

一维 SPH 的稳定性分析

田 瑜¹⁾ 傅学金 关正西

(第二炮兵工程学院二系, 西安 710025)

摘要 采用 von Neumann 稳定性分析方法, 对 SPH (smoothed particle hydrodynamics, 光滑粒子水动力) 的两种动量方程离散形式进行了一维稳定性分析. 两者各自的稳定性条件表明, 动量方程的离散形式对 SPH 的稳定性具有重要影响. 在此基础上, 得到了蛙跳积分方案的一维 SPH 稳定性条件的一般形式. 数值算例验证了本文结论.

关键词 SPH, 稳定性分析, von Neumann 稳定性分析方法

ONE DIMENSIONAL SPH STABILITY ANALYSIS

TIAN Yu¹⁾ FU Xuejin GUAN Zhengxi

(The 2nd Dept., Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract This paper presents a more general stability condition for one dimensional smoothed particle hydrodynamics (SPH) by combining two different stability conditions derived by two different momentum conservation discrete equations using von Neumann stability method. The result shows that SPH stability is greatly affected by different momentum conservation discrete equations. At the end of this paper, an example is given.

Key words SPH, stability analysis, von Neumann stability analysis method

引 言

SPH 是一种无网格方法, 它克服了传统网格方法的缺点, 既能处理大变形问题, 又能处理材料追踪问题, 使它的应用被扩展到了固体领域. 但是, SPH 在固体领域出现了拉伸不稳定性现象^[1], 这种现象成了 SPH 在固体力学领域应用的重要问题^[2].

文献 [1] 仅针对 SPH 的一种动量方程的离散形式

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (1)$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2)$$

进行了 von Neumann 分析, 得出了当扰动波长为最小时, SPH 稳定性的条件与核函数的二阶导数和应力乘积的符号有关的结论. 其中, $r_{ij} = |x_i - x_j|$, x_i 为粒子 i 的位置, v_i 为粒子 i 的速度, m_j 为粒子 j 的质量, σ_j 为粒子 j 的应力 (拉伸为正, 压缩为

负), ρ_i 为粒子 i 的密度, Π_{ij} 为黏性项, W 为核函数. 但是, 在实际应用中, SPH 动量方程的离散形式不止一种, 并且通过分析发现, 动量方程的离散形式对稳定性的结论具有重要影响. 因此, 有必要对其它动量方程离散形式的稳定性进行 von Neumann 分析, 得到更全面的 SPH 拉伸稳定性结论.

文献 [1] 在推导不稳定性条件时, 得到了如下的特征方程

$$\hat{\lambda} - 2B\hat{\lambda} + C = 0 \quad (3)$$

特征值 $\hat{\lambda} = B \pm \sqrt{D}$, $D = B^2 - C$, B , C , D 的含义见文献 [1]. 文献 [1] 认为 $D > 0$ 是 SPH 不稳定的充分条件, 即当 $D > 0$ 时, $|\hat{\lambda}| > 1$.

为了能够与文献 [1] 进行比较, 本文采用 von Neumann 稳定性分析方法对其它两种 SPH 动量方程离散形式进行稳定性分析时, 连续方程、材料的本构方程和相关假设都与文献 [1] 相同.

2007-01-26 收到第 1 稿, 2008-04-08 收到修改稿.

1) E-mail: arther008@163.com

1 对两种动量方程离散形式的稳定性分析

1.1 对第 1 种动量方程离散形式的稳定性分析

动量方程的离散形式为

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (4)$$

式中没有考虑人工黏性, 粒子的位置关系如图 1 所示.

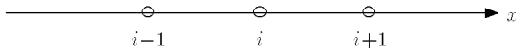


图 1 粒子编号与位置关系

当光滑长度为 2 倍的粒子间距 ΔX 时, 设粒子的质量是相等的, 则

$$\frac{dv_i}{dt} = m \left[\left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_{i-1}}{\rho_{i-1}^2} \right) W'_{i,i-1} - \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_{i+1}}{\rho_{i+1}^2} \right) W'_{i,i+1} \right] \quad (5)$$

其中, $W'_{i,i+1} = \frac{\partial W_{i,i+1}}{\partial r_{i,i+1}}$, $W'_{i,i-1} = \frac{\partial W_{i,i-1}}{\partial r_{i,i-1}}$.

在式 (5) 中, 处于分母位置的密度对于小扰动可取为常数, 则式 (5) 变为

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{m}{\rho^2} [(\sigma_i + \sigma_{i-1}) W'_{i,i-1} - (\sigma_i + \sigma_{i+1}) W'_{i,i+1}] \quad (6)$$

根据蛙跳积分方案, 在时间步 n 有

$$v_i^{n+1/2} = v_i^{n-1/2} + \frac{m\Delta t}{\rho^2} [(\sigma_i + \sigma_{i-1}) W'_{i,i-1} - (\sigma_i + \sigma_{i+1}) W'_{i,i+1}]^n \quad (7)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n - v_i^{n+1/2} \Delta t \quad (8)$$

方程 (7) 和 (8) 构成稳定性分析方程.

根据 Hooke 定律和连续方程, 可以得到以粒子位置表示的应力表达式

$$\sigma_i = -K \left[1 - \frac{\rho_0}{2m} (x_{i+1} - x_{i-1}) \right] \quad (9)$$

对方程 (7) 和 (8) 进行小扰动, 省略扰动的二阶项, 整理得到扰动传播方程

$$\begin{aligned} \delta v_i^{n+1/2} - \delta v_i^{n-1/2} = & \\ & \frac{m\Delta t}{\rho^2} \left[2\sigma W'' (2\delta x_i^n - \delta x_{i+1}^n - \delta x_{i-1}^n) + \right. \\ & \left. \frac{\rho_0 K W'}{2m} (2\delta x_i^n - \delta x_{i+2}^n - \delta x_{i-2}^n) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\delta x_i^{n+1} - \delta x_i^n = \delta v_i^{n+1/2} \Delta t \quad (11)$$

对式 (10) 和式 (11) 中的小扰动量进行 Fourier 分解, 取得扰动传播的增长因子矩阵, 考察该矩阵特征值的模是否大于 1, 来判断算法的稳定性. 经分析, 该离散形式的 SPH 稳定性结论为

(1) 当 $D \leq 0$, 即 $-4 \leq \alpha \Delta t \leq 0$, 算法稳定.

(2) 当 $D > 0$, 即 $\alpha \Delta t < -4$ 或 $\alpha \Delta t > 0$ 时, 算法不稳定.

此处

$$\alpha = -\frac{2m\Delta t}{\rho^2} \left\{ 2\sigma W'' [\cos(k\Delta X) - 1] + \frac{\rho_0 K W'}{2m} [\cos(2k\Delta X) - 1] \right\} \quad (12)$$

$$D = 4\alpha \Delta t + (\alpha \Delta t)^2 \quad (13)$$

特殊地, 当扰动波长 $\lambda = \lambda_{\min} = 2\Delta X \Rightarrow k_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \frac{\pi}{\Delta X}$ 时

$$\alpha = 8m W'' \Delta t \frac{\sigma}{\rho^2} \quad (14)$$

此时, 稳定性条件为

$$-4 \leq \alpha \Delta t \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{m(\Delta t)^2} \leq W'' \sigma \leq 0 \quad (15)$$

式 (15) 右端与文献 [1] 得出的结论一致.

1.2 第 2 种动量方程离散形式的稳定性分析

采用文献 [2] 不考虑人工黏性的动量方程, 其离散形式为

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (16)$$

与 1.1 节分析过程类似, 得到扰动传播方程为

$$\begin{aligned} \delta v_i^{n+1/2} - \delta v_i^{n-1/2} = & \\ & -\frac{\rho_0 K W' \Delta t}{2\rho^2} (\delta x_{i+2}^n + \delta x_{i-2}^n - 2\delta x_i^n) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\delta x_i^{n+1} - \delta x_i^n = \delta v_i^{n+1/2} \Delta t \quad (18)$$

可以看出, 式 (17) 比式 (10) 缺少与 W'' 相关项, 因此断定, 采用式 (17) 和式 (18) 进行稳定性分析不会出现与 W'' 有关的稳定性条件. 所以, 简单地采用文献 [1] 的结论来判断 SPH 的稳定性是不恰当的.

依据 von Neumann 稳定性分析方法, 该 SPH 动量方程离散形式的稳定性结论与 1.1 相同, 但 α 的表达式发生了改变

$$\alpha = -\frac{\rho_0 K W' \Delta t}{\rho^2} [\cos(2k\Delta X) - 1] \quad (19)$$

很明显, 当扰动波长 $\lambda = \lambda_{\min}$ 时, $\alpha = 0$, 条件 $-4 \leq \alpha \Delta t \leq 0$ 恒成立, 即该 SPH 计算的稳定性与核函数的二阶导数无关, 也与应力的拉伸和压缩状态无关, SPH 的拉伸不稳定性不会发生. 该结论与文献 [1] 不同, 说明 SPH 计算的稳定性与 SPH 的动量方程的离散形式有着至关重要的关系.

1.3 一维 SPH 稳定性条件的一般形式

一般性地, 如果扰动传播方程经 Fourier 分解之后具有如下的形式

$$\delta v^{n+1/2} - \delta v^{n-1/2} = \alpha \delta x^n \quad (20)$$

$$\delta x^{n+1} - \delta x^n = \delta v^{n+1/2} \Delta t \quad (21)$$

α 是 W' , W'' , m , ρ , σ 和 Δt 的函数, 存在稳定性条件

$$-4 \leq \alpha \Delta t \leq 0 \quad (22)$$

式 (22) 的形式与动量方程和连续方程离散形式以及材料的本构方程都没有关系, 只与采用了蛙跳的时间积分方案有关. 如果积分方案改变, 则式 (20) 和式 (21) 的形式将会发生改变, 就不会得到稳定性条件的一般形式式 (22).

2 数值算例

本文采用文献 [3] 中的算例. 有一根一端固支一端自由的杆, 靠近自由端的 $1/4$ 杆受到 5 m/s 的速度冲击, 如图 2 所示, 杆被离散成为 40 个粒子, 核函数采用 3 次样条函数, 光滑长度取为粒子间距. 动量方程分别采用本文分析的两种以及文献 [1] 中的离散形式.

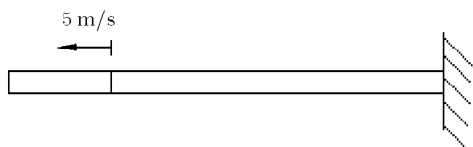


图 2 算例示意图

计算过程不考虑人工黏性, 杆的自由端位移和速度随时间的变化关系, 采用 3 种不同动量方程离散形式的计算结果进行对比, 见图 3 和图 4.

从计算结果的对比看出, 稳定性最好的是本文 1.2 节采用的动量方程离散形式, 这与本文分析的结果相符合. 稳定性最差的是本文 1.1 节采用的离散形式, 其不稳定性的趋势明显.

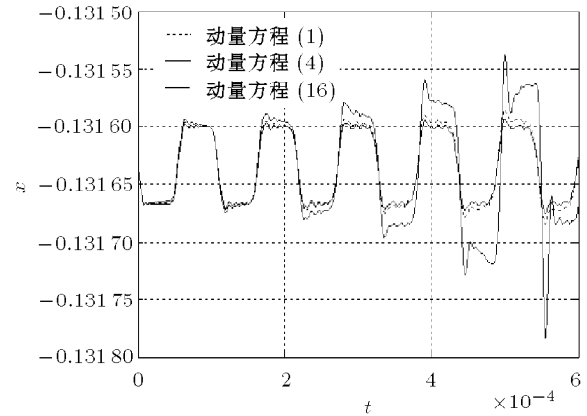


图 3 自由端位移 - 时间图

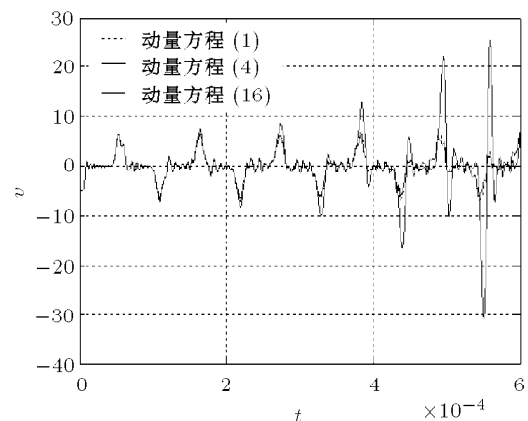


图 4 自由端速度 - 时间图

3 结 论

根据对于不同动量方程离散形式的 SPH 稳定性分析和数值算例, 得出以下的结论. (1) 动量方程的离散形式对于 SPH 的稳定性具有重要影响, 采用不同的离散形式可能会产生不同的稳定性条件. (2) 从理论上讲, SPH 的拉伸不稳定性的出现具有特殊性, 不是所有的 SPH 都存在这样的缺陷. (3) 对于采用蛙跳积分方案的 SPH 而言, $-4 \leq \alpha \Delta t \leq 0$ 是 SPH 的 von Neumann 稳定性分析所得到稳定性条件的一般表达式.

参 考 文 献

- Swegle JW, Hicks DA, Attaway SW. Smooth particle hydrodynamics stability analysis. *J Comput Phys*, 1995, 116: 123~134
- Randles PW, Libersky LD. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139: 375~408
- Dyka CT, Ingel RP. An approach for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. *Comput Struct*, 1995, 57: 573~580