非线性互补约束均衡问题的一个滤子 SQP 算法 *

张家昕
(安徽科技学院理学院，凤阳 233100)
(E-mail: zjx5506@sina.com)
段复建
(桂林电子科技大学数学与计算科学学院，桂林 541004)

摘　要　提出了一个求解非线性互补约束均衡问题的滤子 SQP 算法．借助 Fischer-Burmeister 函数把均衡约束转化为一个非光滑方程组，然后利用逐步逼近和分裂思想，给出一个与原问题近似的一般的约束优化．引入滤子思想，避免了罚函数法在选择罚因子上的困难．在适当的条件下证明了算法的全局收敛性，部分的数值结果表明算法是有效的．

关键词　均衡问题；SQP 算法；滤子；逐步逼近；全局收敛

MR(2000) 主题分类　90C30; 65K05

中图分类　O221

1　引言

本文考虑如下带非线性互补约束的均衡问题 (MPEC)

$$\begin{aligned} \min\quad & f(x,y) \\ \text{s.t.}\quad & g(x,y) \ge 0, \\ & F(x,y) = w, \\ & 0 \le w \perp y \ge 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $f: R^{n+m} \to R,\ g: R^{n+m} \to R^l,\ F: R^{n+m} \to R^m$ 二阶连续可微，$0 \le w \perp y \ge 0$ 表示向量 $w, y \in R^m$ 正交，$g(x,y) \ge 0$ 称为上层约束，$0 \le w \perp y \ge 0$ 称为下层约束或均

本文 2010 年 10 月 17 日收到．2011 年 3 月 29 日收到修改稿．
* 国家自然科学基金 (10861005), 广西区自然科学基金 (0991238) 和安徽省教育厅自然科学基金 (KJ2010B300) 资助项目.

衡约束.

由于均衡约束的存在, 与经典的非线性优化不同, MPEC 问题的可行域非常复杂. 对于该类优化问题, 在可行点处即使较弱的 MFCQ 也不一定成立, 从而一些经典的非线性优化算法一般不能直接应用于求解此类问题. 但是该类问题在工程设计、经济等领域有着广泛的应用, 因此研究它的求解方法就具有十分重要的意义.

近年来, 一些学者对 MPEC 问题的求解提出一些方法 (见 [1–5] 及其中的参考文献), 但是还存在很多尚未解决的问题, 如光滑性、收敛性和收敛速度等. 在 [6] 中, 朱志斌, 简金宝等利用 Fischer-Burmeister 函数和逐步逼近思想, 给出了一个与 MPEC 问题等价的优化模型, 进一步提出一个求解等价模型的 SQP 算法. 为了证明算法的全局收敛性, 文中引入了一个 l_1 精确罚函数. 而我们知道, 对于罚函数法来说, 选择适当的罚参数是很困难的. 为了避免罚参数的选取, 2002 年 Fletcher 和 Leyffer 在 [7] 中提出了滤子概念. 滤子方法是一种无罚参数法, 这种方法是通过比较约束违反度函数值和目标函数值来决定试探步是否被接受. 一个新的试探点被滤子接受, 当且仅当约束违反度函数值或目标函数值和滤子中相应的函数值相比有充分的下降. 近年来, 由于滤子方法良好的数值效果 [7], 对它的讨论越来越多. 本文利用 [6] 的思想, 通过引入滤子技巧, 提出了一个求解 MPEC 问题的滤子 SQP 算法. 与 [1,2] 不同, 我们提出的算法在理论上保证了当算法有限终止时, 当前迭代点即为 MPEC 问题的 (1) 的一个精确解.

2 预备知识

记 MPEC 问题的可行集为

$$\Sigma=\big\{z=(x,y):\, g(z)\geq 0,\ 0\leq F(z)\perp y\geq 0\big\},$$

且简记

$$X=\big\{z:g(z)\geq 0\big\},\quad L_1=\{1,\cdots,l\},\quad L_2=\{1,\cdots,m\},\quad I(z)=\{j\in L_1:g(z)=0\}.$$

对 $\forall\, z=(x,y)$, 将指标集 $L_2=\{1,\cdots,m\}$ 分解为下面三个互不相交的子集:

$$\alpha(z)=\big\{1\leq i\leq m:F_i<y_i\big\},\ \beta(z)=\big\{1\leq i\leq m:F_i=y_i\big\},\ \gamma(z)=\big\{1\leq i\leq m:F_i>y_i\big\},$$

且在 z 点定义指标集 $A(z)$ 如下

$$A(z)=\big\{(J,K):J\supseteq\alpha(z),\ K\supseteq\gamma(z),\ J\cup K=\{1,\cdots,m\},\ J\cap K=\emptyset\big\}.$$

定义 2.1 称点 $z^*=(x^*,y^*)\in\Sigma$ 是 MPEC 问题 (1) 的一个 S- 稳定点, 如果

$\forall\,(J,K)\in A(z^*)$, 存在 KKT 乘子 $\xi^*\in R^l$, $\eta^*\in R^m$, $\pi^*\in R^m$, 使得

$$\begin{aligned}
&\nabla f(z^*)-\nabla g(z^*)\xi^*-\nabla F(z^*)\eta^*-\begin{pmatrix}0_{n\times m}\\ I_{m\times m}\end{pmatrix}\pi^*=0,\\
&F_i(z)=0,\qquad 0\le y_i^*\perp\pi^*\ge 0,\qquad \forall\, i\in J,\\
&0\le F_i(z^*)\perp\eta^*\ge 0,\qquad y_i^*=0,\quad \forall\, i\in K,\\
&0\le g_i(z^*)\perp\xi^*\ge 0.
\end{aligned}\tag{2}$$

定义 2.2 称问题 MPEC (1) 在点 $z=(x,y)\in R^{n+m}$ 处满足下层非退化条件，如果 $y_i\neq F_i(z)$, $\forall\, i=1,\cdots,m$.

我们利用 F-B 函数 $\phi(a,b)=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ 把问题 (1) 转化为下列与之近似的光滑优化问题

$$\begin{aligned}
\min\quad & f(x,y)\\
\text{s.t.}\quad & g(x,y)\ge 0,\\
& F(x,y)-w=0,\\
& \phi_\varepsilon(y,w)=0,
\end{aligned}\tag{3}$$

其中

$$\phi(y,w)=\phi_\varepsilon(y,w)+\psi_\varepsilon(y,w),\tag{4}$$

$$\phi(y,w)=\begin{pmatrix}\phi(y_1,w_1)\\ \vdots\\ \phi(y_m,w_m)\end{pmatrix},\quad \phi_\varepsilon(y,w)=\begin{pmatrix}\phi_\varepsilon(y_1,w_1)\\ \vdots\\ \phi_\varepsilon(y_m,w_m)\end{pmatrix},\quad \psi_\varepsilon(y,w)=\begin{pmatrix}\psi_\varepsilon(y_1,w_1)\\ \vdots\\ \psi_\varepsilon(y_m,w_m)\end{pmatrix}.$$

且对于 $\varepsilon>0$ 和指标集 $E=\left\{j\in L\middle|\sqrt{y_j^2+w_j^2}<\varepsilon\right\}$, 定义

$$\phi_\varepsilon(y_j,w_j)=\begin{cases}\phi(y_j,w_j), & j\in L\backslash E(z,\varepsilon),\\ \dfrac{2\varepsilon-y_j}{2\varepsilon}y_j+\dfrac{2\varepsilon-w_j}{2\varepsilon}w_j-\dfrac{\varepsilon}{2}, & j\in E(z,\varepsilon),\end{cases}$$

$$\psi_\varepsilon(y_j,w_j)=\begin{cases}0, & j\in L\backslash E(z,\varepsilon),\\ \dfrac{\left(\sqrt{y_j^2+w_j^2}-\varepsilon\right)^2}{2\varepsilon}, & j\in E(z,\varepsilon),\end{cases}$$

显然，函数 $\phi_\varepsilon(y,w)$ 处处连续可微，且

$$\nabla_a\phi_\varepsilon(y_j,w_j)=\begin{cases}1-\dfrac{y_j}{\sqrt{y_j^2+w_j^2}}, & j\in L\backslash E(z,\varepsilon),\\ 1-\dfrac{y_j}{\varepsilon}, & j\in E(z,\varepsilon),\end{cases}$$

$$\nabla_b\phi_\varepsilon(y_j,w_j)=\begin{cases}1-\dfrac{w_j}{\sqrt{y_j^2+w_j^2}}, & j\in L\backslash E(z,\varepsilon),\\ 1-\dfrac{w_j}{\varepsilon}, & j\in E(z,\varepsilon),\end{cases}$$

$\phi_\varepsilon(y,w)$ 是一光滑函数，容易验证 [5]

$$\nabla_a\phi_\varepsilon^2(y_j,w_j)+\nabla_b\phi_\varepsilon^2(y_j,w_j)\ge 3-2\sqrt{2}>0,\qquad j=1,\cdots,m.$$

显然,如果 $s^*=(x^*,y^*,w^*)$ 是问题 (3) 的 KKT 点,则存在 KKT 乘子向量 $(\lambda_g,\lambda_F,\lambda_\phi)\in R^{n+2m}$ 使得

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}\nabla f(x^*,y^*)\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\nabla g(x^*,y^*)\\0\end{pmatrix}\lambda_g+\begin{pmatrix}\nabla F(x^*,y^*)\\-I\end{pmatrix}\lambda_F+\begin{pmatrix}0\\\nabla\phi(x^*,y^*)\end{pmatrix}\lambda_\phi=0,\\ 0\le g(x^*,y^*)\perp\lambda_g\ge 0,\qquad F(x^*,y^*)-w^*=0,\qquad \phi_\varepsilon(y^*,w^*)=0\end{gathered}\tag{5}$$

成立.

下面引理表明 MPEC 问题 (1) 与问题 (2) 的解之间的联系，为算法提供了理论依据.

引理 2.1[6] 假设总是 MPEC 问题 (1) 在点 $(x^*,y^*)\in F$ 满足下层非退化条件且 $\phi(y^*,w^*)=\phi_\varepsilon(y^*,w^*)$, 则如下两结论总是等价的

(1) (x^*,y^*) 是 MPEC 问题 (1) 的一个 $S-$ 稳定点;

(2) (x^*,y^*,w^*) 问题 (3) 的一个 KKT 点，其中 $w^*=F(x^*,y^*)$.

3 滤子 SQP 算法

根据引理 2.1, 我们首先考虑求解问题 (3)

$$\begin{aligned}\min\ & f(x,y)\\ \text{s.t. }& g(x,y)\ge 0,\\ & F(x,y)-w=0,\\ & \phi_\varepsilon(y,w)=0.\end{aligned}$$

令

$$H(z,w)=\begin{pmatrix}F(x,y)-w\\\phi_\varepsilon(y,w)\end{pmatrix},$$

则问题 (3) 变成如下形式

$$\begin{aligned}\min\ & f(x,y)\\ \text{s.t. }& g(x,y)\ge 0,\\ & H(z,w)=0.\end{aligned}\tag{6}$$

滤子 SQP 是求解问题 (6) 的一种有效的方法，为此下面我们引入滤子思想. 在点 $z^l=(x^l,y^l)$, 定义

$$\begin{aligned}f^l&:=f(z^l),\\ h^l&:=h(z^l,w^l):=\|g(z^l)^-\|+|H(z^l,w^l)|,\end{aligned}$$

其中 $g(z^l)^- = \min(0, g(z^l))$.

定义 3.1 数对 (f^k, h^k) 控制另一数对 (f^l, h^l) 当且仅当 $f^k \le f^l$ 和 $h^k \le h^l$ 都成立.

定义 3.2 滤子是一列不能相互控制的数对，如果一个点不被滤子中的任何一点控制，则该点可以被滤子接受.

定义 3.3 记 $\digamma_k = \{l | l < k$ 且 (f^k, h^k) 在第 k 个滤子中 $\}$, 点 $s = (x, y, w)$ 被滤子接受当且仅当对所有的 $l \in \digamma_k$ 有

$$h(s) \le \beta h^l, \qquad \beta \in (0,1), \tag{7}$$

$$or f^l - f(z) \ge \gamma h(s), \qquad \gamma \in (0,1), \tag{8}$$

成立.

在滤子方法中，一个点被滤子接受当且仅当它不被当前迭代点和当前滤子中其它迭代点控制. 如果将它加入到滤子当中，必须同时将滤子中那些被该数对控制的数对移走.

设当前迭代点为 $s^k = (x^k, y^k, w^k)$, 可以通过求解子问题

$$\begin{aligned}
&\min\ \nabla f(x^k,y^k)^T \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix}^T B_k \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix} \\
&\text{s.t.}\ \ g(x^k,y^k) + \nabla g(x^k,y^k)^T \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \ge 0, \\
&\quad \begin{pmatrix} \nabla F_x(x^k,y^k)^T & \nabla F_y(x^k,y^k)^T & -I \\ 0 & D_a^k & D_b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{\varepsilon_k}(y^k, w^k), \end{pmatrix} \\
&\quad \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix} \right\| \le \rho_k,
\end{aligned} \tag{9}$$

得到方向 $d^k = (dx^k, dy^k, dw^k)$, 其中 $D_a^k = \mathrm{diag}\left(\partial_{y_j}\phi_\varepsilon(y_j^k, w_j^k)\right)$, $D_b^k = \mathrm{diag}\left(\partial_{w_j}\phi_\varepsilon(y_j^k, w_j^k)\right)$.

令

$$\triangle f^k = f(z^k) - f(z^k + dz^k) \tag{10}$$

表示函数 $f(z^k)$ 的真实下降量,

$$\triangle q^k = -\nabla f(z^k)^T dz^k - \frac{1}{2} d^{kT} B_k d^k \tag{11}$$

表示函数 $f(z^k)$ 的预估下降量，则函数 $f(z^k)$ 的充分下降条件为 $\sigma_k = \frac{\triangle f^k}{\triangle q^k} \ge \sigma$, 其中 $\triangle q^k > 0, 0 < \sigma < 1$.

算法 A

步骤 0 给出 $s^0, B_0, \overline{\rho} > \rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 \ge 0$, $0 < \gamma < \beta < 1$, $0 < \sigma < 1$. 初始化滤子 $(\mu, -\infty)$, 置 $k := 0$.

步骤 1 计算子问题 (9) 得到 d^k 及相应的 KKT 乘子 $\lambda^k=(\lambda_g^k,\lambda_F^k,\lambda_\phi^k)$.

步骤 2 如果 $d^k=0$, $E(z^k,\varepsilon_k)=\emptyset$, 则停；如果 $d^k=0$, $E(z^k,\varepsilon_k)\neq\emptyset$, 令 $s^{k+1}:=s^k, B_{k+1}:=B_k, \varepsilon_{k+1}:=\frac{\varepsilon}{2}$, 转步骤 1.

步骤 3 如果 s^k+d^k 不被滤子 $F_k\cup(f^k,h^k)$ 接受，令 $\rho=\frac{\rho}{2}$, 转步骤 1.

步骤 4 如果 s^k+d^k 被滤子 $F_k\cup(f^k,h^k)$ 接受：

(1) 如果 $\triangle q^k>0$ 且 $\sigma_k<\sigma$, 令 $\rho=\frac{\rho}{2}$, 转步骤 1.

(2) 如果 $\triangle q^k>0$ 且 $\sigma_k\geq\sigma$, 令 $\rho=2\rho$, 转步骤 5.

(3) 如果 $\triangle q^k\leq 0$, 将它加入滤子，转步骤 5.

步骤 5 由 BFGS 公式更新 $B_k, s^{k+1}=s^k+d^k$, $k:=k+1$, 转步骤 1.

4 收敛性分析

这一节我们将给出算法 A 的收敛性分析，在此之前先做如下假设：

A1 序列 $\{s^k\}$ 有界，且对于任意可行点，向量组 $\{\nabla g_j(x,y),\ j\in I(x,y)\}$ 线性无关.

A2 存在常数 $0<a<b$, 使得对于任意的 B_k, 满足 $a\|d^k\|^2\leq d^{kT}B_kd^k\leq b\|d^k\|^2$.

A3 序列 $\{s^k\}$ 在极限点 s^* 处满足下层非退化条件.

A4 序列 $\{s^k\}$ 在极限点 s^* 处，子矩阵 $(\nabla F_y(x,y))_{\alpha^*\alpha^*}$ 是非奇异的，其中 $\alpha^*=\{j: w_j^*=F_j(x^*,y^*)=0\}$.

类似于 [10] 中的引理 3.3, 下面结论成立.

引理 4.1 假设 (d^k,λ^k) 是子问题 (9) 的 KKT 对. 如果 $d^k=0$, 则或者 z^k 是问题 (1) 的一个 S- 稳定点，或者 $d^{k+1}\neq 0$.

为了说明算法是有效的，我们用下面三个引理说明算法内层迭代是有限步终止的.

引理 4.2 内层迭代步骤 1- 步骤 2- 步骤 1 在有限步内终止.

引理 4.3 内层迭代步骤 1- 步骤 2- 步骤 3- 步骤 1 在有限步内终止，即迭代步 s^k+d^k 最终会被滤子接受.

证 由 Taylor 展开式有

$$g(z^k+dz^k)=g(z^k)+\nabla g(z^k)^Tdz^k+\frac{1}{2}dz^{kT}\nabla^2g(\theta^k)dz^k\geq-\rho^2b,$$

其中 θ^k 为连接 z^k 与 z^k+dz^k 所得线段上的某一点. 故存在 $M>0$ 使下式成立

$$h(s^k+d^k)=\|g(z^k+dz^k)\|+\|H(s^k+d^k)\|\leq\rho^2M,$$

所以只要 $\rho\leq\sqrt{\frac{\beta h^k}{M}}$, 就有 $h(s^k+d^k)\leq\beta h^k$. 由算法 A 及滤子的接受条件，迭代点 s^k+d^k 最终会被滤子接受.

引理 4.4 内层迭代步骤 1- 步骤 2- 步骤 4- 步骤 1 在有限步内终止.

证 利用反证法. 假设结论不真，则由算法 A 知，存在子序列 $\{k\}\subset K$ (K 为无穷序列), 使得 $\rho_k\to 0$ ($k\in K$, $k\to\infty$) 且成立

$$\frac{\triangle f^k}{\triangle q^k}<\sigma,\qquad k=1,2,\cdots. \tag{12}$$

由 Taylor 展开式得

$$|\triangle f^k - \triangle q^k| = o(\|d^k\|^2) = o(\rho_k^2).$$

又对于 $\forall\,\alpha \in (0,1)$, $\exists\, N > 0$ 使

$$\begin{aligned}\triangle q^k =& -\nabla f(z^k)^T dz^k - \frac{1}{2} d^{kT} B_k d^k \\ \geq& -\nabla f(z^k)^T \frac{-\alpha\rho_k \nabla f(z^k)}{\|\nabla f(z^k)\|} - \frac{1}{2}\alpha^2 \nabla f(z^k)^T B_k \nabla f(z^k) \frac{\rho_k^2}{\|\nabla f(z^k)\|^2} \\ \geq& \alpha\rho_k \|\nabla f(z^k)\| - \frac{1}{2}\alpha^2 \nabla f(z^k)^T B_k \nabla f(z^k) \frac{\rho_k^2}{\|\nabla f(z^k)\|^2} \\ \geq& \max\Big(\alpha\rho_k \|\nabla f(z^k)\| - \frac{1}{2}\alpha^2 \rho_k^2 N\Big) \\ \geq& \frac{1}{2}\|\nabla f(z^k)\| \min\Big\{\rho_K, \frac{\|\nabla f(z^k)\|}{N}\Big\}.\end{aligned}$$

成立，故有

$$|\sigma_k - 1| = \frac{|\triangle f^k - \triangle q^k|}{|\triangle q^k|} \longrightarrow 0,$$

即当 ρ_k 充分小时， $\sigma_k \geq \sigma$ 一定成立，这与 (12) 是矛盾的．故结论成立.

由上述引理可知，当算法有限终止于 z^k 时， z^k 为 MPEC 问题 (1) 的 S- 稳定点. 下面考虑算法产生无穷序列 $\{z^k,\ k \in K\}$ 的一些性质，具体可参见 [2].

引理 4.5 假设 $\{z^k,\ k \in K\} \to z^*,\ k \to \infty$, 则下面结论成立：

(1) 存在常数 $p > 0$, 使得

$$\left\|\begin{pmatrix} \nabla_y F(x^k, y^k)^T & -I \\ D_a^k & D_b^k \end{pmatrix}\right\| \leq p.$$

(2) 序列 $\{d^k,\ k \in K\}$, $\{\lambda^k,\ k \in K\}$ 都有界.

(3) 存在一个正整数 k_1, 当 $k > k_1$ 时，使得 $\varepsilon_k = \varepsilon_{k_1} = \varepsilon$ 成立.

下面我们总假设 $\rho_k \equiv \rho$, $\varepsilon_k \equiv \varepsilon$. 当 k 充分大时, 由引理 4.5 知 $\phi(y^k, w^k) \equiv \phi_\varepsilon(y^k, w^k)$ 且或 $d^k = 0$, 或 $d^k \neq 0$.

根据假设 A1, A2 及引理 4.5, 我们不妨假设存在无限子集 K, 使得

$$x^k \to x^*, \quad y^k \to y^*, \quad w^k \to w^*, \quad d^k \to d^*, \quad \lambda^k \to \lambda^*, \qquad k \in K.$$

定理 4.1 如果假设 A1–A4 成立，则算法或有限终止于 MPEC 问题 (1) 的 S- 稳定点，或产生一无限点列且其任意聚点都是 MPEC 问题 (1) 的 S- 稳定点.

证 仅需对第二种情况给出证明．因为内层迭代次数是有限的，所以外层迭代是无限的．由假设 A1 知必有聚点 z^*, 不妨设 $\lim\limits_{k\in K,\, k\to+\infty} z^k = z^*$, 其中 K 是无限集．又由 [8, 引理 1] 知, 任何聚点都是可行点. 假设 z^* 不是 KKT 点, 令 $K_1 = \{k \in K \mid \nabla f(z^k)^T dz^k > -\frac{1}{2} d^{kT} B_k d^k\} \subset K$, 由算法知会出现下面两种情形：

(1) K_1 是一无限集. 如果 $\lim\limits_{k\in K_1,\ k\to\infty}\|d^k\|=0$, 则容易得出 z^* 为 KKT 点，这与假设是矛盾的. 故存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\forall\, k\in K_1$, 有 $\|d^k\|>\varepsilon$.

由 $h^k\to 0$ 知 $\exists\, k_0$, $\forall\, k>k_0$ $(k\in K_1)$ 有

$$h(s^k)\le \frac{a\epsilon^2}{2M}\le \frac{a\|d^k\|^2}{2M}\le \frac{d^{kT}B_kd^k}{2M}. \tag{13}$$

又由 (9) 的 KKT 条件有

$$\begin{pmatrix}\nabla f(x^k,y^k)\\ 0\end{pmatrix}+B_kd^k-\begin{pmatrix}\nabla g(x^k,y^k)\\ 0\end{pmatrix}\lambda_g^k+\begin{pmatrix}\nabla F(x^k,y^k)\\ -I\end{pmatrix}\lambda_F^k+\begin{pmatrix}0\\ D_a^k\\ D_b^k\end{pmatrix}\lambda_\phi^k=0,$$

$$\begin{aligned}
&\nabla f(z^k)^Tdz^k+d^{kT}B_kd^k+\lambda_F^k(\nabla F(z^k)^Tdz^k-dw^k)\\
&+\lambda_\phi^{kT}(D_a^kdy^k+D_b^kdw^k)-\lambda_g^k\nabla g(z^k)dz^k=0,\\
&\nabla f(z^k)^Tdz^k+d^{kT}B_kd^k-\lambda_\phi^{kT}\phi_\varepsilon(y^k,w^k)=-\lambda_g^k\ g(z^k)\le 0,\\
&\nabla f(z^k)^Tdz^k\le -d^{kT}B_kd^k+\lambda_\phi^{kT}\phi_\varepsilon(y^k,w^k),
\end{aligned}$$

结合 (13) 有

$$\nabla f(z^k)^Tdz^k\le -d^{kT}B_kd^k+Mh(s^k)\le -\frac{1}{2}d^{kT}B_kd^k,$$

这与上面的 K_1 的定义是矛盾的.

(2) K_1 是一有限集. 这意味着当 k 充分大时有 $\nabla f(z^k)^Tdz^k\le -\frac{1}{2}d^{kT}B_kd^k$ 成立，所以

$$\triangle f^k=-\nabla f(z^k)^Tdz^k+o(\|d^k\|^2)\ge \frac{1}{2}d^{kT}B_kd^k\ge \frac{a}{2}\|d^k\|^2,$$

因为 f 有下界，我们有

$$\infty>\sum_{k_0+1}^{\infty}(f(z^k)-f(z^k+dz^k))\ge \sum_{k_0+1}^{\infty}\frac{a}{2}\|d^k\|^2.$$

这明显与假设 $\|d^k\|\ge\varepsilon$ 相矛盾.

综合 (1) 和 (2) 两种情形，我们能得出定理结论成立.

5 数值试验

在以下的数值试验中，算例来自于 [5], 参数取为 $\varepsilon_0=1$, $\beta=0.98$, $\gamma=0.02$, $\rho_0=10$, $\sigma=0.25$, $\mu=\max\{1000h(s),1000\}$, B_0 取单位阵 I.

例 1

$$\begin{aligned}
\min\quad & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}xy-95x\\
\text{s.t.}\quad & 0\le x\le 200,\\
& 0\le(2y+0.5x-100)\perp y\ge 0.
\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2-150x+y^2-2000y \\ \text{s.t.} \quad & x+2y-5000\le 0, \\ & x^2+y^2-4000000\le 0, \\ & 0\le (x+y+1075)\perp y\ge 0. \end{aligned}$$

表 1 算法 A 的数值结果

NO.	(x^0,y^0)	NIT	NG	FV
1	$(0,0)$	10	$(93.3333333333334, 26.6666666666667)$	-3266.6666666666667
2	$(30,400)$	12	$(75, 1.01810053428891e-013)$	-5625.0000000002

其中 NO. 表示问题的编号， (x^0,y^0) 表示初始点， NIT 表示迭代的次数， NG 表示本文最优解， FV 表示本文最优值. 数值结果表明本文的算法是有效的.

参 考 文 献

[1] Jiang H Y, Ralph D. Smooth SQP Method for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints. *SIAM Journal of Optimization*, 2000, 10: 779–808

[2] Fukushima M, Luo Z Q, Pang J S. A Global Convergent Sequential Quadratic Programming Algorithm for Mathematical Programs with Linear Complementarity Constraints. *Computational Optimization and Application*, 1998, 10: 5–34

[3] Ma C F, Liang G P. A New Successive Approxinmation Damped Newton Method for Nonlinear Complementarity Problems. *Journal of Mathematics Research and Exposition*, 2003, 23: 1–6

[4] Jiang H Y, Fukushima M, Qi L Q, Sun D F. A Trust Region Method for Solving Generalized Complementarity Problems. *SIAM Journal of Optimization*, 1998, 8: 140–157

[5] 简金宝，覃义，梁玉梅. 非线性互补约束规划的一个广义强次可行方向算法. 高等学校计算数学学报, 2007, 29: 15–27
(Jian J B, Qin Y,Liang Y M. A Generalized Strongly Sub-feasible Algorithm for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2007, 29: 15–27)

[6] Zhu Z B, Jian J B, Zhong C. An SQP Algorithm for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints . *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 30(5): 659–668

[7] Fletcher R, Leyffer S. Nonlinear Programming without a Penalty Function. *Math. Programming*, 2002, 91: 239–269

[8] Fletcher R, Leyffer S, Toint P L. On the Global Convergence of a Filter-SQP Algorithm. *SIAM Journal of Optimization*, 2002, 13(1): 44–59

[9] 谭玲，段复建，范林. 非线性互补约束问题的一个全局收敛的 SQP 算法. 应用数学学报, 2009, 32(1): 37–49

(Tan L, Duan F J, Fan L. A Globally Convergent SQP Algorithm for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2009, 32(1): 37–49)

[10] Zhu Z B, Zhang K C. A Super Linearly Convergent SQP Algorithm for Mathematical Programs with Linear Complementarity Constraints. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 172: 222–244

A SQP-filter Algorithm for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints

ZHANG Jiaxin

(*School of Science, Anhui Science and Technology University, Fengyang* 233100)

(*E-mail: zjx5506@sina.com*)

DUAN Fujian

(*School of Mathematics and Computational Science,*

Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004)

Abstract In this paper, a new method of SQP-filter for mathematical programs with nonlinear complementarity constraints is proposed. By means of F-B function, the nonlinear complementarity constraints condition is transformed into a nonsmooth equations, and then the constrained optimization problem similar to the original problem is given by the use of successive approximation and decomposition. The difficulty of choosing the penalty parameter associated with use of penalty functions can be avoided by introducing a new concept of "filter". Under suitable conditions, the global convergence is proved. The limited numerical test shows its efficiency.

Key words MPEC; SQP algorithm; filter;successive; global convergence

MR(2000) Subject Classification 90C30; 65K05

Chinese Library Classification O221