带干扰phaes-type风险模型中的最大盈余及相关分布 *

江五元

(湖南理工学院数学学院，岳阳 414006)

(E-mail: csujw@163.com)

摘　要　本文考虑了索赔时间间距为 phase-type 分布时带干扰更新风险模型中的破产前最大盈余、破产后赤字的分布，建立了相应的积分－微分方程. 最后，讨论了当索赔时间间距为 Erlang (2) 分布且索赔量满足指数分布时的特殊情形.

关键词　phase-type 分布；干扰风险过程；破产前最大盈余；破产后盈余分布；积分－微分方程

MR(2000) 主题分类　91B30; 62P05

中图分类　O211.6

1　引言

考虑干扰更新盈余过程

$$R(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i+\sigma B(t),\qquad t\geq 0,\tag{1.1}$$

这里 $u\geq 0$ 是初始资金，常数 c 是单位时间的保费收入， $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的非负随机变量列， X_i 表示第 i 次索赔量，具有分布函数 $P(x)$ 和连续的密度函数 $p(x)$, 及有限均值 $\frac{1}{\mu}>0$. $p(x)$ 的拉氏变换为 $\widetilde{p}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}p(x)\,\mathrm{d}x$. 计数过程 $\{N(t);\ t\geq 0\}$ 表示到时刻 t 时的索赔次数，定义 $N(t)=\sup\{k:T_1+T_2+\cdots+T_k\leq t\}$, T_i 表示第 $i-1$ 次与第 i 次索赔的时间间距，设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的随机变量列，具有共同的分布函数 K 和密度函数 k, $\sigma\geq 0$, $\{B(t):t\geq 0\}$ 是标准的 Brown 运动，假设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B(t):t\geq 0\}$ 和 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是相互独立的且有正的安全负荷条件： $cE(T_1)>E(X_1)$.

定义破产时刻 $T=\inf\{t\geq 0:R(t)<0\}$ (若对所有的 $t\geq 0$ 有 $R(t)\geq 0$, 则 $T=\infty$)

本文 2011 年 4 月 20 日收到.

* 湖南省教育厅 (10C0754) 资助项目.

和最终破产概率 $\psi(u) = E(I(T < \infty)|R(0) = u)$, 其中 $I(A)$ 表示集合 A 的示性函数，即 A 发生，则 $I(A) = 1$; 否则，等于 0.

对于带干扰风险模型，许多作者对其进行了研究，如 [1,2] 分别讨论了带阈值分红策略时索赔时间间距为指数分布与广义 Erlang (n) 分布时的红利问题与 Gerber-Shiu 折现罚函数.

在本文中，假设索赔时间间距 T_i, $i = 1, 2, \cdots$ 的分布函数 K 服从 $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{B})$ 分布，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\mathcal{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是 $n \times n$ 矩阵，满足 $b_{ii} < 0$, 当 $i \neq j$ 时， $b_{ij} \neq 0$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} \leq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 令 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 且 $\mathbf{b}^T = -\mathcal{B}\mathrm{e}^T$, e 是分量均为 1 的行向量， e^T 是 e 的转置， $\imath$ 表示单位矩阵. 由 Asmussen[3]:

$$K(t) = 1 - \boldsymbol{\alpha} e^{\mathcal{B}t} \mathrm{e}^T, \qquad t \geq 0,$$

$$k(t) = \boldsymbol{\alpha} e^{\mathcal{B}t} \mathbf{b}^T, \qquad t \geq 0$$

和

$$\widetilde{k}(s) = \int_0^\infty e^{-st} k(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{\alpha}(s\imath - \mathcal{B})^{-1} \mathbf{b}^T. \tag{1.2}$$

由 phase-type 分布的定义，索赔时间间距 T_i, $i = 1, 2, \cdots$ 对应于终止连续时间马氏链 $\{J_t^i\}_{t \geq 0}$ 到达吸收状态的时间，其中 $\{J_t^i\}_{t \geq 0}$ 有 n 个瞬时状态 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ 和一个吸收态 $\{E_0\}$.

[4–6] 分别考虑了无干扰条件时，索赔时间间距是 phase-type 分布时的 Gerber-Shiu 折现罚函数和破产前盈余与破产时赤字的联合分布.

定义

$$\xi(u, b) = P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} R(t) < b,\ T < \infty \mid R(0) = u\Big), \qquad b > u \geq 0, \tag{1.3}$$

则 $\xi(u, b)$ 表示初始资金为 u 时，破产前盈余小于 b 时的破产概率，或称为破产前最大盈余分布. 显然，当 $b \leq u$ 时， $\xi(u, b) = 0$. 令

$$\iota^b = \inf\{t > 0 : R(t) \geq b | R(0) = u\}, \qquad 0 \leq u < b,$$

为盈余上穿 b 时的首达时间，及

$$\chi(u, b) = P(T > \iota^b | R(0) = u),$$

则有:

$$\chi(u, b) = 1 - \xi(u, b). \tag{1.4}$$

Li 和 Dickson[7] 得到了无干扰且索赔时间间距为 Erlang (n) 分布时的破产前最大盈余的积分 - 微分方程， Wang 和 Wu[8] 则考虑了模型 (1.1) 在索赔时间间距是指数分布时最大盈余及破产后盈余等一些量的分布，并得到了相应的带边界值条件的积分 - 微

分方程．本文针对模型 (1.1) 研究了索赔时间间距为 phase-type 分布时的破产前最大盈余、破产后赤字的分布，得到了比 [7–8] 更一般的结论．

2 主要结果

定义：

$$J(t)=J_t^1,\quad 0\le t<T_1,\qquad J(t)=J_{t-T_1}^2,\quad T_1\le t<T_1+T_2,\cdots,$$

所以，$\{J(t);\ t\ge 0\}$ 是状态空间为 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 的马氏链．若对于某个 $q\in N^+$，有 $J(s)=J^q_{(s-T_1-T_2-\cdots-T_{q-1})}$，则 $J(s)$ 由状态 E_i 转移到 E_j，$i\ne j,\ i,j=1,2,\cdots,n$，可以分解为 $\{J_t^q;\ t\ge 0\}$ 由状态 E_i 不经过吸收态直接转移到 E_j，此时转移强度为 b_{ij} 或 $\{J_t^q;\ t\ge 0\}$ 由状态 E_i 进入吸收态，而 $\{J_t^{q+1};\ t\ge 0\}$ 从状态 E_j 开始，此时转移强度为 $b_i\alpha_j$，因此，$J(s)$ 由状态 E_i 转移到 E_j 的强度为 $b_{ij}+b_i\alpha_j$．

令

$$\xi_i(u,b)=P\Big(\sup_{0\le t\le T}R(t)<b,\ T<\infty|R(0)=u,\ J_0^1=E_i\Big),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

所以，$\xi(u,b)=\boldsymbol{\alpha}\xi(u,b),\ \xi(u,b)=(\xi_1(u,b),\cdots,\xi_n(u,b))^T$．

定理 2.1 向量 $\xi(u,b)$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\xi^{''}(u,b)+c\xi^{'}(u,b)+\mathcal{B}\xi(u,b)+\left[\int_0^u\boldsymbol{\alpha}\xi(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u)\right]\mathbf{b}^T\\&=\mathbf{0},\qquad 0\le u<b,\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $\overline{P}(u)=\int_u^\infty p(x)\,\mathrm{d}x$，$\mathbf{0}$ 是分量均为 0 的列向量．

证 在极小的时间段 $[0,h]$ 内，有下列三种可能情形：

1. 在 $[0,h]$ 内没有发生状态转移；
2. 在 $[0,h]$ 内有状态转移，但没有索赔发生；
3. 在 $[0,h]$ 内至少有一次索赔发生．

所以，有

$$\begin{aligned}&\xi_i(u,b)\\&=(1+b_{ii}h)E[\xi_i(u+ch+\sigma B(h),b)]+\sum_{k=1,k\ne i}^n(b_{ik}h)E[\xi_k(u+ch+\sigma B(h),b)]\\&\quad+b_ih\Big[\sum_{f=1}^n\alpha_f\int_0^{u+ch+\sigma B(h)}\xi_f(u+ch+\sigma B(h)-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u+ch+\sigma B(h)}^\infty p(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\&\quad+o(h),\end{aligned}\tag{2.2}$$

由 Taylor 公式:

$$
\begin{aligned}
&\xi_i(u+ch+\sigma B(h),b)\\
=&\xi_i(u,b)+\xi_i^{'}(u,b)(ch+\sigma B(h))+\frac{1}{2}\xi_i^{''}(u,b)(ch+\sigma B(h))^2\\
&+\frac{1}{6}\xi_i^3(u^*,b)(ch+\sigma B(h))^3, \qquad u^*\in[u,u+ch+\sigma B(h)],
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

注意到:

$$
E[B(h)]=E[B^3(h)]=0, \qquad E[B^2(h)]=\mathrm{Var}\,[B(h)]=h.
$$

所以，将 (2.3) 代入 (2.2), 并令 $h\to 0$, 整理后得:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\xi_i^{''}(u,b)+c\xi_i^{'}(u,b)+b_{ii}\xi_i(u,b)+\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(b_{ik}h)\xi_k(u,b)\\
&+b_i\Big[\sum_{f=1}^{n}\alpha_f\int_0^u\xi_f(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u)\Big]=0,
\end{aligned}
$$

将上式写成矩阵形式为:

$$
\frac{\sigma^2}{2}\xi^{''}(u,b)+c\xi^{'}(u,b)+\mathcal{B}\xi(u,b)+\Big[\int_0^u\boldsymbol{\alpha}\xi(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u)\Big]\mathbf{b}^T=\mathbf{0}.
$$

证毕.

注 2.1 当 $\sigma=0$, 索赔时间间距分布是广义 Erlang (n) 分布时，即

$$
\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0), \quad \mathcal{B}=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\lambda_n\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.
$$

由 (2.1), 当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时，有

$$
\lambda_i\xi_i(u,b)-c\xi_i^{'}(u,b)=\lambda_i\xi_{i+1}(u,b),
$$

$i=n$ 时,

$$
\lambda_n\xi_n(u,b)-c\xi_n^{'}(u,b)=\lambda_n\Big[\int_0^u\xi_1(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u)\Big],
$$

上面两式可以重写为:

$$
\prod_{i=1}^{n}\Big(\mathcal{I}-\frac{c}{\lambda_i}\mathcal{D}\Big)\xi_n(u,b)=\int_0^u\xi_1(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u). \tag{2.4}
$$

其中， $\mathcal{I},\mathcal{D}$ 分别表示关于 u 的恒等算子和微分算子. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时， (2.4) 即为 [7] 中的 (2.6) 式.

定义

$$\zeta(u,b)=P\Big(\sup_{0\le t\le T}R(t)\ge b,\ T<\infty|R(0)=u\Big),\qquad b>u\ge 0,$$

表示当破产发生时，破产前盈余过程的最大值达到或超过 b 的概率．显然有

$$\zeta(u,b)=\begin{cases}0, & u\le 0,\ b>0,\\ \Psi(u), & u\ge b>0.\end{cases}$$

同样，令

$$\zeta_i(u,b)=P\Big(\sup_{0\le t\le T}R(t)<b,\ T<\infty|R(0)=u,\ J_0^1=E_i\Big),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

所以，$\zeta(u,b)=\boldsymbol{\alpha\zeta}(u,b),\ \boldsymbol{\zeta}(u,b)=(\zeta_1(u,b),\cdots,\zeta_n(u,b))^T$.

$$\Psi_i(u,b)=P\big(T<\infty\mid R(0)=u,\ J_0^1=E_i\big),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\Psi(u,b)=\boldsymbol{\alpha\Psi}(u,b),\ \boldsymbol{\Psi}(u,b)=(\Psi_1(u,b),\cdots,\Psi_n(u,b))^T$. 因此，有

$$\xi(u,b)+\zeta(u,b)=\Psi(u,b).$$

因为，$\lim\limits_{b\to\infty}\xi(u,b)=\Psi(u)$, 所以 $\boldsymbol{\Psi}(u,b)$ 满足方程 (2.1). 故有下面结论：

定理 2.2 向量 $\boldsymbol{\zeta}(u,b)$ 满足

$$\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\zeta}''(u,b)+c\boldsymbol{\zeta}'(u,b)+\mathcal{B}\boldsymbol{\zeta}(u,b)+\mathbf{b}^T\int_0^u\boldsymbol{\alpha\zeta}(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x=\mathbf{0},\qquad 0\le u<b.\qquad(2.5)$$

注 2.2 当 phase-type 分布退化为参数为 λ 的指数分布时，(2.5) 式即为 [8] 的 (2.12) 式.

定义 $\kappa(u,y)=P(T<\infty,R(T)\ge -y|R(0)=u),\ y>0$. $\kappa(u,y)$ 表示破产后保险公司的盈余落在 $[-y,0)$ 中的概率，可知 $\kappa(u,y)=I_{[0.y]}(-u),\ u\le 0,\ \kappa(\infty,y)=0$. 令

$$\kappa_i(u,y)=P\big(T<\infty,\ R(T)\ge -y|R(0)=u,\ J_0^1=E_i\big),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

所以，$\kappa(u,y)=\boldsymbol{\alpha\kappa}(u,y),\ \boldsymbol{\kappa}(u,y)=(\kappa_1(u,y),\cdots,\kappa_n(u,y))^T$. 通过与定理 (2.1) 相似的推导过程，我们有

定理 2.3 向量 $\boldsymbol{\kappa}(u,y)$ 满足

$$\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\kappa}''(u,y)+c\boldsymbol{\kappa}'(u,y)+\mathcal{B}\boldsymbol{\kappa}(u,y)+\Big[\int_0^u\boldsymbol{\alpha\kappa}(u-x,y)p(x)\,\mathrm{d}x+\int_u^{u+y}p(x)\,\mathrm{d}x\Big]\mathbf{b}^T=\mathbf{0}.\ (2.6)$$

设 $T'=\inf\{t:t>T,\ R(t)\ge 0\}$ 表示破产发生后盈余首次上穿 0 的时间，因为盈余过程有正的安全负荷条件，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}E[R(t)]=\infty$, 即破产发生后，若允许盈余过程继续，则这个时间一定会发生．定义 $M=\sup\big\{|R(t)|:T\le t\le T'\big\}$. 令

$$\rho(u,z)=P\big(M\le z\mid T<\infty,R(0)=u\big).$$

表示破产发生后的最大赤字分布. 由 [9],

$$\rho(u,z)=\frac{1}{\psi(u)}\int_0^z \frac{\partial\kappa(u,y)}{\partial y}\chi(z-y,z)\,\mathrm{d}y. \tag{2.7}$$

因为 $p(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 由 [8], 同样可得 $\xi(u,b)$, $\boldsymbol{\zeta}(u,b)$ 和 $\boldsymbol{\kappa}(u,y)$ 均关于 u 连续, 且对于模型 (1.1), $P(T_{0^+}=T_0=0)=1$, T_0 表示初始盈余 $u=0$ 时的破产时间. 所以有下面结论

定理 2.4 $\xi(u,b),\boldsymbol{\zeta}(u,b)$ 和 $\boldsymbol{\kappa}(u,y)$ 分别是满足下列边界值微分方程的有界连续解

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\xi^{''}(u,b)+c\xi^{'}(u,b)+\mathcal{B}\xi(u,b)+\Big[\int_0^u \boldsymbol{\alpha}\xi(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x+\overline{P}(u)\Big]\mathbf{b}^T\\&=\mathbf{0},\qquad 0\le u<b,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\xi(0,b)=\mathbf{1},\qquad \xi(b,b)=\mathbf{0}; \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\zeta}^{''}(u,b)+c\boldsymbol{\zeta}^{'}(u,b)+\mathcal{B}\boldsymbol{\zeta}(u,b)+\mathbf{b}^T\int_0^u \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\zeta}(u-x,b)p(x)\,\mathrm{d}x\\&=\mathbf{0},\qquad 0\le u<b,\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(0,b)=\mathbf{0},\qquad \boldsymbol{\zeta}(b,b)=\psi(b); \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\kappa}^{''}(u,y)+c\boldsymbol{\kappa}^{'}(u,y)+\mathcal{B}\boldsymbol{\kappa}(u,y)+\Big[\int_0^u \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\kappa}(u-x,y)p(x)\,\mathrm{d}x+\int_u^{u+y}p(x)\,\mathrm{d}x\Big]\mathbf{b}^T\\&=\mathbf{0},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\kappa}(0,y)=\mathbf{1},\qquad \boldsymbol{\kappa}(+\infty,y)=\mathbf{0}. \tag{2.13}$$

3 Erlang (2) 分布情形

若索赔时间间距为 Erlang (2) 分布, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,0),\qquad \mathcal{B}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}^T=\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix}$$

且索赔数量服从指数分布, $P(x)=1-e^{-\mu x}$ $(x\ge 0)$, 其拉氏变换为 $\widetilde{p}(s)=\frac{\mu}{\mu+s}$. 由 (2.8) 得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^4}{4}\xi^{(4)}(u,b)+c\sigma^2\xi^{(3)}(u,b)+(c^2-\lambda\sigma^2)\xi^{''}(u,b)-2c\lambda\xi^{'}(u,b)+\lambda^2\xi(u,b)\\&=\lambda^2\int_0^u \xi(u-x,b)\mu e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x+\lambda^2 e^{-\mu u},\qquad 0\le u<b.\end{aligned} \tag{3.1}$$

对 (3.1) 式应用算子 $\mathcal{D}+\mu$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^4}{4}\xi^{(5)}(u,b)+\Big(\frac{\sigma^4\mu}{4}+c\sigma^2\Big)\xi^{(4)}(u,b)+(c^2-\lambda\sigma^2+c\mu\sigma^2)\xi^{(3)}(u,b)\\&+(c^2\mu-\lambda\mu\sigma^2-2c\lambda)\xi''(u,b)+(\lambda^2-2c\lambda\mu)\xi'(u,b)=0,\qquad 0\le u<b.\end{aligned} \tag{3.2}$$

方程 (3.2) 的解具有形式

$$\xi(u,b)=\sum_{i=1}^{5}a_i e^{L_i u},\qquad 0\le u<b,$$

其中 L_i $(i=1,2,\cdots,5)$ 是方程

$$\frac{\sigma^4}{4}L^5+\Big(\frac{\sigma^4\mu}{4}+c\sigma^2\Big)L^4+(c^2-\lambda\sigma^2+c\mu\sigma^2)L^3+(c^2\mu-\lambda\mu\sigma^2-2c\lambda)L^2+(\lambda^2-2c\lambda\mu)L=0 \quad (3.3)$$

的根.

方程 (3.3) 可以重写为

$$\Big[\frac{\lambda-cs-\frac{\sigma^2}{2}s^2}{\lambda}\Big]^2=\frac{\mu}{\mu+s},$$

这即为推广的 Lundberg 方程. 因为 $\xi(0,b)=1$ 且方程 (3.3) 有一个为 0 的根，所以

$$\xi(u,b)=1+\sum_{i=1}^{4}a_i e^{L_i u},\qquad 0\le u<b, \tag{3.4}$$

这里 L_i $(i=1,\cdots,4)$ 是方程

$$\frac{\sigma^4}{4}L^4+\Big(\frac{\sigma^4\mu}{4}+c\sigma^2\Big)L^3+(c^2-\lambda\sigma^2+c\mu\sigma^2)L^2+(c^2\mu-\lambda\mu\sigma^2-2c\lambda)L+\lambda(\lambda-2c\mu)=0 \quad (3.5)$$

的根.

将 (3.4) 代入 (3.1), 通过系数的比较，可得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{L_i+\mu}=0 \tag{3.6}$$

且由 (2.9) 可得边界条件

$$\xi(0,b)=1,\qquad \xi(b,b)=0, \tag{3.7}$$

由 (3.1)

$$\frac{\sigma^4}{4}\xi^{(4)}(0,b)+c\sigma^2\xi^{(3)}(0,b)+(c^2-\lambda\sigma^2)\xi^{''}(0,b)-2c\lambda\xi^{'}(0,b)=0. \tag{3.8}$$

因此，由条件 (3.6)–(3.8) 能够确定 (3.4) 中的 a_i $(i=1,2,3,4)$.

由同样的推导过程，可以求出方程 (2.10)–(2.13) 在索赔时间间距为 Erlang (2), 索赔量 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是指数分布时， $\zeta(u,b)$ 和 $\kappa(u,y)$ 的相应解.

参 考 文 献

[1] Wan N. Dividend Payments with a Threshold Strategy in the Compound Poisson Risk Model Perturbed by Diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40: 509–523

[2] Gao H L, Yin C C. The Perturbed Sparre Andersen Model with a Threshold Dividend Strategy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 220: 394–408

[3] Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific, 2000

[4] Albrecher H, Boxma O. On the Discounted Penalty Function in a Markov-dependent Risk Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 36: 650–672

[5] Pitts S M, Politis K. The Joint Density of the Surplus before and after Ruin in the Sppare Andersen Model. *Journal of Applied Probability*, 2007, 44: 695–712

[6] Song M, Meng Q B, Wu R, Ren J D. The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function in the Risk Process with phase-type Interclaim Times. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216: 523–531

[7] Li S, Dickson D C M. The Maximum Surplus before Ruin in an Erlang (n) Risk Process and Related Problems. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006, 38: 529–539

[8] Wang G J, Wu R. Some Distributions for Classical Risk Process that is Perturbed by Diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2000, 26: 15–24

[9] Dickson D C M. On a Class of Renewal Risk Process. *North American Actuarial Journal*, 1998, 2(3): 60–68

The Maximum Surplus in the Phase-type Risk Model Perturbed by Diffusion and Related Distributions

JIANG Wuyuan

(*Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang* 414006)

(*E-mail: csujw@163.com*)

Abstract In this paper, we consider a perturbed sparre andersen model by diffusion in which the claim inter-arrival times are the phase-type distributions. We prove some properties of the maximum surplus before ruin of the risk process before ruin when ruin occurs and the surplus distribution at the time of tuin. Integro-differential equations are derived. Finally, to illustrate these results, the special case where the inter-claim times are Erlang (2) distributed and the claim size distribution is exponential is considered.

Key words phase-type distribution; diffusion risk process; maximum surplus before ruin; surplus distribution at the time of ruin; integro-differential equation

MR(2000) Subject Classification 91B30; 62P05

Chinese Library Classification O211.6