第 34 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 34 No. 3
2011 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2011

二阶拟线性中立型差分方程的振动性 *

王冬梅
(海南大学信息科学技术学院，海口 570228)
(E-mail: w_dongmei1980@163.com)
徐志庭
(华南师范大学数学科学学院，广州 510631)
(E-mail: xuzhit@126.com)

摘　要　运用 Riccati 变换，均法和大量的不等式技巧，研究了二阶拟线性中立型差分方程

$$\Delta\Big[r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\Big]+q_nf(x_{n-\sigma})=0,\text{ 其中 } z_n=x_n+p_nx_{n-\tau}$$

在条件 $\alpha\geq\beta\geq1$ 或者 $\alpha\geq 1,\ 0<\beta<1$ 下的振动性，并举实例说明，这里 $ssizebeta$ 是文中条件 $A(4)$ 中的常数.

关键词　振动性；二阶；差分方程
MR(2000) 主题分类　62G05; 62N01
中图分类　O175

1　引言

本文讨论二阶拟线性中立型时滞差分方程

$$\Delta\Big[r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\Big]+q_nf(x_{n-\sigma})=0 \tag{1.1}$$

的振动性，这里 $z_n=x_n+p_nx_{n-\tau}$，$n=0,1,2,\cdots$；α 是一个正常数；τ 和 σ 是非负整数；Δ 代表向前差分算子：$\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$，$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是任意实数序列.

本文总假设以下条件成立

(A1) $\{r_n\}$ 是一正序列，$n=0,1,2,\cdots$;

(A2) $0\leq p_n\leq 1$，$n=0,1,2,\cdots$;

本文 2009 年 4 月 30 日收到. 2011 年 4 月 27 日收到修改稿.
* 广东省自然科学基金 (8451063101000730) 资助项目.

(A3) $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个含有无限多正项的非负序列;

(A4) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且存在一个函数 $\phi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 和一个常数 $\beta > 0$ 满足

$$\frac{f(x)}{|\phi(x)|^{\beta-1}\phi(x)} \geq k > 0, \qquad \phi'(x) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{且} \quad x\phi(x) > 0 \quad \text{当 } x \neq 0 \text{ 时},$$

这里 k, ε 是正常数;

(A5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/r_n^{\frac{1}{\alpha}} = \infty$.

如果一非零序列 $\{x_n\}$, $n \geq -\max\{\tau,\sigma\}$ 对任意的 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 满足方程 (1.1), 那么我们就称 $\{x_n\}$ 是方程 (1.1) 的一个解. 显然, 若给定初始条件

$$x_n = A_n, \qquad n = -\max\{\tau,\sigma\}, \cdots, 0, \tag{1.2}$$

则方程 (1.1) 有唯一一个满足初始条件 (1.2) 的解. 此外, 如果对任意的 $N > 0$, 存在一个 $n > N$ 满足 $x_n x_{n+1} \leq 0$, 则称方程 (1.1) 的解 $\{x_n\}$ 是振动的; 否则, 称 $\{x_n\}$ 是非振动的. 如果方程 (1.1) 的每一个解都振动, 则称方程 (1.1) 是振动的.

[4] 考虑了非线性中立型差分方程

$$\Delta(r_n(\Delta z_n)^{\gamma}) + q_n f^{\beta}(x_{n-\sigma}) = 0$$

在条件

(1) $\gamma \geq \beta \geq 1$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/r_n = \infty$

或者

(2) $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/r_n = \infty$

下的振动性. 但是, 可以发现条件 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/r_n = \infty$ 是不合理的, 应该改成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/r_n^{\frac{1}{\gamma}} = \infty$.

在 [7] 和 [9] 中, 作者分别讨论了方程

$$\Delta(r_n \Delta z_n) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0$$

和

$$\Delta(r_n |\Delta z_n|^{\alpha-1} \Delta z_n) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0$$

的振动性. 然而, 可以看到, 如果没有假设 $\alpha \geq 1$, [9] 的结果是不成立的.

受 [10–12] 的启发, 本文采用 Riccati 变换和均法, 给出了方程 (1.1) 在条件

$$\alpha \geq \beta \geq 1 \quad \text{或者} \quad \alpha \geq 1, \ \ 0 < \beta < 1$$

下的一些振动性准则. 这些准则改进和拓展了 [4,7,9] 的结果, 此外, 还改正了 [4] 中定理 4 的证明.

2 主要结果

本文对任意给定的正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和常数 $M>0,\ a>0$, 采用如下记号 (后文不再声明)

$$Q_n = k\varepsilon^{\beta}\rho_n q_n(1-p_{n-\sigma})^{\beta}, \qquad R_n = \frac{\rho_n\, 2^{1-\beta} M^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}}{\rho_{n+1}^2 r_{n-\sigma}^{\frac{\beta}{\alpha}}},$$

$$T_n = \frac{\beta\rho_n[a(n+1)]^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}}{\rho_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad P_n = \frac{\beta\rho_n M^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}[a(n+1)]^{\beta-1}}{\rho_{n+1}^2 r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}}$$

和

$$(\rho_n)_+ = \max\{0,\rho_n\}.$$

与 [10] 类似，称序列 $\{H_{m,n}|m\ge n\ge 0\}$ 属于集合 $\mathcal{H}$, 记作 $H_{m,n}\in\mathcal{H}$, 如果

(H1) $H_{m,m}=0,\ m\ge 0$ 且 $H_{m,n}>0,\ m>n\ge 0$;

(H2) $\Delta_2 H_{m,n} = H_{m,n+1}-H_{m,n}\le 0,\ m>n\ge 0$.

此外，设 $\{h_{m,n}|m\ge n\ge 0\}\in\mathcal{H}$, 满足 $\Delta_2 H_{m,n} = -h_{m,n}\sqrt{H_{m,n}},\ m>n\ge 0$.

为了给出本文的主要结果，先介绍以下两个引理.

引理 2.1 如果 $\{x_n\}$ 是方程 (1.1) 的一个最终正解，那么存在一个正整数 n_0, 使得对 $\forall n\ge n_0$ 有

$$z_n\ge x_n>0,\quad \Delta z_n\ge 0 \qquad \text{和} \qquad \Delta\big(r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\big)\le 0.$$

证 不失一般性，假设 $x_n>0,\ x_{n-\tau}>0$ 和 $x_{n-\sigma}>0$ 对所有的 $n\ge n_0\ge 0$ 成立. 显然， $z_n\ge x_n>0$. 由方程 (1.1) 和条件 (A4) 得

$$\Delta\big(r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\big) = -q_n f(x_{n-\sigma})\le 0.$$

我们断言 $\Delta z_n\ge 0$ 对 $\forall n\ge n_0$ 成立. 否则，必存在 $n_1\ge n_0$ 使得 $\Delta z_{n_1}<0$. 因为 $\{r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\}$ 是非增的，所以对 $\forall n\ge n_1$, 有

$$r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n \le r_{n_1}|\Delta z_{n_1}|^{\alpha-1}\Delta z_{n_1} = \xi < 0.$$

整理得

$$\Delta z_n \le -\Big(\frac{-\xi}{r_n}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

将上述不等式的两边从 n_1 到 $n-1$ 求和并应用 (A5) 得

$$z_n \le z_{n_1} - \sum_{i=n_1}^{n-1}\Big(\frac{-\xi}{r_n}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \to -\infty, \qquad n\to\infty,$$

这与 $z_n>0$ 矛盾. 于是 $\Delta z_n\ge 0$.

引理 2.2 如果 $\Delta z_n \geq 0$, $\Delta r_n \geq 0$ 且 $\Delta(r_n(\Delta z_n)^\alpha) \leq 0$, 那么存在一个常数 $a > 0$ 使得 $z_{n-\sigma+1} \leq a(n+1)$ 对 $\forall n \geq n_0$ 成立.

证 因为对 $\forall n \geq n_0$ 有

$$0 \geq \Delta\big(r_n(\Delta z_n)^\alpha\big) = \Delta r_n(\Delta z_{n+1})^\alpha + r_n\Delta(\Delta z_n)^\alpha$$

和

$$r_n > 0, \qquad \Delta r_n \geq 0, \qquad (\Delta z_{n+1})^\alpha \geq 0,$$

所以 $\Delta(\Delta z_n)^\alpha \leq 0$, 即 $\{(\Delta z_n)^\alpha\}$ 是非增的，就有 $(\Delta z_{n+1})^\alpha \leq (\Delta z_n)^\alpha$, 则 $\Delta z_{n+1} \leq \Delta z_n$. 于是，对 $\forall n \geq n_0$ 有 $z_n \leq z_{n_0} + n\Delta z_{n_0}$. 故存在一个合适的正常数 a, 使得 $z_n \leq an$. 由此可得

$$z_{n-\sigma+1} \leq a(n-\sigma+1) \leq a(n+1)$$

对 $\forall n \geq n_0$ 成立.

下面的结论拓展了 [10–12] 的结果.

定理 2.1 设 $\alpha \geq \beta \geq 1$. 如果

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,0}} \sum_{n=0}^{m-1} \left[H_{m,n}Q_n - \frac{1}{4R_n}\left(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\right)^2\right] = \infty, \tag{2.1}$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

证 设 $\{x_n\}$ 是方程 (1.1) 的一个非振动解. 不失一般性，假设 $\{x_n\}$ 是方程 (1.1) 的一个最终正解. 我们只需考虑这种情况，因为当 $x_n < 0$ 时，变换 $y_n = -x_n$ 可将方程 (1.1) 振动的充分条件转化成与 (2.1) 相同的形式. 根据引理 2.1 知 $\Delta z_n \geq 0$, 那么存在一个正整数 n_0 使得对 $\forall n \geq n_0$ 有 $Z_{n-\sigma-\tau} \leq z_{n-\sigma}$. 由此可得

$$x_{n-\sigma} = z_{n-\sigma} - p_{n-\sigma}z_{n-\sigma-\tau} \geq (1-p_{n-\sigma})z_{n-\sigma}.$$

根据 (A4) 有

$$f(x_{n-\sigma}) \geq k|\phi(x_{n-\sigma})|^{\beta-1}\phi(x_{n-\sigma}) \geq k(\varepsilon x_{n-\sigma})^\beta \geq k\varepsilon^\beta(1-p_{n-\sigma})^\beta z_{n-\sigma}^\beta.$$

对 $\forall n \geq n_0$, 由方程 (1.1) 可得

$$\Delta\big(r_n(\Delta z_n)^\alpha\big) + k\varepsilon^\beta q_n(1-p_{n-\sigma})^\beta z_{n-\sigma}^\beta \leq 0. \tag{2.2}$$

定义

$$w_n = \rho_n\frac{r_n(\Delta z_n)^\alpha}{z_{n-\sigma}^\beta}, \qquad n \geq n_0. \tag{2.3}$$

由 (2.2) 和 (2.3) 得

$$\begin{aligned}\Delta w_n =&\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}+\rho_n\frac{\Delta\big(r_n(\Delta z_n)^\alpha\big)z^\beta_{n-\sigma+1}-r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha\Delta(z^\beta_{n-\sigma})}{z^\beta_{n-\sigma}z^\beta_{n-\sigma+1}}\\ \le&\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\rho_n\frac{k\varepsilon^\beta q_n(1-p_{n-\sigma})^\beta z^\beta_{n-\sigma}z^\beta_{n-\sigma+1}+r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha\Delta(z^\beta_{n-\sigma})}{z^\beta_{n-\sigma}z^\beta_{n-\sigma+1}}\\ =&-Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha\Delta(z^\beta_{n-\sigma})}{z^\beta_{n-\sigma}z^\beta_{n-\sigma+1}}. \end{aligned}\tag{2.4}$$

根据不等式 ([5] 中的定理 27)

$$(a+b)^r\ge a^r+b^r,\qquad a,b\ge 0,\quad r\ge 1,$$

得

$$x^\beta\ge(x-y)^\beta+y^\beta,\qquad x\ge y>0,\quad \beta\ge 1,$$

即

$$x^\beta-y^\beta\ge(x-y)^\beta,\qquad x\ge y>0,\quad \beta\ge 1,$$

那么

$$\Delta(z^\beta_{n-\sigma})\ge(\Delta z_{n-\sigma})^\beta.\tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 得

$$\Delta w_n\le -Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha(\Delta z_{n-\sigma})^\beta}{z^\beta_{n-\sigma}z^\beta_{n-\sigma+1}}.\tag{2.6}$$

注意到 $\Delta\big(r_n(\Delta z_n)^\alpha\big)\le 0$, 则 $r_{n-\sigma}(\Delta z_{n-\sigma})^\alpha\ge r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha$, 即

$$\Delta z_{n-\sigma}\ge\Big(\frac{r_{n+1}}{r_{n-\sigma}}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta z_{n+1}.\tag{2.7}$$

根据引理 2.1 和 (2.3), (2.6), (2.7) 得

$$\begin{aligned}\Delta w_n\le&-Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n 2^{1-\beta}r_{n+1}^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}(\Delta z_{n+1})^{\alpha+\beta}}{r_{n-\sigma}^{\frac{\beta}{\alpha}}z^{2\beta}_{n-\sigma+1}}\\ =&-Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n 2^{1-\beta}r_{n+1}^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}}{\rho^2_{n+1}r_{n-\sigma}^{\frac{\beta}{\alpha}}(\Delta z_{n+1})^{\alpha-\beta}}w^2_{n+1}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

因为 $\{r_n(\Delta z_n)^\alpha\}$ 为正且非增，所以存在两个常数 $M>0$ 和 $N\ge n_0>0$ 使得对 $\forall n\ge N$ 有 $r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\alpha\le 1/M$. 由此可得

$$\Delta z_{n+1}\le\Big(\frac{1}{Mr_{n+1}}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.\tag{2.9}$$

由于 $\alpha\ge\beta$, 结合 (2.8) 和 (2.9), 我们有

$$\Delta w_n \le -Q_n + \frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - R_n w_{n+1}^2.$$

在上述不等式的两边同时乘以 $H_{m,n}$ 且将它从 k 到 $m-1$ 求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n \le& -\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}\Delta w_n + \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2\\ =&H_{m,k}w_k + \sum_{n=k}^{m-1} w_{n+1}\Delta_2 H_{m,n} + \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2\\ =&H_{m,k}w_k - \sum_{n=k}^{m-1}\sqrt{H_{m,n}}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big) w_{n+1} - \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2,\end{aligned} \tag{2.10}$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n \le& H_{m,k}w_k - \sum_{n=k}^{m-1}\Big[\sqrt{H_{m,n}R_n}w_{n+1} + \frac{1}{2\sqrt{R_n}}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)\Big]^2\\ &+\frac14\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2.\end{aligned}$$

易得

$$\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n \le H_{m,k}w_k + \frac14\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2. \tag{2.11}$$

如果取 $k=N$, 那么

$$\sum_{n=N}^{m-1}\Big[H_{m,n}Q_n - \frac{1}{4R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big] \le H_{m,N}w_N \le H_{m,0}w_N.$$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{m-1}\Big[H_{m,n}Q_n - \frac{1}{4R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big] \le H_{m,0}\Big(w_N + \sum_{n=0}^{N-1}Q_n\Big).$$

因此

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,0}}\sum_{n=0}^{m-1}\Big[H_{m,n}Q_n - \frac{1}{4R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big] \le w_N + \sum_{n=0}^{N-1}Q_n,$$

这与 (2.1) 矛盾.

通过选择合适的序列 $\{H_{m,n}\}\in\mathcal{H}$, 我们可以得到一系列有关方程 (1.1) 的振动准则. 例如

$$H_{m,n} = \mathrm{sgn}(m-n), \qquad m\ge n\ge 0$$

或者

$$H_{m,n}=(m-n)^{\mu},\qquad m\ge n\ge 0,\quad \mu\ge 1.$$

容易验证 $H_{m,n}\in\mathcal{H}$, 根据定理 2.1, 我们有如下推论：

推论 2.1 设 $\alpha\ge\beta\ge 1$. 如果

$$\limsup_{m\to\infty}\Big\{\sum_{n=0}^{m-2}\Big[Q_n-\frac{1}{4R_n}\Big(\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big]+Q_{m-1}-\frac{1}{4R_{m-1}}\Big(1-\frac{\Delta\rho_{m-1}}{\rho_m}\Big)^2\Big\}=\infty,$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

推论 2.2 设 $\alpha\ge\beta\ge 1$. 如果

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m^{\mu}}\sum_{n=0}^{m-1}\Big\{(m-n)^{\mu}Q_n-\frac{1}{4(m-n)^{\frac{\mu}{2}}R_n}\\&\cdot\Big[(m-n)^{\mu}\Big(1-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)-(m-n-1)^{\mu}\Big]^2\Big\}=\infty,\end{aligned}$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

定理 2.2 设 $\alpha\ge\beta\ge 1$ 且 $\Delta r_n\ge 0$. 如果

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,0}}\sum_{n=0}^{m-1}\Big[H_{m,n}Q_n-\frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1}\Big]=\infty,\tag{2.12}$$

这里

$$\eta_{m,n}=(H_{m,n}T_n)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},\qquad \sigma_{m,n}=H_{m,n}\Big|\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}-\frac{h_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}\Big|,$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

证　与定理 2.1 的证明一样，对 $\forall n\ge n_0$ 有 (2.4) 成立．利用不等式 (见 [5] 中的定理 41)

$$x^{\beta}-y^{\beta}\ge\beta y^{\beta-1}(x-y),\qquad x,y>0,\quad\beta\ge 1,\tag{2.13}$$

我们有

$$\Delta(z_{n-\sigma}^{\beta})\ge\beta z_{n-\sigma}^{\beta-1}\Delta z_{n-\sigma}.\tag{2.14}$$

把 (2.14) 代入 (2.4) 得

$$\Delta w_n\le -Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\beta\rho_n r_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\alpha}\Delta z_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}z_{n-\sigma+1}^{\beta}}.\tag{2.15}$$

由 (2.7) 和 (2.15) 得

$$\begin{aligned}\Delta w_n\le&-Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\beta\rho_n r_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Delta z_{n+1})^{\alpha+1}}{r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}z_{n-\sigma}z_{n-\sigma+1}^{\beta}}\\=&-Q_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\beta\rho_n}{r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}\rho_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}z_{n-\sigma+1}^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}w_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

根据引理 2.2 和 $\alpha \geq \beta$ 有

$$\begin{aligned}\Delta w_n \leq & -Q_n+\frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1}-\frac{\beta \rho_n[a(n+1)]^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}}{\rho_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}} w_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ = & -Q_n+\frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1}-T_n w_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

在上述不等式的两边同时乘以 $H_{m,n}$ 且将它从 k 到 $m-1$ 求和，注意到 $H_{m,n} \in \mathcal{H}$, 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} Q_n+\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} T_n w_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}-\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}\Big(\frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}}-\frac{h_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}\Big) w_{n+1} \\ \leq & H_{m,k} w_k.\end{aligned} \tag{2.16}$$

记

$$F_{m,k}=\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} T_n w_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}-\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}\Big(\frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}}-\frac{h_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}\Big) w_{n+1},$$

则

$$F_{m,k} \geq \sum_{n=k}^{m-1}(\eta_{m,n} w_{n+1})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}-\sum_{n=k}^{m-1} \sigma_{m,n} w_{n+1}.$$

根据不等式 (见 [5] 中的定理 61) 得

$$\sigma_{m,n} w_{n+1} \leq(\eta_{m,n} w_{n+1})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^\alpha}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1}.$$

于是

$$F_{m,k} \geq-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=k}^{m-1}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1}.$$

由 (2.16) 得

$$\sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} Q_n-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=k}^{m-1}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1} \leq H_{m,k} w_k. \tag{2.17}$$

对确定的 $N \geq n_0$, 根据 (2.17) 得

$$\sum_{n=0}^{m-1} H_{m,n} Q_n-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{m-1}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1} \leq H_{m,0}\Big(w_N+\sum_{n=0}^{N-1} Q_n\Big).$$

因此

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{H_{m,0}} \sum_{n=0}^{m-1}\Big[H_{m,n} Q_n-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1}\Big] \leq w_N+\sum_{n=0}^{N-1} Q_n<\infty,$$

这与 (2.12) 矛盾.

定理 2.3 设 $\alpha \ge 1$, $0 < \beta < 1$ 且 $\Delta r_n \ge 0$. 如果

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,0}} \sum_{n=0}^{m-1} \Big[H_{m,n} Q_n - \frac{1}{4P_n} \Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}} \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} \Big)^2 \Big] = \infty, \tag{2.18}$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

证　与定理 2.1 的证明一样，对 $\forall n \ge n_0$ 有 (2.4) 成立．根据不等式 (见 [5] 中的定理 41)

$$x^\beta - y^\beta \ge \beta x^{\beta-1}(x-y), \qquad x, y > 0, \quad 0 < \beta < 1,$$

有

$$\Delta(z_{n-\sigma}^\beta) \ge \beta z_{n-\sigma+1}^{\beta-1} \Delta z_{n-\sigma}. \tag{2.19}$$

于是，由 (2.4) 和 (2.19) 得

$$\Delta w_n \le -Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\beta \rho_n r_{n+1} (\Delta z_{n+1})^\alpha \Delta z_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}^\beta z_{n-\sigma+1}}.$$

结合 (2.7), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta w_n \le & - Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\beta \rho_n r_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (\Delta z_{n+1})^{\alpha+1}}{r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}} z_{n-\sigma+1}^{\beta+1}} \\ = & - Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\beta \rho_n r_{n+1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\rho_{n+1}^2 r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}} z_{n-\sigma+1}^{1-\beta} (\Delta z_{n+1})^{\alpha-1}} w_{n+1}^2.\end{aligned}$$

注意到 $\alpha \ge 1$, 那么由 (2.9) 得

$$\Delta w_n \le -Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\beta \rho_n M^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\rho_{n+1}^2 r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}} z_{n-\sigma+1}^{1-\beta}} w_{n+1}^2.$$

根据引理 2.2 和 $0 < \beta < 1$ 得到

$$\begin{aligned}\Delta w_n \le & - Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\beta \rho_n M^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} [a(n+1)]^{\beta-1}}{\rho_{n+1}^2 r_{n-\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}} w_{n+1}^2 \\ = & - Q_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - P_n w_{n+1}^2.\end{aligned}$$

余下的证明与定理 2.1 的证明过程类似，这里省略.

注 2.1 在 [4] 中，通过使用下面的不等式 (见 [4, 322 页]),

$$(\Delta^2 z_n)^\gamma = (\Delta z_{n+1} - \Delta z_n)^\gamma \le (\Delta z_{n+1})^\gamma - (\Delta z_n)^\gamma < 0 \qquad (\gamma > 1 \text{ 是两奇数之比}),$$

即 $\Delta^2 z_n < 0$, 作者给出了与定理 2.3 类似的定理 (见 [4] 中的定理 4). 注意到不等式成立的条件是 $\Delta z_{n+1} \ge \Delta z_n$ (见 [4] 中的 (2.8) 式), 这与 $\Delta^2 z_n < 0$ 矛盾．这里，我们的定理 2.3 和引理 2.2 改正了它且进一步拓宽了 γ 的范围.

定理 2.4 设 $\alpha \geq \beta \geq 1$. 如果存在两个正序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得对 $\forall k$ 有

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n \geq \varphi_k \tag{2.20}$$

和

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} \frac{1}{R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2 \leq \psi_k, \tag{2.21}$$

这里 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 满足

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n\Big(\varphi_{n+1} - \frac{1}{4}\psi_{n+1}\Big)_+^2 = \infty, \tag{2.22}$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

证 与定理 2.1 的证明过程一样, 有 (2.10) 和 (2.11) 成立. 对 $\forall k \geq N$, 我们得到

$$\frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n - \frac{1}{4H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} \frac{1}{R_n}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2 \leq w_k.$$

在上述不等式的两端取 $\limsup\limits_{m\to\infty}$, 结合 (2.20) 和 (2.21) 得

$$\varphi_k - \frac{1}{4}\psi_k \leq w_k.$$

由此可得

$$\frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n(\varphi_{n+1} - \frac{1}{4}\psi_{n+1})_+^2 \leq \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2. \tag{2.23}$$

此外, 由 (2.10) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2 + \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} \sqrt{H_{m,n}}\left(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\right) w_{n+1}\\ \leq & w_k - \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}Q_n.\end{aligned}$$

根据 (2.20) 有

$$\begin{aligned}&\liminf_{m\to\infty} \Big[\frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n}R_n w_{n+1}^2 + \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} \sqrt{H_{m,n}}\left(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\right) w_{n+1}\Big]\\ \leq & w_k - \varphi_k \leq C_0,\end{aligned} \tag{2.24}$$

这里 C_0 是常数. 定义

$$u_m = \frac{1}{H_{m,N}} \sum_{n=N}^{m-1} \sqrt{H_{m,n}}\Big(h_{m,n} - \sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big) w_{n+1}$$

和

$$v_m = \frac{1}{H_{m,N}} \sum_{n=N}^{m-1} H_{m,n} R_n w_{n+1}^2,$$

这里 $m > N$. 于是，由 (2.24) 知当 m 充分大时有

$$v_m + u_m \le C_0 + 1. \tag{2.25}$$

我们断言

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} R_n w_{n+1}^2 < \infty. \tag{2.26}$$

如果 (2.26) 不满足，那么存在一个 $\lim\limits_{j\to\infty} m_j = \infty$ 的序列 $\{m_j\}$, 使得

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{1}{H_{m_j,k}} \sum_{n=k}^{m_j-1} H_{m_j,n} R_n w_{n+1}^2 = \infty. \tag{2.27}$$

由上式和 (2.25) 得

$$\liminf_{j\to\infty} u_{m_j} = -\infty. \tag{2.28}$$

当 j 充分大时，由 (2.25) 和 (2.27) 得

$$\frac{u_{m_j}}{v_{m_j}} + 1 \le \frac{C_0+1}{v_{m_j}} < \frac{1}{2} \qquad 或 \qquad \frac{u_{m_j}}{v_{m_j}} < -\frac{1}{2},$$

上式结合 (2.28) 有

$$\lim_{j\to\infty} \frac{u_{m_j}^2}{v_{m_j}} = \infty. \tag{2.29}$$

另一方面，由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} u_{m_j}^2 \le& \Big[\frac{1}{H_{m_j,N}} \sum_{n=N}^{m_j-1} H_{m_j,n} R_n w_{n+1}^2\Big]\Big[\frac{1}{H_{m_j,N}} \sum_{n=N}^{m_j-1} \frac{1}{R_n}\Big(h_{m_j,n} - \sqrt{H_{m_j,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big] \\ =& v_{m_j}\Big[\frac{1}{H_{m_j,N}} \sum_{n=N}^{m_j-1} \frac{1}{R_n}\Big(h_{m_j,n} - \sqrt{H_{m_j,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big]. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{u_{m_j}^2}{v_{m_j}} \le \frac{1}{H_{m_j,N}} \sum_{n=N}^{m_j-1} \frac{1}{R_n}\Big(h_{m_j,n} - \sqrt{H_{m_j,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2. \tag{2.30}$$

由 (2.29) 知 (2.30) 的左端是无界的，这与 (2.21) 矛盾，于是 (2.26) 成立. 因此，由 (2.23) 得

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} R_n (\varphi_{n+1} - \frac{1}{4}\psi_{n+1})_+^2 \le \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{H_{m,k}} \sum_{n=k}^{m-1} H_{m,n} R_n w_{n+1}^2 < \infty,$$

这与 (2.22) 矛盾.

定理 2.5 设 $\alpha\ge\beta\ge 1$ 且 $\Delta r_n\ge 0$. 如果存在两个正序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得对 $\forall k$ 有

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}Q_n>\varphi_k \tag{2.31}$$

和

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}\Big(\frac{\sigma_{m,n}}{\eta_{m,n}}\Big)^{\alpha+1}<\psi_k, \tag{2.32}$$

这里 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 满足

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_n\Big(\varphi_{n+1}-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\psi_{n+1}\Big)_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}=\infty \tag{2.33}$$

且 $\{\eta_{m,n}\}$ 和 $\{\sigma_{m,n}\}$ 与定理 2.2 中的定义一样，那么方程 (1.1) 是振动的.

证 按照定理 2.2 的证明过程有 (2.16) 和 (2.17) 成立. 那么，对 $\forall\ k\ge n_0$, 对 (2.17) 取 $\limsup\limits_{m\to\infty}$ 并结合 (2.31) 和 (2.32) 有

$$\varphi_k-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\psi_k\le w_k.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_n\Big(\varphi_{n+1}-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\psi_{n+1}\Big)_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\\ \le&\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

由 (2.16) 和 (2.32) 得

$$\begin{aligned}&\liminf_{m\to\infty}\Big[\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}-\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\Big(\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}-\frac{h_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}\Big)w_{n+1}\Big]\\ \le&w_k-\varphi_k\le C_1,\end{aligned} \tag{2.35}$$

这里 C_1 是一常数. 定义

$$a_m=\frac{1}{H_{m,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m-1}\sigma_{m,n}w_{n+1}\qquad 和 \qquad b_m=\frac{1}{H_{m,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m-1}H_{m,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

这里 $m>n_0$. 于是，对充分大的 m, 由 (2.35) 得

$$b_m-a_m\le C_1+1.$$

我们断言

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\infty. \tag{2.36}$$

如果 (2.36) 不成立，与定理 2.4 的证明类似，必存在一个 $\lim\limits_{j\to\infty}m_j=\infty$ 的序列 $\{m_j\}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty}b_{m_j}=\infty \qquad 和 \qquad a_{m_j}>\frac{1}{2}b_{m_j}$$

成立．由此可得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{m_j}^{\alpha+1}}{b_{m_j}^{\alpha}}=\infty. \tag{2.37}$$

另一方面，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}a_{m_j}\leq&\Big[\frac{1}{H_{m_j,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m_j-1}H_{m_j,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\Big]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\Big[\frac{1}{H_{m_j,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m_j-1}\Big(\frac{\sigma_{m_j,n}}{\eta_{m_j,n}}\Big)^{\alpha+1}\Big]^{\frac{1}{\alpha+1}}\\=&b_{m_j}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\Big[\frac{1}{H_{m_j,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m_j-1}\Big(\frac{\sigma_{m_j,n}}{\eta_{m_j,n}}\Big)^{\alpha+1}\Big]^{\frac{1}{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{a_{m_j}^{\alpha+1}}{b_{m_j}^{\alpha}}\leq\frac{1}{H_{m_j,n_0}}\sum_{n=n_0}^{m_j-1}\Big(\frac{\sigma_{m_j,n}}{\eta_{m_j,n}}\Big)^{\alpha+1}. \tag{2.38}$$

根据 (2.37) 知 (2.38) 的左端是无界的，这与 (2.32) 矛盾．所以 (2.36) 成立．因此，由 (2.34) 得

$$\begin{aligned}&\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_n\Big(\varphi_{n+1}-\frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\psi_{n+1}\Big)_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\\\leq&\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}T_nw_{n+1}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\infty,\end{aligned}$$

这与 (2.33) 矛盾．

定理 2.6 设 $\alpha\geq1$，$0<\beta<1$ 且 $\Delta r_n\geq0$．如果存在两个正序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得对 $\forall k$ 有

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}Q_n\geq\varphi_k$$

和

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{P_n}\Big(h_{m,n}-\sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\leq\psi_k,$$

这里 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 满足

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}P_n\Big(\varphi_{n+1}-\frac{1}{4}\psi_{n+1}\Big)_+^2=\infty,$$

那么方程 (1.1) 是振动的.

证 该定理的证明过程与定理 2.4 的类似，这里省略.

注 2.2 与定理 2.1 类似，通过选取不同的 $H_{m,n}\in\mathcal{H}$, 从定理 2.2 到定理 2.6, 我们可以得到一系列有关方程 (1.1) 振动的推论. 例如，取

$$H_{m,n}=\Big(\ln\frac{m+1}{n+1}\Big)^{\lambda},\qquad \lambda\geq 1,\ \ m\geq n\geq 0$$

或者

$$H_{m,n}=(m-n)^{(\lambda)},\qquad \lambda>2,\ \ m\geq n>0,$$

这里 $(m-n)^{(\lambda)}=(m-n)\times(m-n+1)\times\cdots\times(m-n+\lambda-1)$.

注 2.3 当 $\alpha=\beta$ 时，我们的结论拓展了 [9] 当 $\alpha\geq 1$ 时的结果.

注 2.4 当 $\alpha=\beta=1$ 且 $\phi(x)=x$ 时，方程 (1.1) 化简成方程 (2.1). 因此，我们的结论改进了 [7] 中的结果.

3 应用举例

在该部分，给出三个例子来阐述我们的主要结果. 这些例子都是全新的.

例 3.1 考虑差分方程

$$\Delta\Big[\frac{1}{(n+2)^2}|\Delta z_n|\Delta z_n\Big]+2(n^2+n)|x_{n-1}|x_{n-1}=0,\tag{3.1}$$

这里 $z_n=x_n+(1-1/(n+2))x_{n-\tau},\ n\geq 0,\ \tau\geq 0,\ r_n=1/(n+2)^2,\ p_n=1-1/(n+2),$ $q_n=2(n^2+n),\ \alpha=2,\ \sigma=1.$

根据推论 2.1, 取 $\rho_n=n+1,\ \beta=2,\ \phi(x)=x$ 和 $k=\varepsilon=1$, 对 $\forall\tau\in Z^+,\ M>0$ 有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}\Big[Q_n-\frac{1}{4R_n}\Big(\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big]+Q_{m-1}-\frac{1}{4R_{m-1}}\Big(1-\frac{\Delta\rho_{m-1}}{\rho_m}\Big)^2\Big]\\
=&\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}\Big(2n-\frac{1}{2(n+1)^3}\Big)+2(m-1)-\frac{1}{2m}\Big]\\
\geq&\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}(2n-1)+2(m-1)-1\Big]\\
=&\limsup_{m\to\infty}(m^2-2m)=\infty.
\end{aligned}$$

由推论 2.1 知，方程 (3.1) 是振动的.

例 3.2 考虑差分方程

$$\Delta\Big[\frac{1}{(n+2)^2}|\Delta z_n|\Delta z_n\Big]+\sqrt{n+1}\sqrt{|x_{n-1}|}\,\mathrm{sgn}\,(x_{n-1})=0,\tag{3.2}$$

这里 $z_n=x_n+1/(n+2)x_{n-\tau},\ n\geq 0,\ \tau\geq 0,\ r_n=1/(n+2)^2,\ p_n=1/(n+2),\ q_n=\sqrt{n+1},$ $\alpha=2,\ \sigma=1.$

根据定理 2.3, 取 $\phi(x)=x$, $k=1$, $\varepsilon=1$, $\rho_n=\sqrt{n+1}$, $M=1$, $a=4$, $\beta=1/2$, $H_{m,n}=\mathrm{sgn}(m-n)$, 则有

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}\Big[Q_n-\frac{1}{4P_n}\Big(\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\Big]+Q_{m-1}-\frac{1}{4P_{m-1}}\Big(1-\frac{\Delta\rho_{m-1}}{\rho_m}\Big)^2\Big]\\&=\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}\Big(\sqrt{n(n+1)}+2\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}-\frac{n+2}{n+1}-1\Big)+\sqrt{m(m-1)}-1\Big]\\&\geq\limsup_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m-2}(n-1)+(m-1)-1\Big]\\&=\limsup_{m\to\infty}\Big(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m\Big)=\infty.\end{aligned}$$

由定理 2.3 知方程 (3.2) 是振动的.

例 3.3 考虑差分方程

$$\Delta\Big[\frac{1}{n+3}|\Delta z_n|\Delta z_n\Big]+(n+2)(x_{n-1}^5+2x_{n-1}^3+x_{n-1})=0, \tag{3.3}$$

这里 $z_n=x_n+(1-1/(n+3))x_{n-\tau}$, $n\geq 0$, $\tau\geq 0$, $r_n=1/(n+3)$, $p_n=1-1/(n+3)$, $q_n=n+2$, $\alpha=2$, $\sigma=1$ 和 $f(x)=x^5+2x^3+x$.

根据定理 2.4, 取 $\phi(x)=x^3+x$, $k=\varepsilon=1$, $\rho_n=1$, $M=16$, $\beta=1$, $H_{m,n}=(m-n)^2$ 有

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}Q_n=\limsup_{m\to\infty}\Big[\frac{1}{(m-k)^2}\sum_{n=k}^{m-1}(m-n)^2\Big]\\&=\limsup_{m\to\infty}\Big[\frac{m-k}{6}\Big(1+\frac{1}{m-k}\Big)\Big(2+\frac{1}{m-k}\Big)\Big]\\&\geq\limsup_{m\to\infty}\frac{m-k}{3}>2\sqrt{k+1}:=\varphi_k\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{R_n}\Big(h_{m,n}-\sqrt{H_{m,n}}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\Big)^2\\&=\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{(m-k)^2}\sum_{n=k}^{m-1}\Big[\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\big(2-\frac{1}{m-n}\big)^2\Big]\\&\leq\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{(m-k)^2}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\\&\leq\limsup_{m\to\infty}\frac{m-k}{(m-k)^2}<4\sqrt{k+1}:=\psi_k.\end{aligned}$$

于是,

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{H_{m,k}}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}R_n\Big(\varphi_{n+1}-\frac{1}{4}\psi_{n+1}\Big)_+^2\\
=&\liminf_{m\to\infty}\frac{4}{(m-k)^2}\sum_{n=k}^{m-1}\Big[(m-n)^2(n+2)^{\frac{3}{2}}\Big]\\
\geq&\liminf_{m\to\infty}\frac{4}{(m-k)^2}\sum_{n=k}^{m-1}(m-n)^2\\
=&\liminf_{m\to\infty}\Big[\frac{2}{3}(m-k)\Big(1+\frac{1}{m-k}\Big)\Big(2+\frac{1}{m-k}\Big)\Big]\\
\geq&\liminf_{m\to\infty}\frac{4}{3}(m-k)=\infty.
\end{aligned}
$$

由定理 2.4 知方程 (3.3) 是振动的.

参 考 文 献

[1] Agarwal R P. Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications. New York: Marcel Dekker, 2000

[2] Agarwal R P, Bohner M, Grace S R, Regan D O. Discrete Oscillation Theory. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2005

[3] Agarwal R P, Wong P J Y. Advanced Topics in Difference Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997

[4] Cheng J F. Oscillation Criteria for Second-order Functional Difference Equations. *Acta. Math. Sinica.*, 2006, 49(2): 317–326 (in Chinese)

[5] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952

[6] Jiang J C. Oscillation Criteria for Second-order Quasilinear Neutral Delay Difference Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2002, 125: 287–293

[7] Li H J, Yeh C C. Oscillation Criteria for Second-order Neutral Delay Difference Equations. *Comput. Math. Appl.*, 1998, 36(10-12): 123–132

[8] Li W T, Saker S H. Oscillation of Second-order Sublinear Neutral Delay Difference Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2003, 146: 543–551

[9] Luo J W. Oscillation Criteria for Second-order Quasilinear Neutral Difference Equations. *Comput. Math. Appl.*, 2002, 43: 1549–1557

[10] Philos C G. Oscillation Theorems for Linear Differential Equation of Second Order. *Arch. Math.*, 1989, 53: 482–492

[11] Wong J S W. On Kamenev-type Oscillation Theorems for Second order Differential Equations with Damping. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, 258: 244–257

[12] Xu Z, Xia Y. Kamenev-type Oscillation Criteria for Second-order Quasilinear Differential Equations. *Elec. J. Diff. Eqs.*, 2005, 27: 1–9

[13] Zhang B G, Saker S H. Kamenev-type Oscillation Criteria for Nonlinear Neutral Delay Difference Equations. *Indian J. Pure. Appl. Math.*, 2003, 34(11): 1571–1584

[14] Zhou Y. Oscillation and Nonoscillation Criteria for Second-order Quasilinear Difference Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, 303: 365–375

Oscillation Criteria for Second-order Quasilinear Neutral Delay Difference Equation

WANG Dongmei

(*College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou* 570228)

(*E-mail: w_dongmei1980@163.com*)

XU Zhiting

(*School of Mathematics Science, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

(*E-mail: xuzhit@126.com*)

Abstract By using Riccati transformation, averaging technique and a lot of inequality techniques, some sufficient conditions are obtained for oscillation of the second-order quasi-linear neutral delay difference equations

$$\Delta\big[r_n|\Delta z_n|^{\alpha-1}\Delta z_n\big]+q_nf(x_{n-\sigma})=0,$$

where $z_n=x_n+p_nx_{n-\tau}$, under the conditions $\alpha\geq\beta\geq 1$ or $\alpha\geq 1,\ \ 0<\beta<1$, where β is a constant in condition $A(4)$ of this paper, and give some examples to explain.

Key words oscillation; second order; difference equation

MR(2000) Subject Classification 62G05; 62N01

Chinese Library Classification O175