in the Transversely Isotropic Foundation Acted by Horizontal Loads. [Master Dissertation]. Jiaozuo Institute of Technology, 2000 (in Chinese))

5 顿志林，刘干斌，乔世范等. 横观各向同性地基轴对称问题的应力和沉降分析. 焦作工学院学报，2002, 21(1) (Dun Zhilin, Liu Ganbin, Qiao Shifan et al. Analysis of stress and settlement of axial symmetric problem of transversely isotropic foundation. *Journal of Jiaozuo Institute of Technology*, 2002, 21(1)(in Chinese))

6 Qiao Shifan, Liu Baochen, Dun Zhilin, et al. The computation of stress caused by horizontal loads in a transversely isotropic foundation. In: Progress in Safety Science and Technology. Beijing/New York: Science Press, 2002. 424~429

CONSTITUTIVE MODEL OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC FOUNDATION

QIAO Shifan*　DUN Zhilin**　NI Hongge†　LIU Baochen*

*(Institution of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, China)

**(Department of Civil and Architecture Engineering, Jiaozuo Institution of Technology, Jiaozuo 454000, China)

†(Traffic Engineering Institute of Yantai Normal College, Yantai 264025, China)

Abstract　Because of the sedimentation of soil, many foundations can be considered as transversely isotropic. In this article, based on theories of mathematics and mechanics, the constitutive model of a transversely isotropic foundation is proposed together with the methods of determining related parameters. The model is found easy to use in engineering. As far as the sedimentation of soil is concerned, the constitutive model gives more realistic stress and strain response than the isotropic model.

Key words　transversely isotropic foundation, constitutive equations, anisotropic, mechanics parameter

用多色染色理论实现有限元刚度矩阵并行组集

赵慧明　蔺海晓　董正筑

(中国矿业大学理学院力学系，徐州 221008)

摘要　根据多色染色理论，在同一节点有任意多个单元邻接的情况下，对有限元的单元进行了分类；在刚度矩阵组集时，同类单元可以并行计算，从而提高了组集效率．该并行算法在 PVM (并行虚拟机器) 并行平台上进行了具体实现，取得了较好的并行效率．

关键词　多色染色，刚度矩阵，并行组集

并行化是有限元计算方法的发展趋势 [1,2]．有限元刚度矩阵如何并行组集的问题是有限元分析中的一个重要问题．在地下油藏模拟及海洋石油钻井平台、空间站等大型或超大型结构的分析中，刚度矩阵的组集是一个很耗费机时的过程．如果使用并行算法，则可以大大缩短组集时间，提高解决问题的效率．文献 [1] 基于文献 [3] 的思想提出了通过染色理论实现有限元刚度矩阵的并行组集，但应用传统的“四色染色”，限于一个节点有不多于四个单元邻接的情况．文献 [4] 对传统的“四色染色”理论进行了改进，提出了多色染色的方法，本文将多色染色的方法应用于有限元刚度矩阵的并行组集．与四色染色相比，多色染色适用于同一节点有任意多个单元邻接的情况．

1　染色原理与多色染色

“四染色”理论是数学中著名的定理之一，即可以用不多于四色对地图染色，使相邻的行政区不重色，假设已知地图的行政区域如图 1 所示，对各个区域分别用 1#, 2#, 3#, 4# 四种颜色染色．这就是传统的地图染色．这种染色方式实际上有一种默认，即默认为相邻区域的邻接是通过边，而不是点．对于这类共边邻接区域的着色，用不多于 4 种的颜色就一定能使相邻的区域不同色；对于共点邻接区域的染色，用不多于 4 种的颜色进行染色却未必能行．如图 2 所示，区

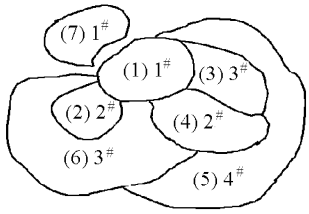

图 1　四色染色

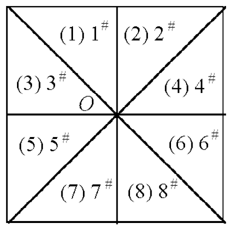

图 2　多色染色

2003–12–11 收到第 1 稿， 2004–03–05 收到修改稿．

域 (1)~(8) 有一个公共的邻接点 O，为共点邻接区域. 对此图进行染色时，若用 4 种颜色，则必有部分区域在公共的邻接点处同色. 要使这 8 个区域在公共的邻接点处不同色，需要 8 种颜色. 即：对于共点区域染色，所用的颜色数等于共点区域的个数. 这就是所谓的 “多色染色”.

2 应用多色染色理论实现有限元刚度矩阵并行组集

有限元刚度矩阵是由各单元刚度矩阵组合而成的，刚度矩阵中的每一个元素对应有限元网格中一个节点的一个自由度，每一个节点又和若干个单元相联系，因此刚度矩阵中的每一个元素实际上是由对应节点联系的各单元刚度矩阵组合而成. 为了实现并行组集，这些相关联的单元就要分批进行，才不会出现地址冲突 (或称为数据更新异常). 因此，首先要做的事情就是要将单元分类，即要对所有单元进行染色，染同种颜色的单元互不关联 (没有公共的点或边)，可以作为一类. 图 3 所示为三角形单元的六色染色结果. 图中网格，其节点联系的最大单元数是 6，这就需要 6 种颜色来染色. 染色过程与传统的四色染色过程相似，只有颜色种类的多少不同.

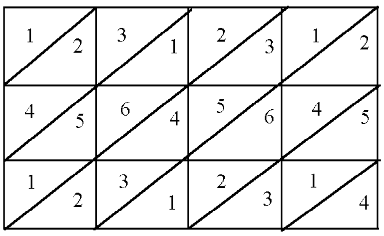

图 3 三角形单元的六色染色结果

染色后就可以实现并行组集了. 设第 i 类单元个数为 $s_i(i=1,2,\cdots,5,6)$，处理机个数为 CN，我们可以把 s_i 个单元分成 s_i/CN 个单元组，再把每个单元组内独立单元分配到 CN 个处理机中进行刚度阵的并行组集. 如果 s_i 正好为 CN 所整除，则所有单元都是并行生成和组集进入总刚；如果 s_i/CN 有余数，最后若干个单元再单独组集到总刚. 这样依此将所有的单元进入总刚，而不会引起存取地址冲突.

3 算 例

如图 4 所示一矩形梁，$P=10\,\mathrm{kN}$. 有限元计算时采用图 3 所示单元划分方法，单元个数取为 400, 800, 1800, 3200, 5000, 10000 等 6 种情况.

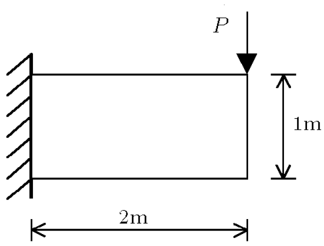

图 4

评估并行计算的方法主要有两种：(1) 加速比，它定量地描述了在对一个串行程序实现并行化的过程中，由于执行时间的减少而获得的性能. (2) 效率，它度量了每个处理机有效使用部分占总的执行时间的百分比. 表 1 给出了采用不同单元数时的串行计算时间 $t_{\rm seq}$，并行 $(CN=3)$ 计算时间 $t_{\rm para}$，加速比 s 及效率 E.

表 1 计算时间、加速比及效率

NE	$t_{\rm seq}$/ms	$t_{\rm para}$ /ms	s	E
400	5	4.5	1.111 111	0.370 37
800	8	6	1.333 333	0.444 444
1 800	19	12	1.583 333	0.527 778
3 200	32	19	1.684 211	0.561 404
5 000	53	28	1.892 857	0.630 952
10 000	108	51	2.117 647	0.705 882

* $s=t_{\rm seq}/t_{\rm para}$ 表示并行加速比

** $E=s/CN$ 表示并行效率

从表 1 可以看出，随着单元数的增加，加速比和效率都有明显的提高. 在单元比较少时，因为比串行多一个前处理程序，用以建立单元邻接矩阵和对单元进行染色分类，而且进行系统通信和增加节点机也要占用一部分时间，这部分时间相对于少量单元的刚度组集是比较多的，所以并行的优势并没有体现出来；随着单元数的增加，前处理用时相对于刚度组集就要少得多，并行的优势就体现出来了. 由此可见，该并行算法在大型计算中可以得到较好的加速比和效率.

4 结 论

通过上述研究，我们可以得出如下结论：

(1) 用改进的染色理论实现有限元刚度矩阵的并行组集的方法是可行的、有效的.

(2) 这种并行技术简单易行，可扩展性强.

参 考 文 献

1 张汝清. 并行计算结构力学. 重庆：重庆大学出版社， 1993 (Zhang Ruqing. Parallel Computation in Structural Mechanics. Chongqing: Chongqing University Press, 1993 (in Chinese))

2 程建纲，李明瑞，黄文彬. 有限元分析的并行计算方法. 力学与实践，1995, 17(4): 6~12 (Cheng Jiangang, Li Mingrui, Huang Wenbin. The method of parallel computation in the FEM analysis. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17(4): 6~12 (in Chinese))

3 Welsh DJA, Power MB. An upper bounder for the chromatic number of a graph and its application to timetable problem. *Computer Journal*, 1967, 10: 85~87

4 Adams L, Ortega J. A multi-color SOR method for parallel computation. In: Proceeding of the 1982 International Conference on Parallel Processing. IEEE Computer Society, 1982

COMPOSING IN PARALLEL THE STIFFNESS MATRIXES OF FEM WITH THE THEORY OF MULTI-COLOR DYEING

ZHAO Huiming　LIN Haixiao　DONG Zhengzhu
(China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract Based on the theory of multi-color dyeing, the elements of FEM were sorted with arbitrary number of elements in the neighborhood of the same node. While composing the stiffness matrix, the same set of elements can be treated by parallel computation. So the efficiency of composing the stiffness matrix was raised. The parallel algorithm was carried out on parallel platform PVM with good results.

Key words multi-color dyeing, stiffness matrix, parallel composing

精细辛算法的高效格式和简化计算 1)

徐明毅　张勇传
(华中科技大学水电及数字化工程学院，武汉 430074)

摘要 对精细辛几何算法设计了高效的迭代过程，减少了精细积分的计算量，同时提出了精细辛算法的简化形式，避免了复杂的矩阵求逆运算，并给出了相应的误差估计，最后编制了程序进行验证，证明了所采取的方法能够使计算快捷，精度高，稳定性好.

关键词 辛算法，精细算法，误差估计

哈密顿系统的现代数学表达形式是辛几何，由此构造的辛差分格式能够保持哈密顿系统的对称性和守恒律，在稳定性和长期跟踪能力上具有独特的优势 [1,2]. 为了提高计算精度，在指数函数精细积分算法基础上 [3]，有人进一步提出了辛几何精细算法 [4,5]，为高精度稳定计算提供了有效的途径. 本文研究了各阶精细辛算法的高效迭代格式，最大限度地降低了精细积分的计算量. 为了避免辛格式中的矩阵求逆运算，提出了计算的简化方法，并对简化引起的误差进行了估计，给出了相应的建议，使之便于应用，最后通过程序验证了所提出的方法是正确的和有效的.

1　精细辛几何快速算法

如果哈密顿函数是 z 的二次型

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{z},\qquad \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}\tag{1}$$

则该哈密顿系统是线性的. 哈密顿方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{z},\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{S}\tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{B}$ 是无穷小辛阵. 方程的解可写为

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{e}^{t\boldsymbol{B}}\boldsymbol{z}(0)\tag{3}$$

即相流是无穷小辛阵指数变换，$\boldsymbol{e}^{t\boldsymbol{B}}$ 仍然是辛阵.

辛差分格式在对原问题进行的数值迭代计算过程中，能够保持系统原有的辛性质，因而在长期定量计算中显示出传统算法不可比拟的优点 —— 守恒性与长期跟踪能力. 为了进一步提高计算精度，通常的想法是设法减小其截断误差，可将精细算法 [3] 引入辛算法，如对二阶精度辛格式

$$\boldsymbol{z}^{n+1}=\frac{\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{B}/2}{\boldsymbol{I}-\tau\boldsymbol{B}/2}\boldsymbol{z}^{n}\tag{4}$$

其中 τ 为时间步长. 为了提高计算精度，将 τ 细分为 2^N 等份，则精细算法为

$$\boldsymbol{z}^{n+1}=\left(\frac{\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{B}/2^{N+1}}{\boldsymbol{I}-\tau\boldsymbol{B}/2^{N+1}}\right)^{2^N}\boldsymbol{z}^{n}\tag{5}$$

令 $T_0=\tau\boldsymbol{B}/2^{N+1}$，问题归结为计算传递矩阵

$$\boldsymbol{S}=\left(\frac{\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_0}{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_0}\right)^{2^N}\tag{6}$$

对 2^N 个相乘项，可以层层推进，只需 N 次乘法即可完成. 为了降低计算机舍入误差，必须只计算小量部分，由

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_0)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_0)=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{T}_0\times\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_1\tag{7}$$

可得到递推关系为

$$\boldsymbol{T}_N=2\boldsymbol{T}_{N-1}+\boldsymbol{T}_{N-1}\times\boldsymbol{T}_{N-1}\tag{8}$$

最后 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_N$. 如此可计算分子和分母，然后得到传递矩阵.

四阶精度辛格式为

$$\boldsymbol{z}^{n+1}=\frac{\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{B}/2+\tau^2\boldsymbol{B}^2/12}{\boldsymbol{I}-\tau\boldsymbol{B}/2+\tau^2\boldsymbol{B}^2/12}\boldsymbol{z}^{n}\tag{9}$$

同样进行精细积分，有

$$\boldsymbol{z}^{n+1}=\left(\frac{\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{B}/2+t^2\boldsymbol{B}^2/12}{\boldsymbol{I}-t\boldsymbol{B}/2+t^2\boldsymbol{B}^2/12}\right)^{2^N}\boldsymbol{z}^{n}\tag{10}$$

本文于 2003–11–24 收到
1) 华中科技大学博士后基金资助 (0101271026).