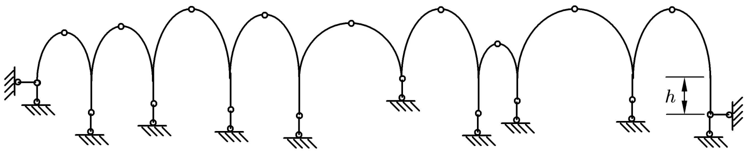


图 3 支座高度不等的 n 跨连拱体系

那么下面讨论对于高跨比相同及跨度不等但对称的情况，它只是上述连拱体系的一种特例，当跨数 n 为偶数时，由于对称性，显然 $f_n - f_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot f_1 = 0$，连拱体系为几何可变的体系；当跨数 n 为奇数时，连拱体系不一定是几何不变的体系，还需分情况讨论：奇数跨连拱体系结构中有一跨正好位于对称轴上，不妨称为“中轴跨”，设中轴跨是第 K 跨，则由对称性，有：当 $f_K - 2f_{K-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 2f_1 = 0$ 时，连拱体系允许存在自内力，为几何可变的体系；当 $f_K - 2f_{K-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 2f_1 \neq 0$ 时，连拱体系的内力只有零解，为几何不变的体系.

参 考 文 献

1 单建. 趣味结构力学. 北京: 高等教育出版社，2008

2 龙驭球，包世华. 结构力学教程. 北京: 高等教育出版社，2000

(责任编辑: 胡 漫)

积分法与单位载荷法一致性的数学推证

郭孟武 1)

(清华大学土木系，北京 100084)

摘要 在结构力学的线弹性问题中，求解杆件位移可用积分法与单位载荷法，两种方法的结果一致；在逻辑上，两种方法在处理该问题上的等价性也是比较明显的. 本文旨在将此一致性进行数学上的表述与推证. 本文在一般情形下，利用单位载荷法表示出杆件单元的位移分布，并验证该位移满足积分法所用的小挠度曲线微分方程以及边界条件. 以此方式在数学上完成了该一致性的推证与论述.

关键词 弹性位移，积分法，单位载荷法，等价性

中图分类号：O342 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-12-276

在结构力学的线弹性问题中，求解杆件位移的方法有多种. 积分法是基于微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{M_\mathrm{p}(x)}{EI}$[1], 求得弯矩分布之后，通过积分，结合边界条件得到 w 与 θ 关于 x 的表达式，求得的是杆件真实的位移分布. 单位载荷法是基于虚力原理的，可求解杆件任意位置任意位移分量，该方法令单位载荷体系的内力在实际变形上做功，求得的自然也是真实的位移分布. 两种方法在逻辑上必然是等价的. 本文希望在数学上推证这种等价性.

1 总体说明

本文采取的推证方式为，证明由单位载荷法求得的挠度、转角函数满足小挠度曲线微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{M_\mathrm{p}(x)}{EI}$，并满足边界条件.

在本文中，弯矩的正负号定义为：杆件上部受拉对应的弯矩为正，下部受拉对应的弯矩为负；转角的正负号定义为：顺时针转动为正，逆时针转动为负；剪力正负号规定同结构力学；局部坐标定义为：沿杆件向右为 u 正向，垂直于杆件向下为 v 正向.

2 引理

在推证等价性前需要对引理进行说明.

引理：某长为 L 的弹性直杆在外载荷作用下有弯矩分布 $M_\mathrm{p}(s)$，其两端垂直于杆件方向的位移分别为 v_A, v_B(如图 1 所示).

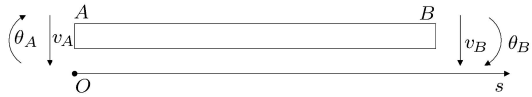


图 1 外载荷作用下杆端位移示意图 (体系 A)

证明其右端的转角可以表示为

$$\theta(s=L) = \theta_B = \frac{v_B - v_A}{L} + \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{s}{L} M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s \qquad (1)$$

证明：考虑一根悬臂梁同样有弯矩分布 $M_\mathrm{p}(s)$，其右端转角为 $\theta_1 = \displaystyle\int_0^L \frac{M_\mathrm{p}(s)}{EI}\mathrm{d}s$，右端的挠度为 $w_1 =$

2012–07–12 收到第 1 稿，2012–11–25 收到修改稿.

1) 郭孟武，1991 年生，男，本科生. E-mail：gmwgmwfms@sina.com

$\int_0^L \mathrm{d}t \int_0^t \frac{M_\mathrm{p}(s)}{EI}\mathrm{d}s$. 容易得到，两端垂直于杆件方向的位移分别为 v_A, v_B 的杆件在弯矩分布 $M_\mathrm{p}(s)$ 下右端转角可以表示为 $\theta(s=L)=\theta_B=\frac{v_B-v_A}{L}+\theta_1-\frac{w_1}{L}$.

进一步计算如下

$$\begin{aligned}
\theta(s=L)=\theta_B &= \frac{v_B-v_A}{L}+\int_0^L \frac{M_\mathrm{p}(s)}{EI}\mathrm{d}s-\frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}t\int_0^t \frac{M_\mathrm{p}(s)}{EI}\mathrm{d}s= \\
&\frac{v_B-v_A}{L}+\frac{1}{EI}\left(\int_0^L M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s-\iint\limits_{\substack{0\leqslant s\leqslant t,\\ 0\leqslant t\leqslant L}}\frac{M_\mathrm{p}(s)}{L}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)= \\
&\frac{v_B-v_A}{L}+\frac{1}{EI}\left(\int_0^L M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s-\int_0^L \mathrm{d}s\int_s^L \frac{M_\mathrm{p}(s)}{L}\mathrm{d}t\right)= \\
&\frac{v_B-v_A}{L}+\frac{1}{EI}\left(\int_0^L M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s-\int_0^L M_\mathrm{p}(s)\left(1-\frac{s}{L}\right)\mathrm{d}s\right)= \\
&\frac{v_B-v_A}{L}+\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{s}{L}M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{2}$$

则该引理证毕.

3 等价性的数学推证

本文的核心命题为：求解线弹性体系中的某杆件位移分布时，利用单位载荷法求得的挠度 $w(x)$ 满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M_\mathrm{p}(x)}{EI}$，并满足边界条件. 以下将进行推证.

结构中某杆件在外载荷作用下的弯矩分布为 $M_\mathrm{p}(s)$，其中 s 为沿杆件的局部坐标. 不妨称该体系为体系 A，在单位载荷法中，该体系贡献变形与位移. 体系 A 的杆端位移亦如图 1 所示.

依据单位载荷法的基本原理即虚功原理，还需要一个有单位载荷作用的体系 B，令体系 B 的内力与外力分别在体系 A 的变形与位移上做功，从而写出虚功方程. 出于方便，该体系 B 选为几何尺寸同体系 A 的杆件单元，单位载荷作用于 $s=x$ 处，同时杆端作用着外力如图 2 所示.

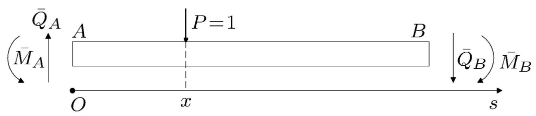


图 2　单位载荷作用下杆端内力示意图 (体系 B)

在杆系结构中，单位载荷在某杆件上移动，移动时的杆端内力 $\bar{M}_A$，$\bar{M}_B$，$\bar{Q}_A$，$\bar{Q}_B$ 与单位载荷所处的局部坐标成线性关系. 由此，$\bar{M}_A$，$\bar{M}_B$，$\bar{Q}_A$，$\bar{Q}_B$ 均为 x 的线性函数，且满足

$$\bar{Q}_A=\left(1-\frac{x}{L}\right)+\frac{\bar{M}_A-\bar{M}_B}{L}\tag{3}$$

$$\bar{Q}_B=-\frac{x}{L}+\frac{\bar{M}_A-\bar{M}_B}{L}\tag{4}$$

由虚力原理，体系 B 的内力与外力分别在体系 A 的变形与位移上做功，由外力功等于内力功得到如下方程 [2]

$$w(x)+\bar{Q}_B v_B-\bar{Q}_A v_A+\bar{M}_B\theta_B-\bar{M}_A\theta_A= \\ \frac{1}{EI}\int_0^L \bar{M}(s,x)M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s\tag{5}$$

利用 $\bar{M}_A$，$\bar{M}_B$，$\bar{Q}_A$，$\bar{Q}_B$ 与 x 的线性关系易得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{M}(s,x)}{\partial x^2}M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s\tag{6}$$

又由于

$$\bar{M}(s,x)=\begin{cases}\dfrac{s(x-L)}{L}+\bar{M}_A+\dfrac{\bar{M}_B-\bar{M}_A}{L}s, \\ \quad 0\leqslant s<x \\ \dfrac{x(s-L)}{L}+\bar{M}_A+\dfrac{\bar{M}_B-\bar{M}_A}{L}s, \\ \quad x<s\leqslant L\end{cases}\tag{7}$$

得到

$$\frac{\partial \bar{M}(s,x)}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{s}{L}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{M}_A+\dfrac{\bar{M}_B-\bar{M}_A}{L}s\right), \\ \quad 0\leqslant s<x \\ \dfrac{s-L}{L}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{M}_A+\dfrac{\bar{M}_B-\bar{M}_A}{L}s\right), \\ \quad x<s\leqslant L\end{cases}\tag{8}$$

鉴于 $\bar{M}_A$，$\bar{M}_B$ 与 x 的线性关系，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{M}_A+\frac{\bar{M}_B-\bar{M}_A}{L}s\right)$ 与 x 无关，进一步得到

$$\frac{\partial^2 \bar{M}(s,x)}{\partial x^2}=\delta(s-x)\tag{9}$$

$\delta(s)$ 为狄拉克 δ 函数 [3]. 根据其性质

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{EI}\int_0^L \delta(s-x)M_\mathrm{p}(s)\mathrm{d}s=\frac{M_\mathrm{p}(x)}{EI}\tag{10}$$

即验证了单位载荷法的解满足微分方程. 还须进一步验证边界条件.

当 $x=0$ 时，$\bar{M}_B=\bar{M}_A=0$，$\bar{Q}_A=1$，$\bar{Q}_B=0$，$\bar{M}(s,x)=0$；$x=L$ 时，$\bar{M}_B=\bar{M}_A=0$，$\bar{Q}_A=0$，

$\bar{Q}_B = -1$，$\bar{M}(s,x) = 0$. 因此由虚力原理方程可以得到 $w(0) = v_A$, $w(L) = v_B$.

另外，当 $x = L$ 时，根据 $\bar{M}_B = \bar{M}_A = 0$ 以及式 (8)，得到 $\dfrac{\partial \bar{M}(s,x)}{\partial x} = \dfrac{s}{L}$. 再由式 (5)，对 $w(x)$ 求一阶导数，可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \frac{v_B - v_A}{L} + \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{s}{L} M_{\mathrm{p}}(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

由引理可见 $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \theta_B$；同理可证 $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \theta_A$.

综上，边界条件也得到验证. 单位力偶作用在杆件上求解转角分布也可以依此法进行证明.

4 总 结

单位载荷法的理论依据为虚力原理，该方法的使用与材料本构关系无关；而积分法的理论依据为小挠度微分方程，是在材料服从胡克定律的前提下得到的. 上述推证从数学上论证了在材料满足胡克定律时，积分法与单位载荷法在求解杆系结构弹性位移上的一致性. 在实际工程问题求解时，应视方便选择具体的方法.

参 考 文 献

1 范钦珊. 材料力学. 北京: 高等教育出版社, 2000
2 龙驭球, 包世华. 结构力教程 I. 北京: 高等教育出版社, 2000
3 《数学手册》编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 2006

(责任编辑: 胡 漫)

计算机绘制无铰拱影响线的解析法 1)

李 彤 *,2) 李银山 †

*(华东理工大学机械与动力工程学院, 承压系统与安全教育部重点实验室, 上海 200237)

†(河北工业大学机械工程学院，天津 300130)

摘要 提出了用 Maple 编程绘制无铰拱影响线的解析法. 绘制了抛物线无铰拱在单位竖向移动载荷作用下，3 个多余未知力的影响线；指定截面上的弯矩，剪力和轴力的影响线；支座水平约束力，垂直约束力及约束力矩的影响线. 实例表明，利用 Maple 强大的符号运算功能，使用解析法绘制无铰拱影响线，速度快，方法简单，能同时给出影响线的解析表达式.

关键词 无铰拱, 超静定, 影响线, 弹性中心法, Maple

中图分类号：U448.22 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-12-150

引 言

影响线是结构力学中重要内容，在求解结构受移动载荷 (如桥梁要承受的列车、汽车等载荷，厂房中的吊车梁要承受吊车载荷) 作用下指定量值时有广泛的应用，是确定最不利载荷位置的有效方法 [1-2]. 由于无铰拱的轴线为曲线，而且属于三次超静定结构，用传统手工方法绘影响线需要列表数值计算，计算繁琐，工作量大，很难准确而快捷地求解无铰拱弯矩影响线 [3-4].

在国外大学及研究所，Maple 已广泛应用于工程实际、科研及教学中. 叶志明等 [5] 介绍了计算机代数系统在研究和力学教学领域的应用. 马开平等 [6] 收集了 Maple 在 11 个领域的 27 个应用实例，许多都是很好的教学素材. 邢静忠 [7] 采用 Maple 编程，编制了杆、梁、实体和板单元的有限元程序. 向宏军等 [8] 探讨了 Maple 在结构力学教学中的应用. 李银山 [9-10] 编著出版了《Maple 理论力学》、《Maple 材料力学》教材.

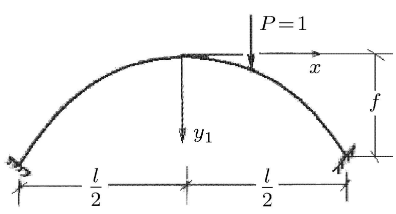
本文应用 Maple 软件编程，采用解析法绘制计算了无铰拱的多余未知力、指定截面的内力和支座约束力的影响线.

1 计算机绘制无铰拱影响线的方法和步骤

1.1 绘制无铰拱多余未知力影响线

设有抛物线无铰拱，如图 1(a) 所示. 绘制无铰拱多余未知力影响线的步骤如下：

(1) 确定弹性中心的位置：①计算刚臂长度 y_{s}；②把坐标原点移至弹性中心；(2) 确定与载荷无关的常数；(3) 确定



(a) 无铰拱三次超静定结构

图 1 抛物线无铰拱

2012–04–09 收到第 1 稿，2013–04–24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10872063), 上海市重点学科建设 (B503) 资助项目.

2) 李彤，1962 年生，女，讲师，博士，研究方向为结构优化设计. E-mail: tongli@ecust.edu.cn