

四次带参 Ball 曲线的形状分析*

吴晓勤

(湖南科技大学数学与计算科学学院, 湘潭 411201)

(E-mail: xqw123@yahoo.com.cn)

韩旭里

(中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙 410083)

摘要 基于包络理论与拓扑映射的方法对四次带参 Ball 曲线进行了形状分析, 得出了曲线上含有奇点, 拐点和曲线为局部凸或全局凸的充分必要条件, 这些条件完全由控制多边形和形状参数所决定; 并进一步讨论了形状参数对形状分布图的影响及其对曲线形状的调节能力. 研究表明, 四次带参 Ball 曲线的形状调控能力要优于四次带参 Bézier 曲线.

关键词 Ball 曲线; 形状参数; 奇点; 拐点; 局部凸; 全局凸

MR(2000) 主题分类 65D17

中图分类 O241.5; TP391

1 引言

1974 年, 英国数学家 Ball^[1,2] 在 CONSURF 系统中首创一种现被称为 Ball 曲线的有理三次参数曲线, 王国瑾^[3] 和 Said^[4] 分别于 1987 和 1989 年独立提出两种不同的高次广义 Ball 曲线, 后分别被称作 Wang-Ball 曲线和 Said-Ball 曲线; 1996 年, 胡事民等将奇数次 Said-Ball 曲线推广到任意次数^[5]. 研究表明, 广义 Ball 曲线不仅具有与 Bézier 曲线类似的许多优良性质, 而且在曲线求值及升降阶的计算速度上远远优于 Bézier 曲线. 其后, 许多学者对广义 Ball 曲线进行了深入的研究^[6-9]. 因此, 在外形设计中, Ball 曲线越来越受到重视, 有着广泛的应用价值.

三次 Ball 曲线作为最基本 Ball 曲线, 具有类似于三次 Bézier 的性质, 但是给定了控制顶点后, 三次 Ball 曲线形状就确定了. 为此, 在 2008 年, 王成伟提出了带参四次 Ball 曲线^[10], 它是三次 Ball 曲线的扩展具有与三次 Ball 曲线类似的性质, 而且其形状参数调整范围大于四次带参的 Bézier 曲线^[11]. 在 CAD 实际应用中, 往往需要判断参数

本文 2010 年 5 月 22 日收到. 2011 年 6 月 17 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10871208), 湖南省教育厅资助科研项目 (08B027).

曲线段上无奇点和拐点, 以及曲线为局部凸还是全局凸, 这对曲线的造型设计是至关重要的; 同样在曲线的光顺插值中也要避免或排除多余拐点和奇异点. Yang 和 Wang 利用摆线的仿射变换方法讨论了 C-Bézier 曲线的奇点与拐点, 给出了该曲线的形状分布图^[12]. 基于包络理论和拓扑映射的方法, 吴荣军等讨论了四次带参 Bézier 曲线的奇点和拐点, 及局部凸和全局凸的形状分布^[13]. Juhász 通过固定三个控制点, 适当选择第四个控制点 (主要是端点) 的位置来产生并调控有理 Bézier 及 C-Bézier 曲线的奇点和拐点的方法^[14].

本文采用包络理论和拓扑映射的方法, 对四次带参 Ball 曲线进行了形状分析, 讨论了相应空间曲线的变挠性与平面非退化曲线的奇点, 拐点及凸性, 所得的形状分布图分为两种情况: 一种情形为形状参数 $-3 < \lambda \leq 1$, 另一种情形为形状参数 $1 < \lambda \leq 6$. 研究表明, 四次带参 Ball 曲线形状调控能力要优于四次带参的 Bézier 曲线.

2 四次带参 Ball 曲线简介

根据 [10], 给出四次带参 Ball 曲线的定义.

定义 1 给定 4 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^d$ ($d = 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$), 对 $t \in [0, 1]$, 定义曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t) \quad (1)$$

为带形状参数 λ 的四次 Ball 曲线 (简称四次带参 Ball 曲线), 其中混合函数 $B_i(t)$ 定义为

$$\begin{cases} B_0(t) = \frac{1}{3}(3 - 2\lambda t + 2\lambda t^2)(1 - t)^2, \\ B_1(t) = \frac{2}{3}(3 + \lambda - \lambda t)(1 - t)^2 t, \\ B_2(t) = \frac{2}{3}(3 + \lambda t)(1 - t)t^2, \\ B_3(t) = \frac{1}{3}(3 - 2\lambda t + 2\lambda t^2)t^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\lambda \in [-3, 6]$ 称为形状参数, 当 $\lambda = 0$ 时, $P(t)$ 是三次 Ball 曲线.

四次带参 Ball 曲线的一些性质, 具体可参看 [10], 这里补充一个性质.

性质 当 $\lambda = 6$ 时, 四次带参 Ball 曲线 $P(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 处相交于控制多边形的边向量 $P_1 P_2$ 的中点. 特别地, 当控制多边形为凸时, 曲线相切于边向量 $P_1 P_2$ 的中点.

证 易验证当 $\lambda = 6$, $t = \frac{1}{2}$ 时, 式 (2) 中 $B_0(t) = B_3(t) = 0$, $B_1(t) = B_2(t) = \frac{1}{2}$. 再对式 (2) 求导, 得 $B'_0(\frac{1}{2}) = B'_3(\frac{1}{2}) = 0$, $B'_1(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$, $B'_2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. 从而结论成立.

从上述性质可知, 四次带参 Ball 曲线具有对控制多边形最优的逼近性.

注意 四次带参 Bézier 曲线的形状参数取值范围 $\lambda \in [-1, 3]$.

3 空间四次带参 Ball 曲线的形状分析

定理 1 若 4 个控制顶点不共面, 则 i) 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 曲线 $P(t)$ 为空间曲线且无奇点和泛拐点; ii) 当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线也为空间曲线且有两个泛拐点, 其参数取值为 $t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda}})$; iii) 当 $\lambda = -3$ 时, 曲线 $P(t)$ 退化为平面曲线.

证 设 $q_i = P_i - P_{i-1}$ ($i = 1, 2, 3$), 将 $P(t)$ 改写为

$$P(t) = P_0 + [1 - B_0(t)]q_1 + [B_2(t) + B_3(t)]q_2 + B_3(t)q_3, \quad (3)$$

则有

$$P'(t) = -B_0'(t)q_1 + [B_2'(t) + B_3'(t)]q_2 + B_3'(t)q_3.$$

由式 (2) 得, 当 $0 < t < 1$ 时, $B_2'(t) + B_3'(t) = 6t(1-t) \neq 0$, 又由控制顶点不共面可知, 边向量 q_i ($i = 1, 2, 3$) 线性无关, 故 $P'(t) \neq 0$, 即 $P(t)$ 不可能有尖点.

假设曲线 $P(t)$ 有重结点, 设有 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 使得 $P(t_1) - P(t_2) = 0$, 则有

$$[B_0(t_2) - B_0(t_1)]q_1 + [B_2(t_1) + B_3(t_1) - B_2(t_2) - B_3(t_2)]q_2 + [B_3(t_1) - B_3(t_2)]q_3 = 0. \quad (4)$$

因为 q_i ($i = 1, 2, 3$) 线性无关, 所以, 由式 (4) 得

$$B_0(t_2) = B_0(t_1), \quad B_2(t_1) = B_2(t_2), B_3(t_1) = B_3(t_2).$$

对 $B_0(t)$ 求一阶导数并令之等于 0, 得 $t = 1$ (舍去), $t = \frac{5\lambda \pm \sqrt{3\sqrt{3\lambda^2 - 16\lambda}}}{8\lambda}$, 再解不等式 $0 < \frac{5\lambda \pm \sqrt{3\sqrt{3\lambda^2 - 16\lambda}}}{8\lambda} < 1$, 得 $\lambda \geq \frac{16}{3}$. 分析可知, 当 $\lambda < \frac{16}{3}$ 时, $B_0(t)$ 单调递减, 无二重点. 故当 $\lambda < \frac{16}{3}$ 时, 曲线 $P(t)$ 无重结点.

泛拐点是指空间曲线上挠率变号的点. 设 $g(t) = \det(P'(t), P''(t), P'''(t))$, 按照 [13] 计算, 则有

$$g(t) = (q_1, q_2, q_3)D(t),$$

其中 (q_1, q_2, q_3) 为边向量 q_1, q_2, q_3 的混合积, $D(t) = 16(3 + \lambda)[1 - (1 - 2t)^2\lambda]$.

i) 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 对 $0 < t < 1$, 有 $D(t) > 0$, 且 $(q_1, q_2, q_3) \neq 0$; 从而 $g(t) \neq 0$, 且与 (q_1, q_2, q_3) 同号. 所以, 曲线 $P(t)$ 无泛拐点, 并且与控制多边形具有相同的旋转方向.

ii) 当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 设 $h(t) = 1 - (1 - 2t)^2\lambda$, 可知当 $t = 0.5$ 时, $h(t)$ 有最大值 1, $t = 0, 1$ 时, $h(t)$ 有最小值 $1 - \lambda$, 而当 $t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda}})$ 时, $h(t) = 0$. 所以曲线 $P(t)$ 有两个泛拐点.

iii) 当 $\lambda = -3$ 时, $D(t) = 0$, 从而 $g(t) = 0$, 所以, $P(t)$ 为平面曲线. 实际上, 此时 $P(t) = B_0(t)P_0 + 2B_1(t)[\frac{(P_1+P_2)}{2}] + B_3(t)P_3$, 显然这是 $P_0, \frac{(P_1+P_2)}{2}, P_3$ 三点的组合, 故 $P(t)$ 退化为三阶平面曲线. 以下不讨论这种情形.

4 平面四次带参 Ball 曲线的形状分析

如果 P_0, P_1, P_2, P_3 四点共面, $P(t)$ 为平面曲线, 此时 $(q_1, q_2, q_3) = 0$.

先考虑 q_1 不平行 q_3 , 则 $q_2 = uq_1 + vq_3$, 将其代入式 (3) 得

$$P(t) = P_0 + [1 - B_0(t) + u(B_2(t) + B_3(t))]q_1 + [B_3(t) + v(B_2(t) + B_3(t))]q_3. \quad (5)$$

4.1 尖点

曲线 $P(t)$ 有尖点的必要条件是 $P'(t) = 0$ ($0 < t < 1$). 由式 (5) 得

$$[-B'_0(t) + u(B'_2(t) + B'_3(t))]q_1 + [B'_3(t) + v(B'_2(t) + B'_3(t))]q_3 = 0. \quad (6)$$

由于 q_1 与 q_3 线性无关, 据式 (6) 得参数曲线

$$C: \begin{cases} u = -\frac{3 + \lambda - 5\lambda t + 4\lambda t^2}{9t}, \\ v = -\frac{3 - 3\lambda t + 4\lambda t^2}{9(1-t)}, \end{cases} \quad 0 < t < 1. \quad (7)$$

我们讨论曲线 C 的形态. 易见曲线关于 $u = v$ 对称, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow -\infty$, $v \rightarrow -\frac{1}{3}$; 当 $t \rightarrow 1$ 时, $u \rightarrow -\frac{1}{3}$, $v \rightarrow -\infty$. 故曲线 C 有两条渐近线为 $u = -\frac{1}{3}$ 和 $v = -\frac{1}{3}$.

考察单调性和凹凸性. 对曲线 C 求一阶导数 $\frac{dv}{du} = \frac{t^2[\lambda(3-8t+4t^2)-3]}{(1-t)^2[3+\lambda(1-4t^2)]}$, 令一阶导数等于 0, 得 (实际上有 4 个根, 3 个不符合要求) $t = 1 - \frac{\sqrt{3\lambda+\lambda^2}}{2\lambda}$, 解不等式 $0 < t < 1$, 有 $\lambda > 1$. 一是说明当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线 C 在 $t = 1 - \frac{\sqrt{3\lambda+\lambda^2}}{2\lambda}$ 取得最值; 二是说明当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 曲线 C 的一阶导数不为 0, 或小于 0, 或大于 0; 取 $\lambda = 1$ 计算可知, C 的一阶导数小于 0, 因此曲线 C 为单调下降的曲线.

再对曲线 C 求二阶导数 $\frac{d^2v}{du^2} = \frac{54(3+\lambda)[\lambda(1-2t)^2-1]t^3}{(t-1)^3[\lambda(4t^2-1)-3]^3}$, 令之等于 0, 得 (实际上有 5 个根, 其中 3 个为 0, 不符合要求) $t = \frac{\sqrt{\lambda\pm 1}}{2\sqrt{\lambda}}$, 解不等式 $0 < \frac{\sqrt{\lambda\pm 1}}{2\sqrt{\lambda}} < 1$, 有 $\lambda > 1$. 又说明两点, 一是说明当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线 C 有两个拐点, 参数取值为 $t = \frac{\sqrt{\lambda\pm 1}}{2\sqrt{\lambda}}$; 二是说明当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 曲线 C 的二阶导数不为 0, 或小于 0, 或大于 0; 取 $\lambda = 1$ 计算可知, C 的二阶导数小于 0, 说明曲线 C 为严格凸的曲线.

综上, 曲线 C 分两种情形: 一是当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 曲线 C 为单调递减, 严格凸的曲线; 二是当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线 C 在 $t = 1 - \frac{\sqrt{3\lambda+\lambda^2}}{2\lambda}$ 取得最值, 且有两个拐点, 整条曲线分为三段, 中间段是凸的, 两边段是凹的.

在曲线 C 上任取一点, 记为 (u_0, v_0) , 与之对应的参数值设为 t_0 ($0 < t_0 < 1$). 由 $P(t)$ 的泰勒展开为 $P(t) = P(t_0) + P'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}P''(t_0)(t - t_0)^2 + o(t - t_0)^2$, 求得

$$P'(t) = P''(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0). \quad (8)$$

式(8)中 $P''(t_0) \neq 0$, 若不然, 对式(6)再求一次导, 有

$$[-B_0''(t) + u(B_2''(t) + B_3''(t))]q_1 + [B_3''(t) + v(B_2''(t) + B_3''(t))]q_3 = 0. \quad (9)$$

据式(9)又可得与式(7)类似的参数方程, 比较两个参数方程, 可知 λ 无解. 故 $P'(t)$ 经过 t_0 时方向反变, 所以曲线 C 是尖点条件曲线.

4.2 拐点

曲线 $P(t)$ 的副法向量为 $P'(t) \times P''(t)$, 经计算有

$$P'(t) \times P''(t) = f(t; u, v)(q_1 \times q_2), \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} f(t; u, v) = & -\det \begin{pmatrix} B_0'(t) & B_3'(t) \\ B_0''(t) & B_3''(t) \end{pmatrix} + u \det \begin{pmatrix} B_2'(t) & B_3'(t) \\ B_2''(t) & B_3''(t) \end{pmatrix} \\ & + v \det \begin{pmatrix} B_0'(t) & B_1'(t) \\ B_0''(t) & B_1''(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

点 $P(t_0)$ ($0 < t_0 < 1$) 是拐点当且仅当 $f(t; u, v)$ 经过 t_0 时变号. 而在 uv -平面, 使得 $P(t)$ 有拐点的可能区域必为直线族 $f(t; u, v) = 0$ 所覆盖, 由包络理论知, 此直线族的包络为

$$\begin{cases} f(t; u, v) = 0, \\ f'(t; u, v) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

对式(12)计算, 得式(7), 说明直线族的包络正好是曲线 C .

由前面对曲线 C 的形态讨论可知, 曲线 C 与形状参数 λ 的取值范围有关, 以下对 λ 分两种情况讨论拐点情形.

4.2.1 $-3 < \lambda \leq 1$

当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, C 的切线所扫过的区域为 $S \cup D \cup C$, 如图1所示, 此即为所求的可能拐点区域. D 区域是由两条渐近线为 $u = -\frac{1}{3}, v = -\frac{1}{3}$ 和曲线 C (不含 C) 所围部分, S 区域包括两部分, 一部分是两条渐近线相交的左上部分, 另一部分是两条渐近线相交的右下部分.

当 $(u_0, v_0) \in C$ 时, 设对应的参数为 t_0 , 由泰勒展开, 得

$$f(t; u, v) = \frac{1}{2} f''_{tt}(t_0; u_0, v_0)(t - t_0)^2 + o(t - t_0)^2, \quad (13)$$

其中 $f''_{tt}(t_0; u_0, v_0) = \frac{8(3+\lambda)[\lambda(1-2t_0)^2-1]}{3t_0(1-t_0)}$.

由于 $-3 < \lambda \leq 1$, 显然 $f''_{tt}(t_0; u_0, v_0) \neq 0$, 可知 $f(t; u_0, v_0)$ 经过 t_0 时不变号, 故 $P(t_0)$ 不是拐点.

当 $(u_0, v_0) \in S \cup D$ 时, 设过点 (u_0, v_0) 与曲线 C 相切的直线之一为 $f(t; u, v) = 0$, 其中 t_0 为切点对应的参数, 则由

$$f(t; u_0, v_0) = f'_t(t_0; u_0, v_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

可知 $f'_t(t_0; u_0, v_0) \neq 0$ (因若 $f'_t(t_0; u_0, v_0) = 0$, 则由包络定义知 $(u_0, v_0) \in C$), 从而 $f(t; u_0, v_0)$ 经过 t_0 时变号, 故 $P(t_0)$ 是拐点. 进一步, 当 $(u_0, v_0) \in S$ 时, 过此点只能作曲线 C 的一条切线, 对应 $P(t)$ 只有一个拐点; 当 $(u_0, v_0) \in D$ 时, 过此点可作曲线 C 的两条切线, 对应 $P(t)$ 有 2 个拐点.

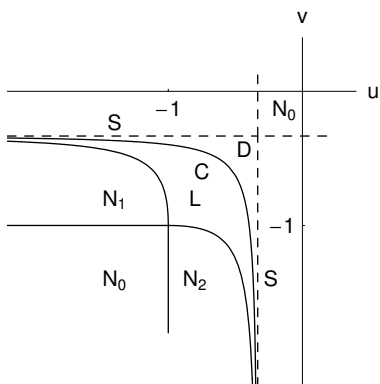


图 1 四次带参 Ball 曲线的形状图 ($\lambda = 1$)

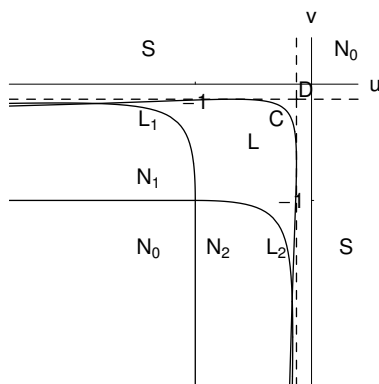


图 2 四次带参 Ball 形状图 ($\lambda = 4$)

4.2.2 $1 < \lambda \leq 6$

当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, C 的切线所扫过的区域为 $S \cup D \cup C$, 如图 2 所示, 此即为所求的可能拐点区域. D 区域 (曲边三角形区域) 是由由两条过 C 曲线的最大值点的切线

$$v = \frac{\lambda(5\sqrt{(3+\lambda)\lambda} - 4\lambda - 12)}{9\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}, \quad u = \frac{\lambda(5\sqrt{(3+\lambda)\lambda} - 4\lambda - 12)}{9\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}$$

和曲线 C (不含 C) 所围部分, S 区域包括两部分, 一部分是两条切线相交的左上部分, 另一部分是两条切线相交的右下部分.

当 $(u_0, v_0) \in C$ 时, 对应的参数为 t_0 , 类似于 $-3 < \lambda \leq 1$ 时的讨论, 也有式 (13) 泰勒展开, 当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 显然当 $t_0 = \frac{\sqrt{\lambda+1}}{2\sqrt{\lambda}}$, 有 $f''_{tt}(t_0; u_0, v_0) = 0$, 可知 $f(t; u_0, v_0)$ 经过 t_0 时变号, 故 $P(t_0)$ 是拐点. 从而可知, 在尖点曲线 C 有两个特殊点, 既是尖点, 又是拐点.

当 $(u_0, v_0) \in S \cup D$ 时, 完全与 $-3 < \lambda \leq 1$ 时的讨论相同, 当 $(u_0, v_0) \in S$ 时, 过此点只能作曲线 C 的一条切线, 对应 $P(t)$ 只有一个拐点; 当 $(u_0, v_0) \in D$ 时, 过此点可作曲线 C 的两条切线, 对应 $P(t)$ 有 2 个拐点.

4.3 重结点

曲线 $P(t)$ 有重结点, 当且仅当存在 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 使得 $P(t_1) = P(t_2)$, 这等价于 u, v, t_1, t_2 满足方程组

$$\begin{cases} u = \frac{B_0(t_2) - B_0(t_1)}{B_2(t_2) + B_3(t_2) - B_2(t_1) - B_3(t_1)}, \\ v = \frac{B_3(t_1) - B_3(t_2)}{B_2(t_2) + B_3(t_2) - B_2(t_1) - B_3(t_1)}, \end{cases} \quad (t_1, t_2) \in \Delta, \quad (14)$$

其中 $\Delta = \{(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1\}$.

容易验证, 式 (14) 定义了一个拓扑映射 $F: \Delta \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow F(\Delta) \subset \mathbf{R}^2$, 因此象域 $L = F(\Delta)$ 是 uv -平面上单连通区域, 象域 L 的 3 条边界线与定义域 Δ 的 3 条边界线 $t_1 = t_2$, $t_1 = 0$ 和 $t_2 = 1$ 相对应, 即分别为曲线 C (不属于 L), L_1 和 L_2 (都属于 L). L 中点 (u_0, v_0) 所对应曲线 $P(t)$ 有且仅有一个二重结点, 其中 L_1 和 L_2 的参数方程分别为

$$L_1: \begin{cases} u = \frac{6 - 3t + 2(1-t)^3\lambda}{3t(2t-3)}, \\ v = \frac{3 - 2(1-t)t\lambda}{3(2t-3)}, \end{cases} \quad 0 < t \leq 1,$$

$$L_2: \begin{cases} u = \frac{-3 + 2(1-t)t\lambda}{3(2t+1)}, \\ v = -\frac{3 + 3t + 2t^3\lambda}{3(1+t-2t^2)}, \end{cases} \quad 0 \leq t < 1.$$

易见曲线 L_1 和 L_2 是关于 $u = v$ 对称. 所以只需讨论曲线 L_1 和 L_2 中一条曲线的属性. L_1 和 L_2 相交于点 $(-1, -1)$, L_1 以 $v = -\frac{1}{3}$ 为渐近线, L_2 以 $u = -\frac{1}{3}$ 为渐近线.

按照 4.1 节讨论曲线 C 的形态相同方法, 对曲线 L_1 有, 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 曲线 L_1 为单调下降, 严格凸的曲线; 当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线 L_1 在 $t = \frac{3\lambda - \sqrt{3}\sqrt{2\lambda + \lambda^2}}{2\lambda}$ 取得最大值, 有一个拐点.

再讨论 C 与 L_1 的关系有, 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, C 与 L_1 无交点; 当 $1 < \lambda \leq 6$, C 与 L_1 有一个交点, 此点可称之为二重尖点.

4.4 凸性

按照 [15, 16] 对曲线凸性讨论可知, 当 $(u, v) \in N = \mathbf{R}^2 \setminus (C \cup S \cup D \cup L)$ 时, 曲线 $P(t)$ 无尖点, 重结点和拐点, 并且此时 $P'(t) \times P''(t)$ 不发生方向改变. 再考虑 $m(t) = P'(0) \times (P(t) - P(0))$, $n(t) = (P(t) - P(0)) \times P'(t)$, 由式 (5) 计算得

$$m(t) = \varphi(t; u, v)(q_1 \times q_3), \quad n(t) = \psi(t; u, v)(q_1 \times q_3),$$

其中

$$\varphi(t; u, v) = \left(2 + \frac{2}{3}\lambda\right) [B_3(t) + v(B_2(t) + B_3(t))]$$

$$= \frac{2}{9}(3+\lambda)t^2[3-2\lambda(1-t)t+3(3-2t)v], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi(t; u, v) &= \frac{2}{9}t^2[9t^2-3\lambda t^2(3-2t(3-t))]u \\ &\quad + \frac{2}{9}t^2[27-36t+9t^2+3\lambda(1-t)^2(3+2t(1-t))]v \\ &\quad + \frac{2}{9}t^2[9+3\lambda-12\lambda t+12\lambda t^2-4\lambda^2 t(1-t)^3]. \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (15) 可知, 当

$$v_0 = -\frac{B_3(t_0)}{B_2(t_0)+B_3(t_0)} = \frac{3-2\lambda t_0(1-t_0)}{3(2t_0-3)},$$

$m(t)$ 经过 t_0 时方向反变. 再求 v_0 关于 t_0 的一阶导数并令之等于 0, 得 $t_0 = \frac{3\lambda - \sqrt{3}\sqrt{2\lambda + \lambda^2}}{2\lambda}$, 解不等式 $0 < t_0 < 1$, 有 $\lambda > 1$. 又说明两点, 一是说明当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 曲线 v_0 在 t_0 取最大值 $\frac{\lambda(2\sqrt{3}\sqrt{2\lambda + \lambda^2} - 3\lambda - 6)}{3\sqrt{3}\sqrt{\lambda(2+\lambda)}}$, 易得 v_0 的取值范围为 $(-1, \frac{\lambda(2\sqrt{3}\sqrt{2\lambda + \lambda^2} - 3\lambda - 6)}{3\sqrt{3}\sqrt{\lambda(2+\lambda)}})$, 所以当 $(u, v) \in N_1$ (如图 2 所示), $P(t)$ 为局部凸. 二是说明当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, v'_0 不为 0, 或小于 0, 或大于 0; 取 $\lambda = 1$ 计算可知 $v'_0 < 0$, 易得 v_0 的取值范围 $(-1, -\frac{1}{3})$, 所以当 $(u, v) \in N_1$ (如图 1 所示), $P(t)$ 为局部凸. 实际上 N_1 恰好是 L_2 的切线所覆盖区域在 N 中部分.

再由对称性或直线族 $\psi(t, u, v)$ 的包络, 可得当 $(u, v) \in N_2$ 时 (如图 1, 2 所示), $P(t)$ 为局部凸. 从而当 $(u, v) \in N_0 = N \setminus (N_1 \cup N_2)$ 时, $P(t)$ 为全局凸.

最后, 当 $q_1 \parallel q_3$, 记 $q_3 = \mu q_1$, 以 q_1, q_2 为平面的基向量. 据式 (3), 得

$$P(t) = P_0 + (1 - B_0(t) + \mu B_3(t))q_1 + (B_2(t) + B_3(t))q_2.$$

类似于 4.1-4.3 节的讨论, 可得: 曲线 $P(t)$ 无尖点, 二重点: 当且仅当 $\mu > 0$ 即 q_1 与 q_3 方向相同 (不包括 4 点共线) 时, $P(t)$ 有且只有一个拐点.

定理 2 当 $q_1 \parallel q_3$, 平面四次带参 Ball 曲线 $P(t)$ 无尖点, 二重点; 当且仅当 q_1 与 q_3 方向相同时, $P(t)$ 有且只有一个拐点. 当 q_1 不平行 q_3 时, 设 $q_2 = uq_1 + vq_3$, 则

i) 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, $P(t)$ 的形状特征取决于点 (u, v) 在 uv -平面的如下分布 (如图 1 所示), 即

$$(u, v) \in \begin{cases} N_0(\text{含边界}\{(u, -\frac{1}{3})|u \geq -\frac{1}{3}\} \cup \{(-\frac{1}{3}, v)|v \geq -\frac{1}{3}\} \cup \{(u, -1)|u \leq -1\} \\ \cup \{(-1, v)|v \leq -1\}) : P(t) \text{为全局凸曲线, 无奇点和拐点;} \\ N_1 \cup N_2 : P(t) \text{为局部凸曲线, 无尖点和重结点;} \\ S(\text{含边界}\{(u, -\frac{1}{3})|u < -\frac{1}{3}\} \cup \{(-\frac{1}{3}, v)|v < -\frac{1}{3}\}) : P(t) \text{有一个拐点, 无奇点;} \\ D : P(t) \text{有 2 个拐点, 无尖点和重结点;} \\ C : P(t) \text{有 1 个尖点, 无拐点和重结点;} \\ L(\text{含边界}L_1 \text{和}L_2) : P(t) \text{有一个重结点, 无尖点和拐点.} \end{cases}$$

ii) 当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, $P(t)$ 的形状特征取决于点 (u, v) 在 uv -平面的如下分布 (如

图 2 所示), 即

$$(u, v) \in \left\{ \begin{array}{l} N_0(\text{含边界}\{(u, \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}})|u \geq \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}\}) \\ \cup \{(\frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}, v)|v \geq \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}\} \cup \{(u, -1)|u \leq -1\} \\ \cup \{(-1, v)|v \leq -1\} : P(t) \text{为全局凸曲线, 无奇点和拐点;} \\ N_1 \cup N_2 : P(t) \text{为局部凸曲线, 无奇点和重结点;} \\ S(\text{含边界}\{(u, \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}})|u < \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}\}) \\ \cup \{(\frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}, v)|v < \frac{\lambda(5\sqrt{\lambda(3+\lambda)}-4\lambda-12)}{2\sqrt{\lambda(3+\lambda)}}\}) : P(t) \text{有一个拐点, 无奇点;} \\ D : P(t) \text{有 2 个拐点, 无尖点和重结点;} \\ C : P(t) \text{有 1 个尖点, 无拐点和重结点;} \\ L(\text{含边界}L_1 \text{和}L_2) : P(t) \text{有一个重结点, 无尖点和拐点.} \end{array} \right.$$

5 形状参数对形状图的影响及其对曲线形状的调节

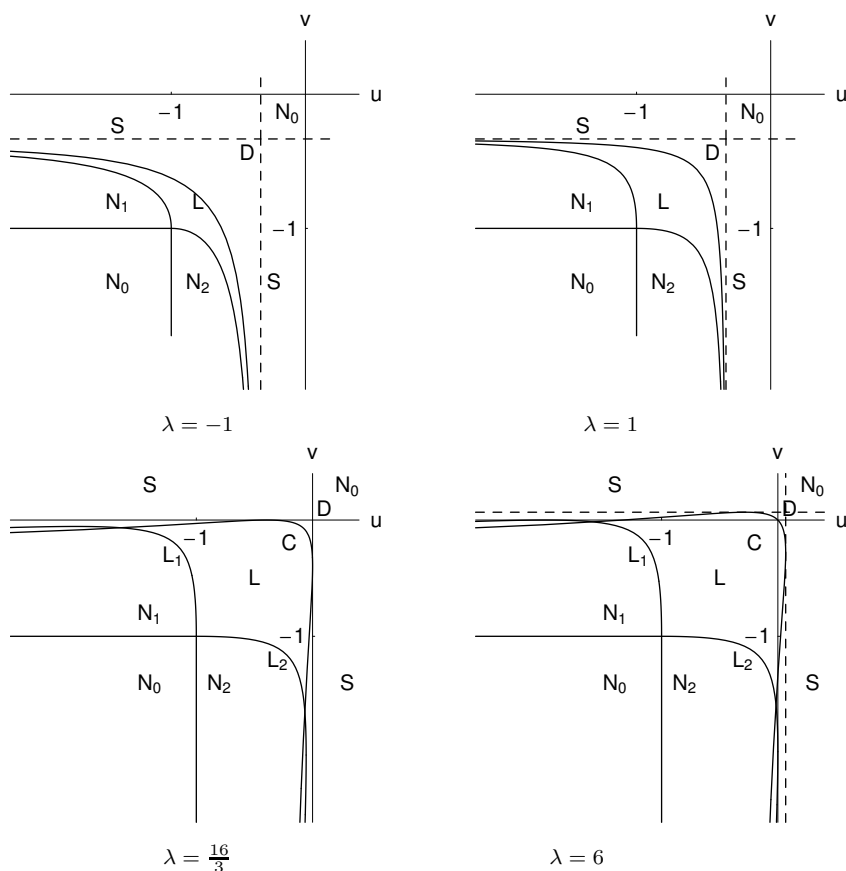


图 3 形状参数 λ 对 N_0, N_1, N_2, L, D 和 C 的影响

根据定理 2, 我们讨论形状参数对曲线的形状影响. 有以下结论:

结论 1 如图 3 所示, 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 改变形状参数 λ 不影响单拐点区域 S 和全局凸区域 N_0 ; 但是 $1 < \lambda \leq 6$ 当时, 改变形状参数 λ 不仅影响单拐点区域 S , 也影响全局凸区域 N_0 . 所以, 当 $P(t)$ 上仅有一个拐点时, 有可能通过调节形状参数消除它; 如果 $P(t)$ 是全局凸的曲线, 也有可能通过调节形状参数使曲线变化为尖点曲线或重结点曲线.

结论 2 当 $-3 < \lambda \leq 1$ 时, 随着形状参数 λ 不断的增大, 曲线 C 被朝向点 $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 方向拉伸, L_1 朝向点 $(-1, -\frac{1}{3})$ 方向拉伸, L_2 被朝向点 $(-\frac{1}{3}, -1)$ 方向拉伸, 双拐点区域 D 缩小, 重结点区域 L 相应扩大, 局部凸区域 N_1 和 N_2 扩大. 而当 $1 < \lambda \leq 6$ 时, 尖点曲线 C 及两条重结点曲线 L_1 和 L_2 均突破渐近线 $u = -\frac{1}{3}, v = -\frac{1}{3}$, 随着形状参数 λ 的增大, 双拐点区域 D 越来越小, 重结点区域 L 相应变大, 单拐点区域 S 和全局凸区域 N_0 变小, 局部凸区域 N_1 和 N_2 相应增大.

结论 3 当 $(u, v) \in \{(u, v) | -1 \leq u, v < 0\} \setminus \{(-1, -1)\}$, 即控制多边形首末 2 条边相交 (首末端点重合除外) 时, 在不同的形状参数下, 曲线 $P(t)$ 可能出现奇点或双拐点或单拐点, 也有可能为全局凸, 但是不能为局部凸, 如图 4 所示, 图 4 中 4 个控制顶点的坐标为 $(1.0, 1.0), (3.0, 2.0), (1.5, 1.5), (3.0, 1.0)$, 其中单拐点曲线的 $\lambda = 1$, 尖点曲线的 $\lambda = 3.3$, 重结点曲线的 $\lambda = 6$.

结论 4 当 $(u, v) \in \{(u, v) | u < -1, -1 < v\} \cup \{(u, v) | -1 < u, v < -1\}$, 即控制多边形为局部凸时^[16], 曲线 $P(t)$ 可能出现奇点或双拐点或单拐点, 调节形状参数 λ 可将曲线调节为局部凸或全局凸, 如图 5 所示, 图 5 中 4 个控制顶点的坐标为 $(3.0, 1.0), (1.0, 2.0), (3.0, 2.0), (2.26, 1.6)$, 其中双拐点曲线的 $\lambda = -2$, 尖点曲线的 $\lambda = -1$, 重结点曲线的 $\lambda = 0$, 局部凸曲线的 $\lambda = 4$.

从上述结论与 [13] 比较可知, 四次带参 Ball 曲线形状调控能力要优于四次带参的 Bézier 曲线, 主要是因为四次带参 Ball 曲线的形状参数的范围 $\lambda \in [-3, 6]$, 而四次带参的 Bézier 曲线形状参数的范围 $\lambda \in [-3, 1]$, 从而当 $\lambda \in [1, 6]$ 时, 四次带参 Ball 曲线对曲线有额外的调控能力.

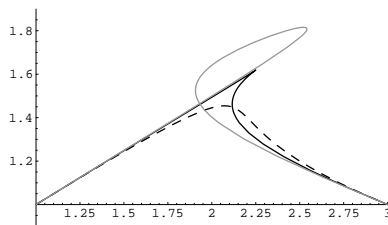


图 4 单拐点, 尖点和重结点的曲线

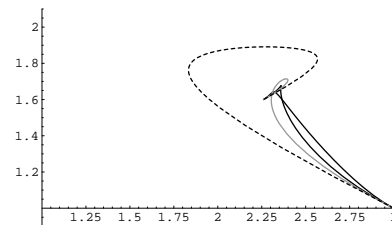


图 5 消除双拐点, 尖点或重结点曲线为局部凸

参 考 文 献

- [1] Ball A A. CONSURF Part 1: Introduction of the Conic Lofting Title. *Computer Aided Design*, 1974,

- 6(4): 243–349
- [2] Ball A A. CONSURF Part 2: Description of the Algorithms. *Computer Aided Design*, 1975, 7(4): 237–242
- [3] 王国瑾, 高次 Ball 曲线及其几何性质. 高校应用数学学报, 1987, 2(1): 126–140
(Wang Guojin. Ball Curve of High Degree and its Geometric Properties. *A J. of Chinese Universities Applied Mathematics*, 1987, 2(1): 126–140)
- [4] Said H B. A Generalized Ball Curve and its Recursive Algorithm. *ACM Transactions on Graphics*, 1989, 4(8): 360–378
- [5] Hu S M, Wang G Z, Jin T G. Properties of Two Types of Generalized Ball Curves. *Computer Aided Design*, 1996, 28(2): 125–133
- [6] 邬弘毅, 三角域上广义 Ball 曲面及 Marsden 恒等式. 合肥工业大学学报, 1998, 21(5): 1–8
(Wu Hongyi. Generalized Ball Surface on Triangle Domain and Marsden Identity. *J. of Hefei University of Technology*, 1998, 21(5): 1–8)
- [7] 王国瑾, 蒋素荣. 两类新的广义 Ball 曲线曲面的求值算法及其应用. 应用数学学报, 2004, 27(1): 52–63
(Wang Guojin, Jiang Surong. The Algorithms for Evaluating Two New Types of Generalized Ball Curves/Surfaces and Their Applications. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2004, 27(1): 52–63)
- [8] 沈莞蕾, 汪国昭. Ball 基的推广. 软件学报, 2005, 16(11): 1992–1999
(Shen Wanqiang, Wang Guozhao. Extension of the Ball Basis. *Journal of Software*, 2005, 16(11): 1992–1999)
- [9] Delgado J, Peña J M. On the Generalized Ball Bases. *Advances in Computational Mathematics*, 2006, 24(1): 263–280
- [10] 王成伟. 三次 Ball 曲线的扩展. 工程图学学报, 2008, 29(1): 77–81
(Wang Chengwei. Extension of Cubic Ball Curve. *Journal of Engineering Graphics*, 2008, 29(1): 77–81)
- [11] 吴晓勤. 带形状参数的 Bézier 曲线. 中国图象图形学报, 2006, 11(2): 269–274
(Wu Xiaoqin. Bézier Curve with Shape Parameter. *Journal of Image and Graphics*, 2006, 11(2): 269–274)
- [12] Yang Q M, Wang G Z. Inflection Points and Singularities on C-curves. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(2): 207–213
- [13] 吴荣军等. 四次带参 Bézier 曲线的形状分析. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(6): 725–729
(Wu Rongjun et al. Shape Analysis of Quartic Bézier Curve with Shape Parameter. *J. of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2009, 21(6): 725–729)
- [14] Juhász I. On the Singularity of a Class of Parametric Curves. *Computer Aided Geometric Design*, 2006, 23(2): 146–156
- [15] Liu Chao-Yang, Traas C R. On Convexity of Planar Curves and its Application in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(7): 653–669
- [16] Liu C Y. Theory and Application of Convex Curves and Surfaces in CAGD. Enschede: University of Twente, 2001

Shape Analysis of Quartic Ball Curve with Shape Parameter

WU XIAOQIN

*(School of Mathematics & Computation Science,
Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201)
(E-mail: xqwu123@yahoo.com.cn)*

HAN XULI

(School of Mathematical Science & Computing Technology, Central South University, Changsha 410083)

Abstract This paper considers the shape features of the quartic Ball curve with shape parameter based on the theory of envelop and topological mapping. Necessary and sufficient conditions are derived for this curve having one or two inflection points, a loop or a cusp, or be locally or globally convex. Those conditions are completely decided by control polygon and the shape parameter. Furthermore we discussed the influences of shape parameter on the shape distribution diagram and the ability for adjusting the shape of the curve. The results show that the shape adjustment of quartic Ball curve with shape parameter is superior to the quartic Bézier curve with shape parameter.

Key words Ball curve; shape parameter; singularities; inflection points; local convexity; global convexity

MR(2000) Subject Classification 65D17

Chinese Library Classification O241.5; TP391