第 35 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 35 No. 1
2012 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2012

双营养物的非均匀 Chemostat 模型解的性质 *

王利娟

(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

(宝鸡文理学院数学系，宝鸡 721013)

吴建华

(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

(E-mail: jianhuaw@snnu.edu.cn)

姜洪领

(宝鸡文理学院数学系，宝鸡 721013)

摘 要 本文讨论双营养物的非均匀 Chemostat 模型解的性质. 通过运用极值原理，上下解方法以及分歧理论得到了正平衡解的存在性，运用稳定性理论证明了正平衡解的稳定性.

关键词 恒化器；分歧；稳定性

MR(2000) 主题分类 35K57

中图分类 O175.26

1 引言

Chemostat 又称为恒化器，是一个用于连续培养微生物的实验装置. 利用恒化器培养单种或多种微生物种群已是研究微生物学中的一项重要手段，它已广泛的应用于研究微生物的种群增长和相互作用规律，也应用于生态系统的管理，预测和环境污染的控制. 对 Chemostat 模型更详细的介绍参看 [1].

对只有一种营养物的 Chemostat 模型，已经有很多学者作了研究，主要是利用极值原理、分歧理论分析解的存在性、稳定性等 [2−4]. [5] 讨论了一类质粒载体微生物和

本文 2009 年 4 月 15 日收到.

* 国家自然科学基金 (10971124), 教育部高等学校博士点基金项目 (200807180004) 以及宝鸡文理学院重点项目 (ZK10116).

质粒自由微生物 (plasmid-bearing and plasmid-free organisms) 之间竞争的 Chemostat 模型，得到了平衡态正解的存在性和稳定性. [6] 研究了带有抑制剂的 Chemostat 模型，得到了系统解的稳定性和渐近行为，讨论了抑制剂对解的稳定性和渐近行为的影响. 在此基础上，[7] 讨论了在有抑制剂的情况下，系统存在正解时，两物种最大生长率的取值范围. 然而，双营养物的无搅拌 Chemostat 模型更具有现实意义 [2]. [8] 研究了具有两种营养物的非均匀恒化器竞争模型平衡态解的存在性及其解的一些性质.

在非均匀情况下，令 $S(x,t), R(x,t)$ 表示在时刻 t 营养物的浓度，$u(x,t)$ 表示在时刻 t 微生物的浓度. 通过无量纲代换，模型可用下列反应扩散方程组表示

$$\begin{aligned}
&S_t = d_0 S_{xx} - muf(S,R)\\
&R_t = d_1 R_{xx} - nug(S,R), \qquad\qquad 0<x<1,\quad t>0 \qquad (1.1)\\
&u_t = d_2 u_{xx} + u(mf(S,R) + cng(S,R) - k),
\end{aligned}$$

边界条件为

$$\begin{aligned}
&S_x(0,t) = -1, \qquad S_x(1,t) + \gamma_0 S(1,t) = 0,\\
&R_x(0,t) = -1, \qquad R_x(1,t) + \gamma_1 R(1,t) = 0, \qquad (1.2)\\
&u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = 0.
\end{aligned}$$

初始条件为

$$S(x,0) = S_0(x) \geq 0, \qquad R(x,0) = R_0(x) \geq 0, \qquad u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ \not\equiv 0, \qquad (1.3)$$

其中

$$f(S,R) = \frac{S}{1+aS+bR}, \qquad g(S,R) = \frac{R}{1+aS+bR}.$$

它是 Michaelis-Menten 函数的一个推广. d_0, d_1, d_2 分别是营养物 S, R 和微生物 u 的扩散系数，$k \geq 0$ 是微生物 u 的死亡率.

[9] 运用极值原理，上下解方法以及分歧理论讨论了系统 (1.1)–(1.3) 在扩散系数相等且忽略微生物死亡率的情况下正平衡解的存在性，得到了系统正解存在的充分条件. 本文讨论扩散系数不相等且微生物具有死亡率的情形，即 (1.1)–(1.3), 这种情况能更好地描述实际问题. 在第 3 部分讨论 (1.1)–(1.3) 的平衡态系统，运用局部分歧定理讨论其正解的存在性，用全局分歧理论证明其解的全局性. 第 4 部分利用稳定性理论讨论其分歧解的局部稳定性.

2 预备知识

令 $C^1[0,1]$ 表示通常的 Banach 空间，其范数记为 $\|\cdot\|$.

$$\begin{aligned}
&C^1_{B_i}[0,1] = \{u \in C^1[0,1]:\ u_x(0) = 0,\ u_x(1) + \gamma_i u(1) = 0\}, \qquad i = 0,1,2,\\
&X = C^1_{B_0}[0,1] \times C^1_{B_1}[0,1] \times C^1_{B_2}[0,1].
\end{aligned}$$

下面阐述将要用到的几个引理.

引理 2.1[10] 令 X, Y 是 Banach 空间， U 是 $R\times X$ 的一个开子集， $f\in C^2(U,Y)$. 假设对于任意的 $\lambda\in R$, 方程 $f(\lambda,u)=0$ 满足 $f(\lambda,0)=0$. 记

$$L_0=D_uf(\lambda_0,0),\qquad L_1=D_\lambda D_uf(\lambda_0,0).$$

若下列条件成立：

(i) $N(L_0)$ 是由 u_0 张成的一维空间，即 $N(L_0)=\mathrm{span}\,\{u_0\}$;

(ii) $R(L_0)$ 的余维是 1, 即 $\mathrm{codim}R(L_0)=\dim(Y/R(L_0))=1$;

(iii) $L_1u_0\notin R(L_0)$,

则存在一个正常数 δ 和一个 C^1 曲线 $(\lambda,\varphi):(-\delta,\delta)\to R\times Z$, 使得 $\lambda(0)=\lambda_0,\ \varphi(0)=0$, 对 $|\ s\ |<\delta$, 有 $f(\lambda(s),s(u_0+\varphi(s)))=0$, 而且存在 $(\lambda_0,0)$ 的一个邻域，使得 f 的任一零点或者在曲线上，或者具有形式 $(\lambda,0)$. 这里 Z 是 X 的一个闭子集，满足 $X=\mathrm{span}\,\{u_0\}\bigoplus Z$ (即任意的 $x\in X$ 能惟一的写成 $x=\alpha u_0+z,\ \alpha\in R,\ z\in Z$).

引理 2.2[10] 若引理 2.1 中的假设成立，设 $X\subset Y$, 包含映射 $i:X\to Y$ 是连续的，且 0 是 L_0 的 i- 单重特征值，对应的特征函数为 u_0, 则存在分别定义在 λ_0 及 0 的某邻域上的函数

$$\lambda\to(\gamma(\lambda),\nu(\lambda)),\qquad s\to(\eta(s),\omega(s)),$$

使得

$$\begin{aligned}&(\gamma(\lambda_0),\qquad \nu(\lambda_0))=(0,u_0)=(\eta(0),\omega(0)),\\&\nu(\lambda)-u_0\in Z,\omega(s)-u_0\in Z,\end{aligned}$$

在这两个邻域上分别有

$$D_uf(\lambda,0)\nu(\lambda)=\gamma(\lambda)\nu(\lambda),\qquad D_uf(\lambda(s),u(s))\omega(s)=\eta(s)\omega(s).$$

并且 $\gamma'(\lambda_0)\neq 0$. 当 $|s|\ll 1$ 时，若 $\eta(s)\neq 0$, 则

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\lambda'(s)\gamma'(\lambda_0)}{\eta(s)}=-1.$$

由引理 2.2 可知，分歧解 $u(s)$ 的稳定性由 $\eta(s)$ 的符号决定．当 $\eta(s)<0$ 时分歧解稳定，当 $\eta(s)>0$ 时分歧解不稳定．而 $\eta(s)$ 与 $s\lambda'(s)\gamma'(\lambda_0)$ 的符号相反，因此可以通过判断 $s\lambda'(s)\gamma'(\lambda_0)$ 的符号来判断分歧解的稳定性.

令 $T:R\times X\to X$ 是一个紧的连续可微算子，且满足 $T(b,0)=0$. 假设

$$T(b,u)=K(b)u+R(b,u),\tag{2.1}$$

其中 $K(b)$ 为线性紧算子，并且 $R_u(b,0)=0$. 我们将 b 看作分歧参数讨论方程 $u=T(b,u)$ 的分歧解.

假设 x_0 是算子 T 的一个孤立不动点, 定义 T 在 x_0 点处的指标为 $i(T,x_0)=\deg(I-T,B,x_0)$, 这里 B 是以 x_0 为球心的一个球, 且 x_0 是 T 在 B 中的惟一不动点. 如果 x_0 是算子 T 的不动点, 且 $I-T'(x_0)$ 可逆, 那么 x_0 是 T 的孤立不动点且

$$i(T,x_0)=\deg(I-T,B,x_0)=\deg(I-T'(x_0),\widehat{B},0),$$

其中 $\widehat{B}$ 是以 0 为球心的一个球. 若在方程 (2.1) 中 $x_0=0$, 则 Leray-Schauder 度 $\deg(I-K(b),\widehat{B},0)=(-1)^p$, 其中 p 是算子 $K(b)$ 中所有大于 1 的特征值的代数重数之和. 所以 T 的指数可以通过计算 $K(b)$ 的特征值得到.

引理 2.3[11] 若对于某个 $\varepsilon>0$, b_0 满足当 $0<|b-b_0|<\varepsilon$ 时 $I-K(b)$ 可逆. 假如 $i(T(b,\cdot),0)$ 在 $(b_0-\varepsilon,b_0)$ 和 $(b_0,b_0+\varepsilon)$ 上为常数, 且当 $b_0-\varepsilon<b_1<b_0<b_2<b_0+\varepsilon$ 时 $i(T(b_1,\cdot),0)\neq i(T(b_2,\cdot),0)$, 则方程 $u=T(b,u)$ 在 (b,u) 平面内存在一个连通分支 C, 使得下面二者之一成立:

(i) C 连接点 $(b_0,0)$ 到 $(\widehat{b},0)$, 其中 $I-K(\widehat{b})$ 不可逆;

(ii) C 从点 $(b_0,0)$ 出发, 在 $R\times X$ 中伸向无穷.

3 正解的存在性

本节讨论下述 (1.1)–(1.3) 的平衡态系统正解的存在性

$$\begin{aligned}&d_0S_{xx}-muf(S,R)=0,\\&d_1R_{xx}-nug(S,R)=0,\qquad 0<x<1,\\&d_2u_{xx}+u(mf(S,R)+cng(S,R)-k)=0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

边界条件为

$$\begin{aligned}&S_x(0)=-1,\qquad S_x(1)+\gamma_0S(1)=0,\\&R_x(0)=-1,\qquad R_x(1)+\gamma_1R(1)=0,\\&u_x(0)=0,\qquad u_x(1)+\gamma_2u(1)=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

当 $u=0$ 时, $S(x),R(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&S_{xx}=0,\qquad R_{xx}=0,\qquad 0<x<1,\\&S_x(0)=-1,\qquad S_x(1)+\gamma_0S(1)=0,\\&R_x(0)=-1,\qquad R_x(1)+\gamma_1R(1)=0,\end{aligned}$$

易知上述方程存在惟一解 $S^*(x)=\frac{1+\gamma_0}{\gamma_0}-x$, $R^*(x)=\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}-x$, $x\in[0,1]$.

由椭圆型方程极值原理易知下述引理.

引理 3.1 若方程组 (3.1), (3.2) 有非负解 $(S(x),R(x),u(x))$, 且 $u(x)\not\equiv0$, 则 $0<S(x)<S^*(x)$, $0<R(x)<R^*(x)$, 且 k 有界, 即存在 $M=mf(S^*(0),0)+cng(R^*(0),0)>0$, 使得 $k<M$.

考察下述方程

$$
\begin{aligned}
&z_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 1,\\
&z_x(0) = -d_0 - cd_1,\\
&z_x(1) + \gamma z(1) = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma = \min\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$, 易知 $z(x) = (d_0 + cd_1)\left(\frac{1+\gamma}{\gamma} - x\right)$.

引理 3.2 若方程组 (3.1), (3.2) 有非负解 $(S(x), R(x), u(x))$, 且 $u(x) \not\equiv 0$, 则 $d_0S(x) + cd_1R(x) + d_2u(x) \le z(x),\ x \in [0,1]$.

证　由 (3.1), (3.2) 可得

$$
\begin{aligned}
&-(d_0S + cd_1R + d_2u)_{xx} = -uk \le 0, \qquad 0 < x < 1,\\
&(d_0S + cd_1R + d_2u)_x(0) = -d_0 - cd_1,\\
&(d_0S + cd_1R + d_2u)_x(1) + \gamma(d_0S + cd_1R + d_2u)(1) \le 0,
\end{aligned}
$$

故利用椭圆型方程极值原理可得结论成立.

令 $u_0(x) = S^*(x) - S(x),\ u_1(x) = R^*(x) - R(x),\ u_2(x) = u(x)$, 于是方程组 (3.1), (3.2) 可变换为如下形式

$$
\begin{aligned}
&-d_0u_{0xx} = mu_2f(S^* - u_0, R^* - u_1),\\
&-d_1u_{1xx} = nu_2g(S^* - u_0, R^* - u_1), \qquad 0 < x < 1,\\
&-d_2u_{2xx} = u_2(mf(S^* - u_0, R^* - u_1) + cng\,(S^* - u_0, R^* - u_1) - k),
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

边界条件为

$$
u_{ix}(0) = 0, \qquad u_{ix}(1) + \gamma_iu_i(1) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{3.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(S^* - u_0, R^* - u_1) &= \frac{S^* - u_0}{1 + a(S^* - u_0) + b(R^* - u_1)},\\
g(S^* - u_0, R^* - u_1) &= \frac{R^* - u_1}{1 + a(S^* - u_0) + b(R^* - u_1)}.
\end{aligned}
$$

平衡态问题 (3.1), (3.2) 正解的性质转化为讨论 (3.3), (3.4) 的正解.

对任意固定的 m, n, c, 将 k 作为分歧参数，通过局部分歧和全局分歧理论来讨论 (3.3), (3.4) 正解的存在性.

令 λ^* 是特征值问题

$$
\begin{aligned}
&d_2\eta_{xx} + (mf(S^*, R^*) + cng\,(S^*, R^*))\eta = \lambda\eta, \qquad 0 < x < 1,\\
&\eta_x(0) = 0, \qquad \eta_x(1) + \gamma_2\eta(1) = 0
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

的主特征值，对应的主特征函数为 $\eta_1(x) > 0$, 且 $\| \eta_1(x) \| = 1$.

令 $\widehat{\mu}$ 是下述特征值问题的主特征值

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+\mu\big(f(S^*,R^*)+g(S^*,R^*)\big)\eta=0,\qquad 0<x<1,\\&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0,\end{aligned}$$

若 $\min\{m,cn\}>\widehat{\mu}d_2$, 则 $\lambda^*>0$.

定义

$$\begin{aligned}&T(k,u_0,u_1,u_2)\\=&\big(mK_0u_2f(S^*-u_0,R^*-u_1),nK_1u_2g(S^*-u_0,R^*-u_1),K_2u_2(mf(S^*-u_0,R^*-u_1)\\&+cng\,(S^*-u_0,R^*-u_1)-k)\big),\end{aligned}$$

其中 K_i 是 $-d_i\frac{d^2}{dx^2}$ 在 $C^1_{B_i}$ 的逆算子, $\quad i=0,1,2.$

记 $G(k,u_0,u_1,u_2)=(u_0,u_1,u_2)-T(k,u_0,u_1,u_2)$, 则 $G(k,u_0,u_1,u_2)=0$ 的非负解对应于方程组 (3.3), (3.4) 的非负解. 易见 G 是 C^1 函数且 $G(k,0,0,0)=0$.

定理 3.3 设 $\min\{m,cn\}>\widehat{\mu}d_2$, 则 $(\lambda^*,0,0,0)$ 是方程组 (3.3), (3.4) 的一个分歧点, 且在 $(\lambda^*,0,0,0)$ 的某个邻域内该方程组存在正解.

证 令 $L(\lambda^*,0,0,0)=D_{(u_0,u_1,u_2)}G(\lambda^*,0,0,0)$, 则由 $L(\lambda^*,0,0,0)(\omega,\chi,\eta)^T=0$ 可知

$$\begin{aligned}&d_0\omega_{xx}+mf(S^*,R^*)\eta=0,\\&d_1\chi_{xx}+ng(S^*,R^*)\eta=0,\qquad 0<x<1,\\&d_2\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-\lambda^*)\eta=0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

边界条件

$$\begin{aligned}&\omega_x(0)=0,\qquad \omega_x(1)+\gamma_0\omega(1)=0,\\&\chi_x(0)=0,\qquad \chi_x(1)+\gamma_1\chi(1)=0,\\&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由 (3.5) 知 $\eta=\eta_1,\ \omega=\omega_1=K_0(mf(S^*,R^*)\eta_1),\ \chi=\chi_1=K_1(ng(S^*,R^*)\eta_1)$. 因此

$$N(L(\lambda^*,0,0,0))=\mathrm{span}\,\{U_0\},\qquad U_0=(\omega_1,\chi_1,\eta_1)^T.$$

$L(\lambda^*,0,0,0)$ 的伴随算子为 $L^*(\lambda^*,0,0,0)$, 则由 $L^*(\lambda^*,0,0,0)(\omega,\chi,\eta)^T=0$ 得

$$N(L^*(\lambda^*,0,0,0))=\mathrm{span}\,\{U^*\},\qquad U^*=(0,0,\eta_1)^T.$$

由 Fredholm 选择公理可知

$$R(L(\lambda^*,0,0,0))=\Big\{(\omega,\chi,\eta)^T\in X:\int_0^1\eta\eta_1\,\mathrm{d}x=0\Big\}.$$

所以

$$\mathrm{codim}\,R(L(\lambda^*,0,0,0))=\dim N(L^*(\lambda^*,0,0,0))=1.$$

令 $L_1(\lambda^*,0,0,0)=D_kD_{(u_0,u_1,u_2)}G(\lambda^*,0,0,0)$, 则

$$L_1(\lambda^*,0,0,0))(\omega_1,\chi_1,\eta_1)^T=(0,0,K_2\eta_1)^T.$$

显然 $L_1(\lambda^*,0,0,0)(\omega_1,\chi_1,\eta_1)^T\notin R\big(L(\lambda^*,0,0,0)\big)$.

由引理 2.1 可知, 存在 $\delta>0$ 及一个 C^1 函数 $(k(s),\phi(s),\psi(s),\theta(s)):(-\delta,\delta)\to R\times X$. 满足 $k(0)=\lambda^*$, $\phi(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\theta(0)=0$, 且 $\phi(s),\psi(s),\theta(s)\in Z$. 其中 $X=Z\bigoplus N(L(\lambda^*,0,0,0))$, 即 $(k(s),u_0(s),u_1(s),u_2(s))=(k(s),s(\omega_1+\phi(s)),s(\chi_1+\psi(s)),s(\eta_1+\theta(s)))$ 满足 $G(k(s),u_0(s),u_1(s),u_2(s))=0$. 因此 $(k(s),u_0(s),u_1(s),u_2(s))$ $(0<s<\delta)$ 是 (3.3), (3.4) 的正解.

由定理 3.2 知，方程组 (3.1), (3.2) 有正解 $(S(s),R(s),u(s))$ $(0<s<\delta)$, 其中

$$S(s)=S^*-s(\omega_1+\phi(s)),\qquad R(s)=R^*-s(\chi_1+\psi(s)),\qquad u(s)=s(\eta_1+\theta(s)).$$

引理 3.4 方程组 (3.6) 的解 $(\omega_1,\chi_1,\eta_1)^T$ 在 $[0,1]$ 上是正的.

证　由 η_1 的定义可知 $\eta_1>0$. 因为 ω_1 满足

$$\begin{aligned}&-d_0\omega_{1xx}=mf(S^*,R^*)\eta_1>0,\qquad 0<x<1,\\&\omega_{1x}(0)=0,\qquad \omega_{1x}(1)+\gamma_0\omega_1(1)=0,\end{aligned}$$

由极值原理可得在 [0,1] 上 $\omega_1>0$. 同理可证明 $\chi_1>0,\ x\in[0,1]$.

令 $F(k)=D_{(u_0,u_1,u_2)}T(k,0,0,0)=(F_1,F_2,F_3)^T$, 其中

$$\begin{aligned}&F_1(\omega,\chi,\eta)=mK_0(f(S^*,R^*)\eta),\\&F_2(\omega,\chi,\eta)=nK_1(g(S^*,R^*)\eta),\\&F_3(\omega,\chi,\eta)=K_2\big((mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\eta\big).\end{aligned}$$

(1) 假设 $\lambda\geq1$ 是 $F(k)$ 的特征值，对应的特征函数为 (ω,χ,η), 则

$$\begin{aligned}&mK_0(f(S^*,R^*)\eta)=\lambda\omega,\\&nK_1(g(S^*,R^*)\eta)=\lambda\chi,\qquad 0<x<1,\\&K_2((mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\eta)=\lambda\eta.\end{aligned}$$

边界条件

$$\begin{aligned}&\omega_x(0)=0,\qquad \omega_x(1)+\gamma_0\omega(1)=0,\\&\chi_x(0)=0,\qquad \chi_x(1)+\gamma_1\chi(1)=0,\\&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&d_0\lambda\omega_{xx}+mf(S^*,R^*)\eta=0,\\&d_1\lambda\chi_{xx}+ng(S^*,R^*)\eta=0,\qquad 0<x<1,\\&d_2\lambda\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\eta=0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

以及相应的边界条件.

若 $\eta\equiv 0$, 则由方程易知 $\omega\equiv 0$, $\chi\equiv 0$, 这与特征函数定义矛盾, 因此 $\eta\not\equiv 0$, 说明对某个 λ, $k=k_i(\lambda)$ $(i=0,1,2,\cdots)$, 其中 $k_i(\lambda)$ 关于 $\lambda\geq 1$ 递减而且可以如下排序

$$k_0(\lambda)>k_1(\lambda)\geq k_2(\lambda)\geq\cdots,$$

特别地, $k_0(1)=\lambda^*$.

(2) 若 $\lambda\geq 1$, 且对某个 $i=0,1,2,\cdots,k=k_i(\lambda)$, 则 $\eta\not\equiv 0$, $\omega=\lambda^{-1}K_0(mf(S^*,R^*)\eta)$, $\chi=\lambda^{-1}K_1(ng(S^*,R^*)\eta)$, 这说明 (ω,χ,η) 是 $F(k)$ 的一个特征函数.

结合 (1), (2) 知 $\lambda\geq 1$ 是 $F(k)$ 的特征值当且仅当对某个 i, $k=k_i(\lambda)$ $(i=0,1,2,\cdots)$.

(3) 假设 $k>\lambda^*$, 则 $k>k_0(1)\geq k_i(\lambda)$, $\lambda\geq 1$, $i=0,1,2,\cdots$, 说明 $F(k)$ 没有大于 1 的特征值, 所以 $i(T(k,\cdot),0)=1$.

(4) 假设 $\lambda^*-\varepsilon_0<k<\lambda^*$, 其中 $\varepsilon_0>0$ 充分小, 那么 $k_0(1)-\varepsilon_0<k<k_0(1)$, 由于 $k_0(\lambda)$ 关于 λ 递减, 所以一定存在惟一的 $\widehat{\lambda}>1$, 使得 $k=k_0(\widehat{\lambda})$. 因此 $\widehat{\lambda}$ 是 $F(k)$ 的特征值, 易知

$$N(\widehat{\lambda}I-F(k))=\mathrm{span}\,\{(\overline{\omega},\overline{\chi},\overline{\eta})\},\qquad \dim N(\widehat{\lambda}I-F(k))=1,$$

其中 $\overline{\eta}>0$ 是特征值问题

$$\begin{aligned}&d_2\widehat{\lambda}\overline{\eta}_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*))\overline{\eta}=k\overline{\eta},\qquad 0<x<1,\\&\overline{\eta}_x(0)=0,\qquad \overline{\eta}_x(1)+\gamma_2\overline{\eta}(1)=0\end{aligned}$$

的主特征函数, $\overline{\omega}=\widehat{\lambda}^{-1}K_0(mf(S^*,R^*)\overline{\eta})$, $\overline{\chi}=\widehat{\lambda}^{-1}K_1(ng(S^*,R^*)\overline{\eta})$.

下面说明 $R(\widehat{\lambda}I-F(k))\cap N(\widehat{\lambda}I-F(k))=0$.

假设上式不成立, 不妨设 $(\overline{\omega},\overline{\chi},\overline{\eta})\in R(\widehat{\lambda}I-F(k))$, 那么存在 $(\omega,\chi,\eta)\in X$, 使得 $(\widehat{\lambda}I-F(k))(\omega,\chi,\eta)=(\overline{\omega},\overline{\chi},\overline{\eta})$, 即

$$\begin{aligned}&\widehat{\lambda}d_2\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\eta=d_2\overline{\eta}_{xx},\qquad 0<x<1,\\&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0,\end{aligned}$$

将上式两边同乘以 $\overline{\eta}$ 并在 [0, 1] 上积分, 可得

$$\begin{aligned}d_2\int_0^1\overline{\eta}\overline{\eta}_{xx}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1(\widehat{\lambda}d_2\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\eta)\overline{\eta}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(\widehat{\lambda}d_2\overline{\eta}_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)\overline{\eta})\eta\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

因为 $\int_0^1\overline{\eta}\overline{\eta}_{xx}\,\mathrm{d}x=-\gamma_2\overline{\eta}^2(1)-\int_0^1(\overline{\eta}_x)^2\,\mathrm{d}x$, 所以 $\gamma_2\overline{\eta}^2(1)+\int_0^1(\overline{\eta}_x)^2\,\mathrm{d}x=0$, 解得 $\overline{\eta}(x)=0$, 与 $\overline{\eta}(x)$ 是主特征函数矛盾. 故 $R(\widehat{\lambda}I-F(k))\cap N(\widehat{\lambda}I-F(k))=0$, 这说明 $\widehat{\lambda}$ 的代数重数是 1, 则当 $\lambda^*-\varepsilon_0<k<\lambda^*$ 时, $i(T(k,\cdot),0)=-1$.

由引理 2.3 并结合 (3), (4) 知, 在 $R^+\times X$ 中, $G(k,u_0,u_1,u_2)$ 存在过点 $(\lambda^*,0,0,0)$ 的连通分支 C_0, 并且在 $(\lambda^*,0,0,0)$ 附近 $G(k,u_0,u_1,u_2)=0$ 的所有解都在分歧曲线上 (曲线的存在性由引理 2.1 给出).

令 C_1 表示最大连通分支, 并定义为：$C_1 = C_0 - \{(k(s), s(\omega_1+\phi(s)), s(\chi_1+\varphi(s)), s(\eta_1+\theta(s)) : -\delta < s < 0\}$, 则在分歧点 $(\lambda^*, 0, 0, 0)$ 附近 C_1 包含曲线 $\{(k(s), s(\omega_1+\phi(s)),\ s(\chi_1+\varphi(s)), s(\eta_1+\theta(s)) : 0 < s < \delta\}$. 记 $C = \{(k, S^*-u_0, R^*-u_1, u) : (u_0, u_1, u) \in C_1\}$, 显然, C 包含了方程 (3.1), (3.2) 的分歧解.

令 $P = \{(u_0, u_1, u_2) \in X : u_i > 0,\ i = 0, 1, 2, x \in [0,1]\}$, 那么在 $(\lambda^*, S^*, R^*, 0)$ 的小邻域内有 $C - \{(\lambda^*, S^*, R^*, 0)\} \subset R^+ \times P$.

注 下述定理中 "$k = 0$ 的面" 是指 $k = 0,\ S(x) \geq 0,\ R(x) \geq 0,\ u(x) \geq 0$ 的超平面; "$u = 0$ 的面" 是指 $u(x) = 0,\ S(x) \geq 0,\ R(x) \geq 0,\ k \geq 0$ 的超平面.

定理 3.5 连通分支 C 从 $k = 0$ 的面穿出正锥 $R^+ \times P$.

证 由引理 3.1 和 3.2 知，连通分支 $C - \{(\lambda^*, S^*, R^*, 0)\}$ 满足 $0 < S(x) < S^*(x),\ 0 < R(x) < R^*(x),\ 0 \leq u(x) \leq z(x),\ x \in [0,1]$ 且 $0 \leq k < M$, 由 L_P 估计及 Sobolev 嵌入定理知 $\| S \|_{C^1}, \| R \|_{C^1}, \| u \|_{C^1} \leq N,\ N$ 是与 k 无关的常数，所以 C 在 $R^+ \times P$ 中不能延伸到无穷，故 C 穿出正锥 $R^+ \times P$.

易知 $S(x) > 0,\ R(x) > 0$. 如果 C 从 $u = 0$ 的面穿出正锥 $R^+ \times P$, 即存在 $(\widehat{k}, S^*, R^*, 0) \in \{C - (\lambda^*, S^*, R^*, 0)\} \cap \partial(R^+ \times P)$ 以及存在序列 $\{(k_l, S_l, R_l, u_l)\} \subset C \cap (R^+ \times P)$, 满足 $(k_l, S_l, R_l, u_l) \to (\widehat{k}, S^*, R^*, 0)\ (l \to +\infty)$. 由于 (k_l, S_l, R_l, u_l) 满足

$$\begin{aligned} & -d_2 u_{lxx} = u_l(mf(S_l, R_l) + cng(S_l, R_l) - k_l), \qquad 0 < x < 1, \\ & u_{lx}(0) = 0, \qquad u_{lx}(1) + \gamma_2 u_l(1) = 0. \end{aligned}$$

令 $U_l = \frac{u_l}{\|u_l\|}$, 则由上述方程得：

$$\begin{aligned} & -d_2 U_{lxx} = U_l(mf(S_l, R_l) + cng(S_l, R_l) - k_l), \qquad 0 < x < 1, \\ & U_{lx}(0) = 0, U_{lx}(1) + \gamma_2 U_l(1) = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 L_P 估计及 Sobolev 嵌入定理，$\{U_l\}$ 存在一个收敛子序列仍记为 $\{U_l\}$, 使得 $U_l \to v,\ l \to +\infty$ 且 $v \geq 0,\ v \not\equiv 0$.

将方程 (3.8) 两边同时取极限，可得

$$\begin{aligned} & -d_2 v_{xx} = v(mf(S^*, R^*) + cng(S^*, R^*) - \widehat{k}), \qquad 0 < x < 1, \\ & v_x(0) = 0, v_x(1) + \gamma_2 v(1) = 0, \end{aligned}$$

由极值原理得 $v > 0,\ \forall x \in [0,1]$. 因此，$\widehat{k} = \lambda^*$, 矛盾. 故 C 只能从 $k = 0$ 的面穿出正锥 $R^+ \times P$.

4 正解的稳定性

本节我们应用线性算子的扰动理论和分歧解的稳定性理论来讨论分歧点附近正解的稳定性.

令 $X_1 = (C^{2,\alpha}[0,1])^3 \cap X,\ Y = (C^\alpha[0,1])^3,\ i : X \to Y$ 是包含映射.

引理 4.1 0 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的 $i-$ 简单特征值，其中 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 由定理 3.3 的证明中给出.

证 设 $L(\lambda^*,0,0,0)(\phi,\psi,\eta)^T=0$, 即

$$\left.\begin{aligned}
&d_0\phi_{xx}+mf(S^*,R^*)\eta=0,\\
&d_1\psi_{xx}+ng(S^*,R^*)\eta=0,\\
&d_2\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-\lambda^*)\eta=0,\\
&\phi_x(0)=0,\qquad \phi_x(1)+\gamma_0\phi(1)=0,\\
&\psi_x(0)=0,\qquad \psi_x(1)+\gamma_1\psi(1)=0,\\
&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0,
\end{aligned}\right.\qquad 0<x<1.$$

由前面的分析知 $N(L(\lambda^*,0,0,0))=\operatorname{span}\big\{(\phi_1,\psi_1,\eta_1)\big\}$, 其中

$$\phi_1=K_0(mf(S^*,R^*)\eta_1),\qquad \psi_1=K_1(ng(S^*,R^*)\eta_1).$$

记 $L^*(\lambda^*,0,0,0)$ 为 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的伴随算子，设 $L^*(\lambda^*,0,0,0)(\phi,\psi,\eta)^T=0$, 则

$$\begin{aligned}
&d_0\phi_{xx}=0,\qquad d_1\psi_{xx}=0,\qquad 0<x<1,\\
&mf(S^*,R^*)\phi+ng(S^*,R^*)\psi+d_2\eta_{xx}+(mf(S^*,R^*)\phi+cng\,(S^*,R^*)\psi-\lambda^*)\eta=0,\\
&\phi_x(0)=0,\qquad \phi_x(1)+\gamma_0\phi(1)=0,\\
&\psi_x(0)=0,\qquad \psi_x(1)+\gamma_1\psi(1)=0,\\
&\eta_x(0)=0,\qquad \eta_x(1)+\gamma_2\eta(1)=0,
\end{aligned}$$

则易知 $\phi\equiv0,\ \psi\equiv0,\ \eta=\eta_1$. 所以 $N(L^*(\lambda^*,0,0,0))=\operatorname{span}\{(0,0,\eta_1)\}$. 则

$$R(L(\lambda^*,0,0,0))=\Big\{(u_0,u_1,u_2)\in Y:\ \int_0^1 u_2\eta_1\,\mathrm{d}x=0\Big\}.$$

显然，$i(\phi_1,\psi_1,\eta_1)\notin R(L(\lambda^*,0,0,0))$. 故 0 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的 i- 简单特征值.

引理 4.2 0 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的实部最大特征值，且 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的其余特征值都位于左半复平面.

证 由引理 4.1 可知，0 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的特征值.

假设 $\widehat{\lambda}_0$ 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 实部最大的特征值，且 $\mathrm{Re}\ (\widehat{\lambda}_0)>0$. 对应的特征函数为 (ϕ,ψ,ξ). 那么 $L(\lambda^*,0,0,0)(\phi,\psi,\xi)=\widehat{\lambda}_0(\phi,\psi,\xi)$, 即

$$\left.\begin{aligned}
&d_0\phi_{xx}+mf(S^*,R^*)\xi=\widehat{\lambda}_0\phi,\\
&d_1\psi_{xx}+ng(S^*,R^*)\xi=\widehat{\lambda}_0\psi,\\
&d_2\xi_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng(S^*,R^*)-\lambda^*)\xi=\widehat{\lambda}_0\xi
\end{aligned}\right.\qquad 0<x<1$$

以及相应的边界条件. 若 $\xi\equiv0$, 则 $d_0\phi_{xx}=\widehat{\lambda}_0\phi,\ d_1\psi_{xx}=\widehat{\lambda}_0\psi$, 故 $\phi\equiv0,\ \psi\equiv0$, 矛盾. 从而 $\xi\not\equiv0$. 所以 $\widehat{\lambda}_0$ 是 $d_2\xi_{xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-\lambda^*)\xi=\lambda\xi$ 以及相应边界条

件的特征值．因此 $\widehat{\lambda}_0 \in R$, 且 $\widehat{\lambda}_0 \le 0$, 这与假设矛盾．所以 0 是 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的实部最大特征值，且 $L(\lambda^*,0,0,0)$ 的其余特征值都位于左半复平面．

由引理 2.2 可知，在 $(\lambda^*,0,0,0)$ 的邻域上存在 C^1 函数 $k \to (\nu(k),W(k))$, $s \to (\mu(s),V(s))$, 使得 $(\nu(\lambda^*),W(\lambda^*)) = (0,(\omega_1,\chi_1,\eta_1)) = (\mu(0),V(0))$, 其中

$$W(k)-(\omega_1,\chi_1,\eta_1)\in Z, \qquad V(s)-(\omega_1,\chi_1,\eta_1)\in Z, \qquad Z\oplus \operatorname{span}\big\{(\omega_1,\chi_1,\eta_1)\big\}=X,$$

并且

$$L(k,0,0,0)W(k)=\nu(k)W(k), \qquad |k-\lambda^*|\ll 1, \tag{4.1}$$

$$L(k(s),u_0(s),u_1(s),u_2(s))V(s)=\mu(s)V(s), \qquad |s|\ll 1, \tag{4.2}$$

且 $\nu'(\lambda^*) \ne 0$, 其中 $W(k)=(w_1(k),w_2(k),w_3(k))$, $V(s)=(v_1(s),v_2(s),v_3(s))$. 若当 $|s|\ll 1$ 时， $\mu(s)\ne 0$, 则

$$\lim_{s\to 0}\frac{sk^{'}(s)\nu'(\lambda^*)}{\mu(s)}=-1.$$

当 $\mu(s)<0$ 时，分歧解是稳定的；当 $\mu(s)>0$ 时分歧解是不稳定的．

引理 4.3 $\nu'(\lambda^*)<0$.

证 由 (4.1) 式可知

$$\begin{aligned} &d_0w_{1xx}+mf(S^*,R^*)w_3=\nu(k)w_1, \\ &d_1w_{2xx}+ng(S^*,R^*)w_3=\nu(k)w_2, \qquad\qquad 0<x<1 \\ &d_3w_{3xx}+(mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)w_3=\nu(k)w_3. \end{aligned}$$

以及边界条件

$$\begin{aligned} &w_{1x}(0)=0, \qquad w_{1x}(1)+\gamma_0w_1(1)=0, \\ &w_{2x}(0)=0, \qquad w_{2x}(1)+\gamma_1w_2(1)=0, \\ &w_{3x}(0)=0, \qquad w_{3x}(1)+\gamma_2w_3(1)=0, \end{aligned}$$

由于 $|k-\lambda^*|\ll 1$, 则当 k 充分接近 λ^* 时， $|\nu(k)|\ll 1$. 若 $w_3\equiv 0$, $|k-\lambda^*|\ll 1$, 可推出 $w_1\equiv 0$, $w_2\equiv 0$, 矛盾．故 $w_3\not\equiv 0$, 则 $\nu(k)$ 是 $(d_2\frac{d^2}{dx^2}+mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)$ 的特征值．由 $\eta_1>0$ 知 $\nu(k)$ 是 $(d_2\frac{d^2}{dx^2}+mf(S^*,R^*)+cng\,(S^*,R^*)-k)$ 的主特征值．利用主特征值的性质可得，当 $|k-\lambda^*|\ll 1$ 时， $\nu(k)$ 关于 k 是递减的，又由于 $\nu'(\lambda^*)\ne 0$, 则 $\nu'(\lambda^*)<0$.

引理 4.4 $k(s)$ 在 $s=0$ 处的导数满足

$$k'(0)\int_0^1\eta_1^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 I\eta_1^2\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$I=\frac{(mb-cna)(\chi_1S^*-\omega_1R^*)-m\omega_1-cn\chi_1}{(1+aS^*+bR^*)^2}.$$

证　将 $(k(s), u_0(s), u_1(s), u_2(s)) = (k(s), s(\omega_1+\phi(s)), s(\chi_1+\psi(s)), s(\eta_1+\theta(s)))$ 代入 (3.3) 的第三个式子可得：

$$\begin{aligned} &d_2(s(\eta_1+\theta(s)))_{xx} + \big(mf(S^*-s(\omega_1+\phi(s)), R^*-s(\chi_1+\psi(s))\big) \\ &+cng\,(S^*-s(\omega_1+\phi(s)), R^*-s(\chi_1+\psi(s))) - k(s)) s(\eta_1+\theta(s)) = 0. \end{aligned}$$

两边同除以 s, 关于 s 求导，并令 $s=0$, 可得

$$\begin{aligned} &d_2(\theta'(0))_{xx} + (mf(S^*, R^*) + cng\,(S^*, R^*) - \lambda^*)\theta'(0) \\ &+\frac{(mb-cna)(\chi_1 S^* - \omega_1 R^*) - m\omega_1 - cn\chi_1}{(1+aS^*+bR^*)^2}\eta_1 = k'(0)\eta_1. \end{aligned}$$

令

$$I = \frac{(mb-cna)(\chi_1 S^* - \omega_1 R^*) - m\omega_1 - cn\chi_1}{(1+aS^*+bR^*)^2},$$

则 $d_2(\theta'(0))_{xx} + (mf(S^*, R^*) + cng\,(S^*, R^*) - \lambda^*)\theta'(0) + I\eta_1 = k'(0)\eta_1$.

两边同乘以 η_1, 并在 $[0, 1]$ 上积分得

$$k'(0)\int_0^1 \eta_1^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 I\eta_1^2\,\mathrm{d}x.$$

如果 $I<0$, 则 $k'(0)<0$, 那么当 $0<s\ll 1$ 时，$k'(s)<0$, 由引理 4.1–4.3 知 $\mu(s)<0$; 反之，若 $I>0$, 则 $\mu(s)>0$. 于是有下述正解稳定性判别定理：

定理 4.5　如果 $I<0$, 那么在 $(\lambda^*, 0, 0, 0)$ 附近, 系统 (3.3), (3.4) 的共存解 $(u_0(s), u_1(s), u_2(s))$ 是稳定的；反之 $(u_0(s), u_1(s), u_2(s))$ 不稳定.

注　对于

$$I = \frac{(mb-cna)(\chi_1 S^* - \omega_1 R^*) - m\omega_1 - cn\chi_1}{(1+aS^*+bR^*)^2} < 0$$

是可以取到的，下面举例说明.

由于 $\omega_1, \chi_1 > 0$, 所以 $-m\omega_1 - cn\chi_1 < 0$. 取 $\gamma_0=\gamma_1=\gamma$, 则 $S^*=R^*$, 现在只需要考虑 $(mb-cna)(\chi_1-\omega_1)S^*$ 的符号，其中 ω_1, χ_1 满足的方程为

$$\begin{aligned} &d_1\omega_{1xx} + mf(S^*, S^*)\eta_1 = 0, \qquad 0<x<1, \\ &d_2\chi_{1xx} + ng(S^*, S^*)\eta_1 = 0, \qquad 0<x<1, \\ &\omega_{1x}(0) = 0, \qquad \omega_{1x}(1) + \gamma\omega_1(1) = 0, \\ &\chi_{1x}(0) = 0, \qquad \chi_{1x}(1) + \gamma\chi_1(1) = 0, \end{aligned}$$

令 $W = \omega_1 - \chi_1$, 则 W 满足的方程为：

$$\begin{aligned} &W_{xx} + \Big(\frac{m}{d_1} - \frac{n}{d_2}\Big) f(S^*, S^*)\eta_1 = 0, \qquad 0<x<1, \\ &W_x(0) = 0, \qquad W_x(1) + \gamma W(1) = 0, \end{aligned}$$

若取 $\frac{m}{d_1} \geq \frac{n}{d_2}$, 则

$$
\begin{aligned}
&-W_{xx} = \Big(\frac{m}{d_1} - \frac{n}{d_2}\Big) f(S^*, S^*)\eta_1 \geq 0, \qquad 0 < x < 1, \\
&W_x(0) = 0, \qquad W_x(1) + \gamma W(1) = 0,
\end{aligned}
$$

由极值原理得 $W(x) \geq 0,\ x \in [0,1]$, 则 $\omega_1 - \chi_1 \geq 0$, 若参数取值使得 $mb - cna > 0$, 则 $I < 0$.

综上所述，取适当的参数值可使得分歧解稳定.

参 考 文 献

[1] Hansen S R, Hubbell S P. Single-nutrient Microbial Competition: Qualitative Agreement between Experimental and Theoretical Forecast Outcomes. *Science*, 1980, 207(4438): 1491–1493

[2] So J W H, Waltman P. A Nonlinear Boundary Value Problem Arising from Competition in the Chemostat. *Appl.Math.Comput.*, 1989, 32(2-3): 169–183

[3] Smith H L, Waltman P. The Theory of the Chemostat. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

[4] Hsu S B, Waltman P. On a System of Reaction-diffusion Equations Arising from Competition in an Unstirred Chemostat. *SIAM J. Appl. Math.*, 1993, 53(4): 1026–1044

[5] Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. The Effect of Inhibitor on the Plasmid-bearing and Plasmid-free Model in the Unstirred Chemostat. *SIAM J. Math. Anal.*, 2007, 38(6): 1860–1885

[6] Nie H, Wu J H. Asymptotic Behavior of an Unstirred Chemostat Model with Internal Inhibitor. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 334(2): 889–908

[7] Nie H, Zhang H W, Wu J H. Characterization of Positive Solutions of the Unstirred Chemostat with an Inhibitor. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2008, 9(3): 1078–1089

[8] Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. A Mathematical Model of Competition for two Essential Resources in the Unstirred Chemostat. *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, 65(1): 209–229

[9] Wu J H, Wolkowicz G S K. A System of Resource-based Growth Models with two Resources in the Unstirred Chemostat. *J. Differential Equations*, 2001, 172(2): 300–332

[10] Smoller J. Shock Waves and Reaction-diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1983

[11] Hwang T W. Global Analysis of the Predator-prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 281(1): 395–401

The Property of Solution for the Unstirred Chemostat Model with Two Nutrients

WANG Lijuan

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062)

(*Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji* 721013)

Wu Jianhua

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062)

(*E-mail: jianhuaw@snnu.edu.cn*)

JIANG Hongling

(*Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji* 721013)

Abstract The property of solution for the unstirred chemostat model with two nutrients is discussed in this paper. Using the maximum principle, lower-upper solution method and bifurcation theory, the existence of positive steady-state solution is obtained. By the stability theorem, the stability of the positive steady state solution is proved.

Key words chemostat; bifurcation; stability

MR(2000) Subject Classification 35K57

Chinese Library Classification O175.26