha_k^{(n-1)}(t)=\Phi^{-1}(u_k(t)), & t\in I,\\ \alpha_k^{(i)}(a)=A_i, & i=0,1,\cdots,n-3\end{cases}\tag{3.7}$$

与

$$\begin{cases}-u_k'(t)+M\alpha_k(t)=f(t,\alpha_{k-1}(t))+M\alpha_{k-1}(t), & \text{a.e. }\ t\in I,\\ u_k(a)=\Phi(A),\qquad u_k(b)=\Phi(B).\end{cases}\tag{3.8}$$

由 (3.8) 有

$$u_k(t)=\Phi(A)+\int_a^t\big[-f(\tau,\alpha_{k-1}(\tau))+M(\alpha_k(\tau)-\alpha_{k-1}(\tau))\big]\,\mathrm{d}\tau,\qquad t\in I,$$

从而由勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}u_k(t)=\Phi(A)-\int_a^t f(\tau,u_{\max}(\tau))\,\mathrm{d}\tau,\qquad t\in I.$$

设 $u_k(t)\to u^*(t)$ $(k\to\infty)$, $t\in I$, 则有

$$u^*(t)=\Phi(A)-\int_a^t f(\tau,u_{\max}(\tau))\,\mathrm{d}\tau,\qquad t\in I,$$

从而

$$\begin{cases}-u^{*\prime}(t)=f(t,u_{\max}(t)), & \text{a.e. }\ t\in I,\\ u^*(a)=\Phi(A),\qquad u^*(b)=\Phi(B).\end{cases}\tag{3.9}$$

由 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}\alpha_k(t)=&\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+\frac{\alpha_k^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}\\&+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^t(t-s)^{n-2}\Phi^{-1}(u_k(s))\,\mathrm{d}s,\qquad t\in I.\end{aligned}$$

在上式中，先将 k 换成 k_j, 然后令 $j\to\infty$ 得

$$\begin{aligned}u_{\max}(t)=&\sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i+\frac{u_{\max}^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}\\&+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^t(t-s)^{n-2}\Phi^{-1}(u^*(s))\,\mathrm{d}s,\qquad t\in I,\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}u_{\max}^{(n-1)}(t)=\Phi^{-1}(u^*(t)), & t\in I,\\ u_{\max}^{(i)}(a)=A_i, & i=0,1,\cdots,n-3.\end{cases}\tag{3.10}$$

由 (3.9) 和 (3.10) 可得

$$\begin{cases}-[\Phi(u_{\max}^{(n-1)}(t))]'=f(t,u_{\max}(t)), & \text{a.e. }\ t\in I,\\ u_{\max}^{(i)}(a)=A_i, & i=0,1,\cdots,n-3,\\ u_{\max}^{(n-1)}(a)=A, & u_{\max}^{(n-1)}(b)=B.\end{cases}$$

故 $u_{\max}$ 是边值问题 (3.5),(1.2) 的解. 同理可证 $u_{\min}$ 也是边值问题 (3.5),(1.2) 的解.

再其次证明 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$ 是边值问题 (3.5),(1.2) 的极大解和极小解. 为此, 设 $u\in[\beta,\alpha]$ 是边值问题 (3.5), (1.2) 的任意一个解，则

$$\beta_0(t)\le u(t)\le\alpha_0(t),\qquad t\in I.$$

下证对每一个 $k=0,1,\cdots,$ 有

$$\beta_k^{(i)}(t)\le u^{(i)}(t)\le\alpha_k^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

先证， $u^{(i)}(t)\le\alpha_0^{(i)}(t),\ t\in I,\ i=1,2,\cdots,n-3.$ 事实上，由于

$$\begin{cases}-[\Phi(\alpha_0^{(n-1)}(t))]'\le f(t,\alpha_0(t)), & \text{a.e. }\ t\in I,\\ \alpha_0^{(i)}(a)=A_i, & i=0,1,\cdots,n-3,\\ \alpha_0^{(n-1)}(a)\ge A, & \alpha_0^{(n-1)}(b)\le B,\end{cases}$$

所以

$$-[\Phi(\alpha_0^{(n-1)}(t))]'+M\alpha_0(t)\le-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]'+Mu(t),\qquad \text{a.e. }\ t\in I,$$

并且

$$\begin{cases}\alpha_0^{(i)}(a)=A_i=u^{(i)}(a), & i=0,1,\cdots,n-3,\\ \alpha_0^{(n-1)}(a)\ge A=u^{(n-1)}(a), & \alpha_0^{(n-1)}(b)\le B=u^{(n-1)}(b).\end{cases}$$

于是由引理 2.6 有

$$u^{(i)}(t)\le\alpha_0^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=1,2,\cdots,n-3.$$

利用数学归纳法不难证明，对每一个 $k=0,1,\cdots,$ 有

$$u^{(i)}(t)\le\alpha_k^{(i)}(t),\qquad t\in I,\quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

同理可证，对每一个 $k=0,1,\cdots$, 有

$$\beta_k^{(i)}(t) \le u^{(i)}(t), \qquad t\in I, \quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

于是对每一个 $k=0,1,\cdots$, 有

$$\beta_k^{(i)}(t) \le u^{(i)}(t) \le \alpha_k^{(i)}(t), \qquad t\in I, \quad i=0,1,\cdots,n-3.$$

故

$$u_{\min}^{(i)}(t) \le u^{(i)}(t) \le u_{\max}^{(i)}(t), \qquad t\in I, \quad i=0,1,\cdots,n-3,$$

即 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$ 分别是边值问题 (3.5), (1.2) 的极大解和极小解.

第 3 步，证明 $u\in[\beta,\alpha]$ 为边值问题 (3.5),(1.2) 的解当且仅当 $u\in[\beta,\alpha]$ 为边值问题 (1.1), (1.2) 的解. 事实上，设 $u(t)$ 为边值问题 (3.5),(1.2) 的解，则

$$-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]' = f(t,u(t)), \qquad \text{a.e. } t\in I,$$

从而

$$-\int_a^t [\Phi(u^{(n-1)}(\tau))]'\,\mathrm{d}\tau = \int_a^t f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad \forall\, t\in I,$$

进而

$$\Phi(u^{(n-1)}(t)) \ge \Phi(A) - \|h_R\|_1 = \phi(A) - \|h_R\|_1, \qquad \forall\, t\in I.$$

于是

$$u^{(n-1)}(t) \ge \Phi^{-1}(\phi(A) - \|h_R\|_1) = \phi^{-1}(\phi(A) - \|h_R\|_1), \qquad \forall\, t\in I.$$

同理可证， $u^{(n-1)}(t) \le \phi^{-1}(\phi(B)+\|h_R\|_1)$, $\forall\, t\in I$. 于是,

$$\phi^{-1}(\phi(A) - \|h_R\|_1) \le u^{(n-1)}(t) \le \phi^{-1}(\phi(B)+\|h_R\|_1), \qquad \forall\, t\in I.$$

故由 L 的定义， $|u^{(n-1)}(t)|\le L$, $t\in I$, 从而 $u(t)$ 为边值问题 (1.1),(1.2) 的解. 同理可证, 若 $u(t)$ 为边值问题 (1.1),(1.2) 的解，则 $u(t)$ 为边值问题 (3.5),(1.2) 的解.

最后，我们用一个较弱的条件:

(H_2^*) 存在 $M<0$, 使得对于 a.e. $t\in I$ 以及 $x\in[\beta(t),\alpha(t)]$ 有

$$f(t,\beta(t)) + M\beta(t) \ge f(t,x) + Mx \ge f(t,\alpha(t)) + M\alpha(t)$$

来代替条件 (H_2), 并利用 Leray-Schauder 连续性定理来证明边值问题 (1.1), (1.2) 在逆序中给定一对上下解的情况下至少存在一个解.

定理 3.2 假设条件 (H_1) 成立，条件 (H_2^*) 对于 $M\in(M^{**},0)$ 成立，其中 $M^{**}<0$ 在 (2.10) 中已给定，而 $K>0$ 与 (3.2) 中的相同. 若边值问题 (1.1), (1.2) 存在下解 α 和上解 β, 满足

$$\alpha^{(i)}(t) \ge \beta^{(i)}(t), \qquad t\in I, \quad i=0,1,\cdots,n-3,$$

则边值问题 (1.1),(1.2) 在 $[\beta,\alpha]$ 上至少有一个解 u, 满足

$$\beta^{(i)}(t) \le u^{(i)}(t) \le \alpha^{(i)}(t), \qquad t \in I, \quad i = 0,1,\cdots,n-3.$$

证 令

$$p(t,x) := \max\big\{\beta(t), \min\{x, \alpha(t)\}\big\}, \qquad \forall\,(t,x) \in I \times \mathbb{R}.$$

定义函数

$$g(t,x) := f(t, p(t,x)) + Mp(t,x), \qquad \forall\,(t,x) \in I \times \mathbb{R},$$

则当 $(t,x) \in D = I \times \mathbb{R}$ 时,

$$\begin{aligned}|g(t,x)| \le& |f(t,p(t,x))| + |Mp(t,x)| \\ \le& h_R(t) + |M| \max_{(t,x)\in D} |p(t,x)| =: H(t).\end{aligned}$$

于是 g 是一个 L^1-Carathéodory 函数. 考虑方程

$$-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]' + Mu(t) = g(t,u(t)), \qquad \text{a.e.} \;\; t \in I. \tag{3.11}$$

因为对于常数 K, Φ 满足条件 (H_1^*), 根据引理 2.1 的证明过程可知, u 是边值问题 (3.11),(1.2) 的解当且仅当 $\Phi(u^{(n-1)})$ 是算子 $T: C(I) \to C(I)$ 的不动点，这里 T 的定义如下：

$$\begin{aligned}(Tw)(t) =& \Phi(A) + M\sum_{i=0}^{n-3} \frac{A_i}{(i+1)!}(t-a)^{i+1} + M\tau_w \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &+ \frac{M}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s - \int_a^t \sigma_w(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tau_w =& \frac{(n-1)!}{M(b-a)^{n-1}}\Big[\Phi(B) - \Phi(A) - M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i \\ &- \frac{M}{(n-1)!}\int_a^b (b-s)^{n-1}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s + \int_a^b \sigma_w(s)\,\mathrm{d}s\Big], \\ \sigma_w(t) =& f(t, p(t,(Jw)(t))) + Mp(t,(Jw)(t)), \\ (Jw)(t) =& \sum_{i=0}^{n-3}\frac{A_i}{i!}(t-a)^i + \frac{\tau_w}{(n-2)!}(t-a)^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t (t-s)^{n-2}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 $\beta(t) \le p(t,(Jw)(t)) \le \alpha(t)$, $t \in I$, 所以

$$|p(t,(Jw)(t))| \le \max\{|\beta(t)|, |\alpha(t)|\} \le \max\{\|\beta\|_\infty, \|\alpha\|_\infty\} =: R.$$

于是

$$|\sigma_w(t)| \le |f(t,p(t,(Jw)(t)))| + |Mp(t,(Jw)(t))| \le h_R(t) + |MR|.$$

而由 (H_1^*), 对每一个 $t\in I$ 有

$$\begin{aligned}
|(Tw)(t)| =&\Big|\Phi(A)+M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(t-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i+M\tau_w\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&+\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s-\int_a^t\sigma_w(s)\,\mathrm{d}s\Big|\\
\le&|\Phi(A)|+\Big|M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(t-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i\Big|\\
&+\Big|M\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{M(b-a)^{n-1}}\Big[\Phi(B)-\Phi(A)-M\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}A_i\\
&-\frac{M}{(n-1)!}\int_a^b(b-s)^{n-1}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s+\int_a^b\sigma_w(s)\,\mathrm{d}s\Big]\Big|\\
&+\Big|\frac{M}{(n-1)!}\int_a^t(t-s)^{n-1}\Phi^{-1}(w(s))\,\mathrm{d}s\Big|+\Big|\int_a^t\sigma_w(s)\,\mathrm{d}s\Big|\\
\le&2|\Phi(A)|+|\Phi(B)|+2|M|\sum_{i=0}^{n-3}\frac{(b-a)^{i+1}}{(i+1)!}|A_i|\\
&+\frac{2|M|(b-a)^n}{n!}K\|w\|_\infty+2\|h_R\|_1+2|MR|(b-a)\\
=:&K_1+\frac{2|M|(b-a)^n}{n!}K\|w\|_\infty.
\end{aligned}$$

于是

$$\|Tw\|_\infty\le K_1+\frac{2|M|(b-a)^n}{n!}K\|w\|_\infty.$$

而 $\frac{2K|M|(b-a)^n}{n!}<1$, 所以方程 $w=\lambda Tw,\lambda\in(0,1)$ 存在不依赖于 $\lambda\in(0,1)$ 的先验界. 因为 T 是全连续算子, 所以由 Leray-Schauder 连续性定理, 算子 T 至少有一个不动点 $u=u(t)$, 并且此不动点就是边值问题 (3.11),(1.2) 的解.

另外, 由 g 的定义和 (H_2^*), 边值问题 (3.11),(1.2) 的每一个解 $u=u(t)$ 都满足

$$-[\Phi(u^{(n-1)}(t))]'+Mu(t)=g(t,u(t))\ge-[\Phi(\alpha^{(n-1)}(t))]'+M\alpha(t).$$

于是由引理 2.6, 有

$$u^{(i)}(t)\le\alpha^{(i)}(t),\qquad t\in I,\qquad i=0,1,\cdots,n-3.$$

同理可证,

$$\beta^{(i)}(t)\le u^{(i)}(t),\qquad t\in I,\qquad i=0,1,\cdots,n-3.$$

于是 $p(t,u(t))=u(t),\ t\in I$. 故

$$-\big[\Phi(u^{(n-1)}(t))\big]'=f(t,u(t)),\qquad \text{a.e.}\ \ t\in I.$$

又由定理 3.1 的证明过程知 $|u^{(n-1)}(t)|\le L,\ t\in I$, 故

$$-[\phi(u^{(n-1)}(t))]'=f(t,u(t)),\qquad \text{a.e.}\ \ t\in I.$$

综上，定理结论成立.

参 考 文 献

[1] Agarwal R P. Boundary Value Problems for Higher Order Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1986

[2] Seda V, Nieto J J, Gera M. Periodic Boundary Value Problems for Nonlinear Higher order Ordinary Differential Equations. *Appl. Math. Comp.*, 1992, 48: 71–82

[3] 王伟，史希福. 三阶常微分方程两点边值问题解的存在性及单调迭代法. 数学学报, 1992, 35: 214–219 (Wang W, Shi X F. Existence of Solutions and Monotone Iterative Method for Third-order Ordinary Differential Equation Two-point Boundary Value Problems. *Acta Mathematica Sinica*, 1992, 35: 214–219)

[4] Ma R Y, Zhang J H, Fu S M. The Method of Lower and Upper Solutions for Fourth-order Two-point Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, 215: 415–422

[5] Yao Q L. Monotone Iterative Technique and Positive Solutions of Lidstone Boundary Value Problems. *Appl. Math. Comp.*, 2002, 131: 477–485

[6] Jiang D Q, Gao W J, Wan A Y. A Monotone Method for Constructing Extremal Solutions to Fourth-order Periodic Boundary Value Problems. *Appl. Math. Comp.*, 2002, 132: 411–421

[7] Cabada A, Grossinho M R, Minhós F. Extremal Solutions for Third-order Nonlinear Problems with Upper and Lower Solutions in Reversed Order. *Nonlinear Anal.*, 2005, 62: 1109–1121

[8] Bai Z B, Huang B J, Ge W G. The Iterative Solutions for Some Fourth-order p-Laplacian Equation Boundary Value Problems. *Appl. Math. Lett.*, 2006, 19: 8–14

[9] 茹静，裴明鹤. 高阶微分积分方程的单调迭代法及其应用. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25: 302–309 (Ru J, Pei M H. Monotone Iterative Technique and its Application for Higher Order Integral-differential Equations. *Pure and Applied Mathematics*, 2009, 25: 302–309)

[10] Ladde G S, Lakshmikantham V, Vatsala A S. Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1985

Extremal Solutions for a Higher Order Two Point Boundary Value Problem with p-Laplacian-like Operator

MIAO Lijun

(*School of Mathematics, Beihua University, Jilin* 132013)

(*School of Mathematics, Baicheng Normal College, Baicheng* 137000)

PEI Minghe

(*School of Mathematics, Beihua University, Jilin* 132013)

(*E-mail: peiminghe@163.com*)

Abstract In this paper, we will consider the existence of extremal solutions for a nth-order differential equation with p-Laplacian-like operator

$$-[\phi(u^{(n-1)}(t))]' = f(t, u(t)), \qquad \text{a.e.} \ \ t \in [a, b]$$

subject to the following two-point boundary conditions

$$u^{(i)}(a) = A_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-3, \qquad u^{(n-1)}(a) = A, \quad u^{(n-1)}(b) = B,$$

where $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ is an increasing homeomorphism, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is L^1-Carathéodory function, and $A, B, A_i, B_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \cdots, n-3$. The existence result of extremal solutions for the problem is obtained via monotone iterative techniques which are based on anti-maximum principles.

Key words boundary value problem; p-Laplacian-like operator; monotone iterative technique; extremal solution

MR(2000) Subject Classification 34B10; 34B15

Chinese Library Classification O175.8