带P-Laplacian算子的四点四阶奇异边值问题的对称正解 *

栾世霞
(曲阜师范大学数学科学学院，曲阜 273165)
(E-mail: sxluan@mail.qfnu.edu.cn)
赵艳玲
(定陶县职业教育中心，定陶 274100)

摘 要 本文主要利用上下解方法和 Schauder 不动点定理, 在更广泛的条件下研究了一类带 P-Laplacian 算子的四点四阶奇异边值问题的对称正解的存在性. 克服了对非线性微分算子 $[\varphi_p(u'')]''$ Fredholm 抉择定理和极大值原理不能使用的困难，改进并推广了最近的一些已知结果.

关键词 P-Laplacian 算子；奇异边值问题；上下解；对称正解； Schauder 不动点定理
MR(2000) 主题分类 34B15
中图分类 O175.8

1 引言

本文主要研究带 P-Laplacian 算子的四点四阶奇异边值问题

$$\begin{cases} \left[\varphi_p(u''(t))\right]'' = f(t,u(t)), \qquad t\in(0,1), \\ u(0)=au(\xi), \qquad u''(0)=bu''(\eta), \\ u(1)=au(\xi), \qquad u''(1)=bu''(\eta), \qquad t\in[0,1] \end{cases} \tag{1.1}$$

的对称正解的存在性. 这里的 $\varphi_p(t)=|t|^{p-2}t,\ p>1,\ 0<a,b,\ \xi,\eta<1$ 是常数， $f\in C((0,1)\times(0,+\infty),\ [0,+\infty))$ 在 $t=0,\ t=1$ 或 $u=0$ 处可能奇异.

近年来，常微分方程边值问题在理论和应用中都起到很大的作用，它们主要是用来描述大量的物理，生物和化学现象. 方程 (1.1) 出现在梁理论中见 [1–2], 用于描述有很小变形的梁，满足梁拉伸与压缩性质的梁等等. 此外， [3] 中 Timoshenko 关于弹性的

本文 2009 年 1 月 10 日收到.
* 山东省自然科学基金 (ZR2009AL016) 资助项目.

研究，[4] 中 Soedel 对结构形变的讨论等，都可以转化为某种形式的四点边值问题的研究．另外，还有许多关于弹性梁方程的文章，见 [5–8].

最近，在 $p=2$ 和 f 不具有奇异性的情况下，Chen et al.[5] 利用上下解方法和不动点理论，讨论了下面的四阶四点边值问题的正解的存在性

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t)), \qquad t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0,\\ au''(\xi_1)-bu'''(\xi_1)=0, \qquad cu''(\xi_2)+du'''(\xi_2)=0, \end{cases}$$

这里的 $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),\ [0,+\infty))$ 关于变量 u 是非减的，并且存在正常数 $\mu<1$，使得

$$k^{\mu}u\le f(t,\mu u), \qquad \forall\, 0\le k\le 1.$$

在 Lidstone 边值条件或其他条件下，[7, 10–16] 的作者利用上下解方法，讨论了方程

$$u^{(4)}(t)=f(t,u(t))$$

的正解的存在性，四阶线性方程的极大值原理在其中的证明中起着很重要的作用．然而，对于 $p=2$ 的情况，微分算子 $[\varphi_p(u'')]''$ 是非线性的，对应 [5,7,10,19] 中的主要工具 Fredholm 决择定理与极大值原理不能使用．为了克服这些困难，本文详细讨论了边值问题 (1.1) 的 Green 函数的性质，利用上下解方法和 Schauder 不动点定理得到了该问题新的存在性定理，其中非线性项 f 允许在 $t=0$，$t=1$ 或 $u=0$ 奇异．方法和 [5–20] 有很大的不同．

本文在第 2 部分先介绍一些定义和引理，求出相关的 Green 函数，并给出 Green 函数的一些简单性质，第 3 部分是对称正解的存在性定理，并在最后给出了一个具体例子以检验本文所得结果.

2 预备知识和引理

空间 $X=\{u: u,\varphi_p(u'')\in C^2[0,1]\}$ 是研究 BVP(1.1) 的基本空间.

定义 2.1 一个函数 u 称为边值问题 (1.1) 的解是指 $u\in X$ 且满足 (1.1). 另外 u 是正解是指如果 u 是 BVP(1.1) 的解并且 $u(t)>0$，$\forall t\in[0,1]$. u 是对称正解是指 $\forall t\in[0,1]$ 满足 $u(t)=u(1-t)$ 的正解.

定义 2.2 $\alpha\in X$, 我们说 α 是边值问题 (1.1) 的对称下解是指如果 α 满足

$$\begin{aligned} &\big[\varphi_p(\alpha''(t))\big]''\le f\big(t,\alpha(t)\big), \qquad \forall\, t\in(0,1),\quad \alpha(t)=\alpha(1-t),\quad t\in[0,1],\\ &\alpha(0)\le a\alpha(\xi),\quad \alpha(1)\le a\alpha(\xi),\quad \alpha''(0)\ge b\alpha''(\eta),\quad \alpha''(1)\ge b\alpha''(\eta). \end{aligned}$$

定义 2.3 $\beta\in X$, 我们说 β 是边值问题 (1.1) 的对称上解是指如果 β 满足

$$\begin{aligned}&\big[\varphi_p(\beta''(t))\big]''\geq f\big(t,\beta(t)\big),\qquad \forall\, t\in(0,1),\quad \beta(t)=\beta(1-t),\quad t\in[0,1],\\&\beta(0)\geq a\beta(\xi),\quad \beta(1)\geq a\beta(\xi),\quad \beta''(0)\leq b\beta''(\eta),\quad \beta''(1)\leq b\beta''(\eta).\end{aligned}$$

引理 2.1[21] 令 $0<a<\frac{1}{\xi},\ c\geq 0,\ d\geq 0$. 如果 $y\in C[0,1]$ 且 $y\geq 0$, 那么方程

$$\begin{cases}u''(t)+y(t)=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=c, \qquad u(1)-au(\xi)=d,\end{cases}$$

有唯一解 u 满足 $u(t)\geq 0,\ t\in[0,1]$.

引理 2.2 边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=au(\xi)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}-u''(t)=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=bu(\eta)\end{cases}$$

的格林函数分别为

$$G(t,s)=K(t,s)+\frac{aK(\xi,s)}{1-a} \tag{2.1}$$

和

$$H(t,s)=K(t,s)+\frac{bK(\eta,s)}{1-b}, \tag{2.2}$$

其中

$$K(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leq s\leq t<1,\\ t(1-s), & 0\leq t\leq s<1.\end{cases}$$

证 设

$$u(t)=-\int_0^t\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s+c_1t+c_2,$$

则

$$u(0)=c_2=au(\xi),\qquad u(1)=-\int_0^1\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s+c_1+c_2=c_2,$$

从而有

$$c_1=\int_0^1\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s.$$

又因为

$$u(\xi)=-\int_0^\xi\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s+c_1\xi+c_2,$$

将 c_1 代入上式得

$$c_2=\frac{-a\int_0^\xi\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s+a\xi\int_0^1\int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s}{1-a},$$

所以

$$\begin{aligned} u(t) = & -\int_0^t \int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s + t\int_0^1 \int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s \\ & + \frac{-a\int_0^\xi \int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s + a\xi\int_0^1 \int_0^s f(m,u)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}s}{1-a} \\ = & \int_0^1 \Big[K(t,s) + \frac{aK(\xi,s)}{1-a}\Big] f(s,u)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中

$$K(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t < 1, \\ t(1-s), & 0 \le t \le s < 1. \end{cases}$$

因此

$$G(t,s) = K(t,s) + \frac{aK(\xi,s)}{1-a},$$

同理可证

$$H(t,s) = K(t,s) + \frac{bK(\eta,s)}{1-b}.$$

考虑下面线性边值问题

$$\begin{cases} \big[\varphi_p t(u''(t))\big]'' = y(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = au(\xi), & u''(0) = u''(1) = bu''(\eta), \end{cases} \tag{2.3}$$

由引理 2.1 可直接得到

引理 2.3 令 $0<\xi,\ \eta<1,\ 0\le a,b<1$. 如果 $y\in C[0,1]$ 和 $y\ge 0$, 那么 BVP(2.3) 有唯一解 $u(t)\ge 0,\ t\in[0,1]$, 满足

$$u(t) = \int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)y(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r. \tag{2.4}$$

引理 2.4 格林函数 $G(t,s), H(t,s)$ 有如下性质:

(i) 对任意的 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, 有 $G(t,s)=G(1-t,s),\ H(t,s)=H(1-t,s)$.

(ii) 对任意的 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, 有 $G(t,s)\le G(s,s),\ H(t,s)\le H(s,s)$.

(iii) 对任意的 $t_0\in(0,1)$,

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} \ge (1-a)t(1-t), \qquad \forall\, t,s\in(0,1). \tag{2.5}$$

证 由定义易知 (i), (ii) 成立. 下证 (iii), 令 $s\in[0,\xi]$, 则

(a) 当 $s\le t_0\le t$ 时,

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} = \frac{s(1-t)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{s(1-t_0)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{s(1-t)}{s(1-t_0)} \ge 1-t \ge (1-a)t(1-t).$$

(b) 当 $s \le t \le t_0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} =&\frac{s(1-t)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{s(1-t_0)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{(1-a)s(1-t)}{(1-a)s(1-t_0)+as(1-\xi)}\\ =&\frac{(1-a)(1-t)}{(1-a)(1-t_0)+a(1-\xi)} \ge (1-a)(1-t) \ge (1-a)t(1-t).\end{aligned}$$

(c) 当 $t_0 \le t \le s$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} =&\frac{t(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{t_0(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{(1-a)(1-s)t}{(1-a)(1-s)t_0+as(1-\xi)}\\ \ge&\frac{(1-a)(1-s)t}{(1-a)(1-s)t_0+as(1-s)} = \frac{(1-a)t}{(1-a)t_0+as}\\ \ge&(1-a)t \ge (1-a)t(1-t).\end{aligned}$$

(d) 当 $t \le t_0 \le s$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} = \frac{t(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{t_0(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{s(1-t)}{s(1-t_0)} \ge (1-a)(1-t) \ge (1-a)t(1-t).$$

(e) 当 $t_0 \le s \le t$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} =&\frac{t(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{s(1-t_0)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{(1-a)(1-s)t}{(1-a)s(1-t_0)+as(1-\xi)}\\ \ge&\frac{(1-a)(1-s)t}{(1-a)s(1-t_0)+as(1-s)} \ge \frac{(1-a)(1-s)t}{(1-a)s(1-s)+as(1-\xi)}\\ \ge&(1-a)t \ge (1-a)t(1-t).\end{aligned}$$

(f) 当 $t \le s \le t_0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} =&\frac{s(1-t)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}}{t_0(1-s)+\frac{as(1-\xi)}{1-a}} \ge \frac{s(1-t)(1-a)}{(1-a)(1-s)t_0+as(1-\xi)}\\ \ge&\frac{(1-a)s(1-t)}{(1-a)t_0(1-s)+as(1-\xi)} \ge \frac{(1-a)(1-t)}{(1-a)(1-s)+a(1-\xi)}\\ =&\frac{(1-a)(1-t)}{(1-a)(1-t)1-s} \ge \frac{(1-a)(1-t)}{1-s} \ge (1-a)(1-t)t.\end{aligned}$$

当 $s \in [\xi, 1]$ 时采用同样的方法可以证明

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)} \ge (1-a)t(1-t), \qquad \forall\, t,s \in (0,1).$$

故 (iii) 成立.

3 主要结果

定理 3.1 假设下面的条件 (H_1)–(H_3) 成立:

(H_1) $f(t,u)\in C[(0,1)\times(0,+\infty),[0,+\infty)]$, 并且 $f(t,u)$ 关于变量 u 是非增的, $f(t,u)$ 关于 t 是对称的, 即 $f(t,u)=f(1-t,u)$.

(H_2) 对任意的常数 $\lambda>0$,

$$0<\int_0^1 H(s,s)f(s,\lambda s(1-s))\,\mathrm{d}s<+\infty.$$

(H_3) 存在连续函数 $a(t)$ 和某个固定的常数 k 使得 $a(t)\geq kt(1-t),\ t\in[0,1]$ 和

$$\int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,a(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r=b(t)\geq a(t),$$
$$\int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,b(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\geq a(t).$$

那么边值问题 (1.1) 至少有一个对称正解 ω 满足: 存在 $m>0$, 使得 $\omega(t)\geq mt(1-t)$.

证 令

$$P=\big\{u\in C[0,1]:\ u(t)=u(1-t),\ \text{存在正数}\ k_u\ \text{使得}\ u(t)\geq k_u t(1-t),\ t\in[0,1]\big\}.$$

很显然, $t(1-t)\in P$, 因此 P 是非空的.

现定义 X 上的算子 T 如下:

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r,\qquad \forall\, u(s)\in P.$$

对任意的 $u\in P$, 根据 P 的定义存在一个正数 k_u, 使得 $u(t)\geq k_u t(1-t),\ t\in[0,1]$. 由 (H_1) 和 (H_2) 有

$$\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\leq\int_0^1 H(s,s)f(s,k_u s(1-s))\,\mathrm{d}s<+\infty.$$

因此

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\&\leq\int_0^1 G(r,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)f(s,k_u s(1-s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^1 G(r,r)\,\mathrm{d}r\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)f(s,k_u s(1-s))\,\mathrm{d}s\Big)\\&<+\infty.\end{aligned}\tag{3.1}$$

选择固定的 $t_0 \in (0,1)$ 使得 $Tu(t_0) = K_{Tu} > 0$. 由引理 2.4 得到

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \frac{G(t,r)}{G(t_0,r)}G(t_0,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &\geq (1-a)t(1-t)\int_0^1 G(t_0,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &= (1-a)K_{Tu}t(1-t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

从而由 (3.1) 和 (3.2) 得到 T 是定义的，并且 $T(P) \subset P$.

通过直接的运算可以得到

$$\big[\varphi_p((Tu)''(t))\big]'' = f(t,u(t)), \qquad t \in (0,1), \tag{3.3}$$

$$Tu(0) = Tu(1) = aTu(\xi), \qquad (Tu)''(0) = (Tu)''(1) = b(Tu)''(\eta), \tag{3.4}$$

令 $b(t) = Ta(t)$, 那么由 (H_3) 和算子 T 非减的性质可得

$$a(t) \leq Ta(t) = b(t), \qquad b(t) = Ta(t) \geq Tb(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.5}$$

因为 $a(t) \in P$, 由 (3.2) 易知 $Ta(t), Tb(t) \in P$, 于是，由 (3.3)–(3.5) 可得

$$\big[\varphi_p((Tb)''(t))\big]'' - f(t,Tb(t)) \leq \big[\varphi_p((Tb)''(t))\big]'' - f(t,b(t)) = 0, \tag{3.6}$$

$$\big[\varphi_p((Ta)''(t))\big]'' - f(t,Ta(t)) \geq \big[\varphi_p((Ta)''(t))\big]'' - f(t,a(t)) = 0. \tag{3.7}$$

又 (3.4) 表明 $Ta(t), Tb(t) \in X$ 满足边值条件 (1.1), 因此由 (3.5)–(3.7) 知， $\alpha(t) = Tb(t)$, $\beta(t) = Ta(t)$ 分别是边值问题 (1.1) 的对称下解和对称上解.

下证边值问题

$$\begin{cases} \big[\varphi_p(u''(t))\big]'' = g(t,u(t)), \qquad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = au(\xi), \\ u''(0) = u''(1) = bu''(\eta), \end{cases} \tag{3.8}$$

有一个正解，其中

$$g(t,u(t)) = \begin{cases} f(t,\alpha(t)), & u(t) < \alpha(t), \\ f(t,u(t)), & \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \\ f(t,\beta(t)), & u(t) > \beta(t). \end{cases} \tag{3.9}$$

定义算子 $A: C[0,1] \to C[0,1]$ 如下：

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r.$$

记 $[\alpha,\beta] = \big\{u \in P,\ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t),\ t \in [0,1]\big\}$, 则 $[\alpha,\beta]$ 为 $C[0,1]$ 中的有界闭凸集，且算子 A 在 $[\alpha,\beta]$ 中的不动点就是边值问题 (3.8) 的一个对称正解.

首先， $A:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$. 事实上， $\forall\, u\in[\alpha,\beta]$, 由 A 的定义，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&\big[\varphi_p((Au)''(t))\big]''=g(t,u(t)),\qquad t\in(0,1), &(3.10)\\ &Au(0)=Au(1)=aAu(\xi),\qquad (Au)''(0)=(Au)''(1)=b(Au)''(\eta), &(3.11)\end{aligned}$$

由 $f(t,u)$ 关于 u 是非增的，故有

$$f(t,\beta(t))\le g(t,u(t))\le f(t,\alpha(t)),\qquad t\in(0,1). \tag{3.12}$$

据 (3.5) 和 (H_3) 可得

$$f(t,b(t))\le g(t,u(t))\le f(t,a(t)),\qquad t\in(0,1). \tag{3.13}$$

又 $a(t)\in P$, 故由 (3.3) 可得

$$\big[\varphi_p((\beta)''(t))\big]''=\big[\varphi_p((Aa)''(t))\big]''=f(t,a(t)),\qquad t\in(0,1).$$

从而由 (3.3), (3.5), (3.11)–(3.13) 可得

$$\begin{aligned}&\big[\varphi_p((\beta)''(t))\big]''-\big[\varphi_p((Au)''(t))\big]''=f(t,a(t))-g(t,u(t))\ge 0,\qquad t\in[0,1],\\ &(\beta-Au)(0)=0,\qquad (\beta-Au)(1)=a(\beta-Au)(\xi),\\ &(\beta-Au)''(0)=0,\qquad (\beta-Au)''(1)=b(\beta-Au)''(\eta).\end{aligned} \tag{3.14}$$

令 $z=\varphi_p(\beta'')-\varphi_p((Au)'')$, 则

$$\begin{aligned}&z''(t)\ge 0,\qquad \forall\, t\in(0,1),\\ &z(0)=\varphi_p(\beta''(0))-\varphi_p((Au)''(0))=0,\\ &z(1)-\varphi_p(b)z(\eta)=\varphi_p(\beta''(1))-\varphi_p((Au)''(1))-\varphi_p(b\beta''(\eta))+\varphi_p(b(Au)''(\eta))\\ =&\big[\varphi_p(\beta''(1))-\varphi_p(b\beta''(\eta))\big]-\big[\varphi_p((Au)''(1))-\varphi_p(b(Au)''(\eta))\big]\\ =&0.\end{aligned}$$

由引理 2.1, 得 $z(t)\le 0,\ t\in[0,1]$, 因而有 $\varphi_p(\beta''(t))\le\varphi_p((Au)''(t)),\ t\in[0,1]$. 因为 φ_p 是单调增的，所以

$$\beta''(\eta)\le(Au)''(t),\qquad t\in[0,1],$$

即

$$(\beta-Au)''(t)\le 0,\qquad t\in[0,1].$$

结合引理 2.1 和 (3.14) 可得

$$(Au)(t)\le\beta(t),\qquad t\in[0,1].$$

同上证明，可得 $(Au)(t)\ge\alpha(t),\ t\in[0,1]$. 从而 $A:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$.

其次， A 是紧算子．一方面，由 g 是连续知 A 是连续．又 $\alpha(t)\in P$, 故存在一个正数 k_α, 使得 $\alpha(t)\geq k_\alpha t(1-t)$, $t\in[0,1]$. 由 (H_2) 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 H(s,s)g(s,\alpha(s))\,\mathrm{d}s\leq\int_0^1 H(s,s)f(s,\alpha(s))\,\mathrm{d}s\\ \leq&\int_0^1 H(s,s)f(s,k_\alpha s(1-s))\,\mathrm{d}s<+\infty.\end{aligned}\tag{3.15}$$

从而对任意的 $u(t)\in C[0,1]$, 由 (3.9), (3.15), 我们有

$$\begin{aligned}Au(t)&=\int_0^1 G(t,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\leq\int_0^1 G(r,r)\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\leq\int_0^1 G(r,r)\,\mathrm{d}r\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\\ &<+\infty.\end{aligned}$$

因此算子 A 是一致有界的．

另一方面，由 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续知它在 $[0,1]\times[0,1]$ 上一致连续．于是，对固定的 $s\in[0,1]$ 和 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，有

$$\big|G(t_1,s)-G(t_2,s)\big|<\frac{\varepsilon}{\varphi_p^{-1}(\int_0^1 H(s,s)f(s,k_\alpha s(1-s))\,\mathrm{d}s)}$$

且对所有的 $u(t)\in C[0,1]$,

$$\begin{aligned}|Au(t_1)-Au(t_2)|&\leq\int_0^1|G(t_1,r)-G(t_2,r)|\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(r,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\leq\int_0^1|G(t_1,r)-G(t_2,r)|\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)f(s,\alpha(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &\leq\int_0^1|G(t_1,r)-G(t_2,r)|\,\mathrm{d}r\varphi_p^{-1}\Big(\int_0^1 H(s,s)f(s,k_\alpha s(1-s))\Big)\,\mathrm{d}s\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

因而算子 A 是等度连续的．从而由 Ascoli-Arzela 定理知 A 是紧算子．

根据 Schauder 不动点定理， A 在 $[\alpha,\beta]$ 中有一个不动点 ω, 即 $\omega=A\omega$. 所以边值问题 (3.8) 有一个对称正解．定理 (3.1) 得证．

如果 $f(t,u)$ 在 $u=0$ 是奇异的，则对所有的 $u\geq0$, $f(t,u)\leq f(t,0)$, $t\in(0,1)$. 从而我们有下面的定理：

定理 3.2 假设 (H_1) 成立，且 f 满足 $(\mathrm{H}_2)'$ 对任意的 $\mu>0, f(t,\mu)\neq0$, $0<\int_0^1 H(s,s)f(s,0)\,\mathrm{d}s<+\infty$. 那么边值问题 (1.1) 至少有一个对称正解 $\omega(t)$: 满足存在 $m>0$, 使得 $\omega(t)\geq mt(1-t)$.

事实上，在定理 (3.1) 中集合 P 被下面的集合

$$P_1=\{u(t)\in X:\ u(t)=u(1-t),u(t)\geq 0,\ t\in[0,1]\}$$

代替，并且令 $a(t)=0$, 那么 (3.5)–(3.7) 成立．同定理 3.1 的证明知该定理结论成立.

如果 $f(t,u)$ 是非奇异的，则有下述结论

定理 3.3 如果 $f(t,u):[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的，关于 u 减并且对任意的 $\lambda>0$, $f(t,\lambda)\neq 0$, 那么边值问题 (1.1) 至少有一个对称正解 $\omega(t)$ 满足：存在一个常数 $m>0$, 使得 $\omega(t)\geq mt(1-t)$.

4 例子

考虑下面的带 P-Laplacian 算子的四点四阶边值问题

$$\begin{cases}\big[\varphi_p(u''(t))\big]''=a_0(t)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i(t)u^{-\alpha_i}, & t\in(0,1),\\ u(0)=\dfrac{1}{3}u\Big(\dfrac{3}{4}\Big),\qquad u''(0)=\dfrac{1}{4}u''\Big(\dfrac{1}{2}\Big), & \\ u(1)=\dfrac{1}{3}u\Big(\dfrac{3}{4}\Big),\qquad u''(1)=\dfrac{1}{4}u''\Big(\dfrac{1}{2}\Big), & \end{cases}\tag{3.16}$$

这里的 $\varphi_p(t)=|t|^{p-2}t$, $p>1$, $a_0(t),a_i(t)$ 在 $(0,1)$ 上非负连续且关于 t 在 $[0,1]$ 上是对称的， $0<a_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 如果在 $[0,1]$ 上 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)\neq 0$, 满足

$$\int_0^1 H(t,t)f\Big(a_0(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)t^{-\alpha_i}(1-t)^{-\alpha_i}\Big)\,\mathrm{d}t<+\infty,\tag{3.17}$$

那么四阶四点边值问题 (3.15) 至少有一个对称正解 $\omega(t)$ 满足：存在一个常数 $m>0$ 使得 $\omega(t)\geq mt(1-t)$.

证 令 $f(t,u)=a_0(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)u^{-\alpha_i}$, $t\in(0,1)$. 在 (3.17) 的条件下易证定理 3.1 的条件 (H_1), (H_2) 满足．令 $\mu=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\alpha_i\}$, 我们得到 $f(t,u)\leq f(t,ru)\leq r^{-\mu}f(t,u)$ 对所有 $r<1$ 的都成立．因为 $e(t)=t(1-t)\in P$, 由 (3.2), $Te\in P$, $T^2e\in P$, 所以存在正数 k,l 使得 $Te\geq ke$, $T^2e\geq le$. 取常数 $r_0\leq\min\{1,k,l^{\frac{1}{1-\mu^2}}\}$, 则有

$$T(r_0e)\geq Te\geq ke\geq r_0e,\qquad T^2(r_0e)\geq r_0^{\mu^2}T^2e\geq r_0^{\mu^2}le\geq r_0e.$$

令 $a(t)=r_0t(1-t)$, 则定理 3.1 的条件 (H_3) 满足．从而由定理 3.1 知方程 (3.16) 有解.

注 上述例子不但表明 $f(t,u)$ 可以在 $t=0$, $t=1$ 或 $u=0$ 奇异，而且存在足够多的函数满足定理 3.1 的条件.

参 考 文 献

[1] Bernis F. Compactness of the Support in Convex and Nonvex four order Elasticity Problem. *Nonl. Anal.*, 1982, 6: 1221–1243

[2] Zill D G, Cullen M R. Differential Equations with Boundary-Value Problems. (fifth ed.), Brooks/Cole, 2001

[3] Timoshenko S P. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill, 1961

[4] Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. New York: Dekker, 1993

[5] Chen S H, Ni W, Wang C P. Positive Solution of order Ordinary Differtial Equation with Four-point Boundary Conditions. *Appl. Math. Lett.*, 2006, 19: 191–168

[6] Graef J R, Qian C, Yang B. A Three Point Boundary Value Problem for Nonlinear Fourth order Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 287: 217–233

[7] Ma R Y, Zhang J H, Fu S M. The Methord of Lower and Upper Solutions for Fourth-order Two-point Boundary Value Problem. *Anal. Appl.*, 1997, 215: 415–422

[8] Liu B. Positive Solutions of Fourth-order Two-point Boundary Value Problem. *Appl. Math. Comp.*, 2004, 148: 407–420

[9] Liu L S, Zhang X G, Wu Y H. Positive Solutions of Fourth-order Nonlinear Singular Sturm-Liouville Eigenvalue Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 326: 1212–1224

[10] Agarwal R. On Fourth-order Boundary Value Porblems Arising in Beam Analysis. *Diff. Inte. Equa.*, 1989, 148: 91–110

[11] Cabada A. The Method of Lower and Upper Solutions for Second, Third, Fourth, and Higher order Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, 185: 302–320

[12] De Coster C, Sanchez L. Upper and Lower Solutions, Ambrosetti-Prodi Problem and Positive Solutions for Fourth order O.D.E. *Riv, Math. Pura. Appl.*, 1994 14: 1129–1136

[13] Dunninger D. Existence of Positive Solutions for Fourth-order Nonlinear Problems. *Boll. Unione Math. Ital.*, 1987, 7: 1129–1138

[14] Korman P. A Maximum Principle for Fourth-order Ordinary Differential Equations. *Appl. Anal.*, 1989, 33: 267–273

[15] Sadyrbaev F. Two-point Boundary Value Problem for Fourth-order. *Acta. Univ. Latv.*, 1990, 553: 84–91

[16] Schroder J. Fourth-order Two-point Boundary Value Problems: Estimates by Two Side Bounds. *Nonl. Anal.*, 1984, 8: 107–114

[17] Ma R Y. On the Existence of Positive Solutiong of Fourth-order Ordinary Differential Equations. *Alle. Anal.*, 1995, 59: 225–231

[18] Usmami R A. A Uniqueness Theorem for a Boundary Value Problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, 59: 327–335

[19] Gulta C P. Existence and Uniqueness Results for the Bending of an Elastic Beam Equation at Resonance. *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, 135: 208–225

[20] Lian H R, Wang P G,Ge W G. Unbounded Upper and Lower Solutions Method for Sturm-Liouville Boundary Value Problem on Infinite Intervals. *Nonl. Anal.*, 2009, 70: 2627–2633

[21] Ma R Y. Multiplicity of Positive Solution for Second-order Three-point Boundary Value Problems. *Comp.Math. Appl.*, 2000, 40: 196–204

Symmetric Positive Solutions of Fourth-order Four-point Boundary Value Problems with P-Laplacian Operator

LUAN Shixia

(*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu* 273165)

(*E-mail: sxluan@mail.qfnu.edu.cn*)

ZHAO Yanling

(*Dingtao County Vocational Education Center, Dingtao* 274100)

Abstract This paper is concerned with the fourth-order singular BPVs. Under a general assumption, the existence of symmetric positive solution are obtained by the method of upper-lower solutions and Schauder's fixed point theorem. Fredholm alternative theorem and minimax theorems are invalid here and our results generalize many recent studies.

Key words P-Laplacian operator; singular boundary value problem;
lower and upper solutions; symmetric positive solution;
Schauder's fixed point theorem

MR(2000) Subject Classification 34B15

Chinese Library Classification O175.8