

# 薄板弯曲问题的复合傅里叶级数方法

孙卫明\* 杨光松† 章梓茂\*

\*(北京交通大学工程力学研究所, 北京 100044)

†(第二炮兵装备研究院第三研究所, 北京 100085)

**摘要** 解析方法与数值方法有效融合是提高计算效能的重要途径. 提出薄板弯曲问题的复合傅里叶级数方法. 它以解析方法为融合基体, 数值方法为融合增强相, 是一种新的融合模式. 在这种新的融合模式中, 傅里叶级数解析解作为变形场的连续表现形式, 摆脱了载荷形式和边界条件的强烈依赖性, 表现出良好的收敛性态.

**关键词** 薄板弯曲问题, 解析方法, 数值方法, 融合模式, 复合傅里叶级数方法

结构分析的常用方法包括解析方法和数值方法两种类型. 近来, 这两类方法的有效融合引起了人们的注意. 在新的融合方法中, 解析方法和数值方法的优势得以保留, 从而为获得经济高效的计算技术提供了可能. 比如说, 解析方法可用于提高计算精度和计算经济性, 数值方法可用于提高几何适应性和灵活性. 对于这类新型融合方法的研究现在还处在起步阶段, 目前融合模式仅限于以数值方法为融合基体, 解析方法为融合增强相. 如在新近提出的理性有限元法<sup>[1,2]</sup>和复合单元法<sup>[3]</sup>中, 选用的单元变形模式合乎力学微分方程的要求, 据此得到的单元列式具有计算精度高、适用范围广等特点, 显示出方法融合思想的潜在优势. 然而, 国内外尚无其它融合模式的报道.

本文提出薄板弯曲问题的复合傅里叶级数方法. 它以解析方法(傅里叶级数方法)为融合基体, 数值方法(包括有限元法和加权残值法)为融合增强相, 是一种新的融合模式. 在这种新的融合模式中, 傅里叶级数方法摆脱了载荷形式和边界条件的强烈依赖性, 其收敛性态良好.

## 1 融合模式

与传统方法不同, 新的融合方法先构造原问题的近似解, 在此基础上再利用傅里叶级数解析解对近似解进行融合, 从而获得较好的收敛特性. 现对融合模式作进一步说明.

(1) 构造薄板弯曲问题近似解的目的是提取薄板结构弯曲变形过程中的主要变形模式, 因此近似解需要具有一定的解析精度, 并且在形式上允许作进

一步调整. 关于近似解的来源没有特别限制, 具有很大的灵活性, 如可以选取一些相近问题的解析解作为本方法中的近似解, 也可以从样条函数和变分法的角度构造近似解. 本文则在数值分析结果的基础上, 利用插值的方法构建薄板弯曲问题的多项式形式近似解.

(2) 傅里叶级数形式的融合解实际上是准零载荷形式、准齐次边界条件下的解析解. 由于已消除载荷形式主要影响, 边界条件亦已事先基本满足, 因此融合解在形式上将只包含傅里叶级数形式的通解和特解, 并且具有良好的收敛性态.

## 2 近似解

利用有限元法分析特定载荷形式和边界条件的薄板弯曲问题, 可以获得变形场的离散表现形式(单元节点的位移、转角以及内力). 选取  $p$  次完全多项式作为变形场连续表现形式的近似, 即设位移函数为

$$W^A(x, y) = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^k a_{k(k-1)/2+j} x^{k-j} y^{j-1} \quad (1)$$

其中  $a_j (1 \leq j \leq (p+1)(p+2)/2)$  为待定常数, 使得如下的残值表达式取极小值

$$I_d = D^2 \sum_{i=1}^{l_1} [W^A(x_i, y_i) - w_i]^2 + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} [D \nabla \nabla W^A(x_i, y_i) - q(x_i, y_i)]^2 \quad (2)$$

式中  $(x_i, y_i)$  为用于插值的部分节点坐标,  $w_i$  为相

应的节点位移,  $l_1$  为位移残值方程数目,  $l_2$  为残值方程数目,  $q$  为载荷函数,  $D$  为薄板的弯曲刚度.

### 3 融合解

融合解具有如下的傅里叶级数形式<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned}
 W^F(x, y) = & \sum_{m=1}^M \left[ A_{1m} \frac{\sinh \alpha_m(b-y)}{\sinh \alpha_m b} + \right. \\
 & A_{2m} \frac{\sinh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} + \\
 & A_{3m} \frac{\alpha_m(b-y) \cosh \alpha_m(b-y)}{\sinh \alpha_m b} + \\
 & \left. A_{4m} \frac{\alpha_m y \cosh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} \right] \sin \alpha_m x + \\
 & \sum_{n=1}^N \left[ A_{5n} \frac{\sinh \beta_n(a-x)}{\sinh \beta_n a} + A_{6n} \frac{\sinh \beta_n x}{\sinh \beta_n a} + \right. \\
 & A_{7n} \frac{\beta_n(a-x) \cosh \beta_n(a-x)}{\sinh \beta_n a} + \\
 & \left. A_{8n} \frac{\beta_n x \cosh \beta_n x}{\sinh \beta_n a} \right] \sin \beta_n y + \\
 & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn}^F \sin \alpha_m x \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{3}$$

其中  $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $\beta_n = n\pi/b$ ,  $a, b$  为薄板的长度和宽度,  $A_{im}(1 \leq i \leq 4, 1 \leq m \leq M)$  及  $A_{in}(5 \leq i \leq 8, 1 \leq n \leq N)$  为待定常数, 常数  $A_{mn}^F(1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N)$  由下式给出

$$\begin{aligned}
 A_{mn}^F = & \frac{4}{Dab(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \times \\
 & \int_0^a \int_0^b [q(x, y) - D\nabla\nabla W^A(x, y)] \cdot \\
 & \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy
 \end{aligned} \tag{4}$$

若原问题中存在自由边界, 笔者提出应用等效的广义简支边界概念, 即将零剪力条件替换为离散形式的单元节点位移条件.

### 4 算例分析

悬臂矩形薄板弯曲问题是一历史性难题. 对于长宽比  $a/b$  大于 1 的情况, 目前尚无满意的解析解. 如图 1 所示, 考虑  $a/b = 2, \mu = 0.3$ , 角点  $A(a, 0)$  处承受集中载荷  $P$  时薄板的弯曲情况. 有限元分析采用  $16 \times 16$  均匀网格,  $p = 6, l_1 = 25, l_2 = 34$ . 限于篇幅, 表 1 摘要给出了部分计算结果, 显示出数值融合解析解的优越性质.

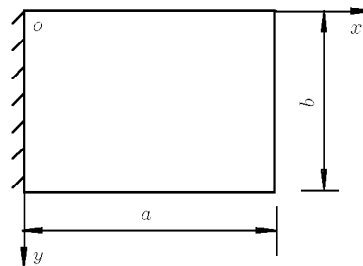


图 1 悬臂矩形薄板

表 1 悬臂矩形薄板的部分计算结果

	$WD/Pa^2$	$\beta_x D/Pa$	$-\beta_y D/Pa$	$-M_x/P$	$-M_y/P$	$M_{xy}/P$
角点 $(a, 0)$						
近似解	0.781 132	1.167 96	0.346 041	0	0	0.480 489
复合傅里叶级数方法 ( $M = 4, N = 6$ )	0.781 132	1.176 98	0.345 358	0	0	0.500 000
复合傅里叶级数方法 ( $M = 8, N = 6$ )	0.781 132	1.171 85	0.345 918	0	0	0.500 000
复合傅里叶级数方法 ( $M = 12, N = 6$ )	0.781 132	1.170 21	0.347 282	0	0	0.500 000
有限元法	0.781 163	1.169 38	0.347 275	0.010 22	0.025 001	0.486 741*
内点 $(0.8125a, 0.5b)$						
近似解	0.504 601	1.009 54	0.247 077	0.353 768	0.076 483	0.249 319
复合傅里叶级数方法 ( $M = 4, N = 6$ )	0.504 316	1.007 62	0.247 157	0.374 292	0.081 088	0.254 101
复合傅里叶级数方法 ( $M = 8, N = 6$ )	0.504 415	1.009 10	0.246 938	0.363 467	0.085 026	0.249 630
复合傅里叶级数方法 ( $M = 12, N = 6$ )	0.504 419	1.009 01	0.246 951	0.364 273	0.084 332	0.249 798
有限元法	0.504 433	1.008 91	0.246 943	0.364 889	0.084 076	0.249 757

\* 薄板角点条件要求  $M_x = 0, M_y = 0, 2M_{xy} = P$ .

### 5 结论

本文发展了关于解析方法与数值方法的新的融合模式. 依照这一模式, 提出了薄板弯曲问题中融合数值分析技术的复合傅里叶级数方法. 本文获得

的数值融合解析解是变形场的连续函数表示形式, 在任意复杂边界条件和载荷形式下仍具有良好的收敛速度和计算精度.

(下转第 53 页)